

Feuille-réponse 8
Introduction à la méthode de Monte-Carlo

Exercice 1 : Calcul de π par une méthode de Monte-Carlo

1. La fonction `runif(n,0,1)` renvoie un échantillon (de taille n) de nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Essayez avec $n = 100$ puis avec $n = 1.000$ et tracer les deux histogrammes (avec `hist(...)`). Qu'observez-vous ?

2. Quelle est la loi de l'échantillon X obtenu avec `X<-2*runif(n)-1` ? Comparez avec `X1<-runif(n,-1,1)` : y a-t-il une différence entre X et $X1$? Qu'y a-t-il en commun ? (Indication : vous pouvez observer `hist(X)` et `hist(X1)`)

3. Expliquer ce que sont les nombres $X[1]$ et $X[n]$? Quelles valeurs obtenez-vous ?

4. Créer deux échantillons X et Y de $n = 1.000$ nombres aléatoires uniformément répartis dans l'intervalle $[-1, +1]$ et tracer les 1.000 points du plan de coordonnées (X, Y) . Afin de pouvoir reproduire exactement vos échantillons faites précéder vos deux appels de la fonction `runif` par l'instruction `set.seed(SSSMM)`, où SSSMM désigne le numéro de votre machine que vous aurez reproduit au début de votre copie, sous votre nom. Qu'observez-vous ?

5. Quel est le point de votre nuage qui est le plus proche de $(0, 0)$? Quel est le plus éloigné ? Donnez votre code.

6. Que représente l'entier calculé par les deux instructions suivantes ?

```
r2 = X^2+Y^2  
sum(r2<1)
```

7. Dédurre une estimation du nombre π . Recommencer avec d'autres échantillons et indiquer les différentes valeurs obtenues pour π .

8. Recommencez avec un échantillon de taille $n = 10.000$ (et non plus $n = 1.000$). Qu'observez-vous ?

Exercice 2 : Propriété de l'estimateur de π

1. Afin d'étudier les propriétés de cet estimateur de π , construire, à l'aide du code suivant, un vecteur noté Pi dont les composantes sont 400 estimations du nombre π puis tracer l'histogramme de ce vecteur. On choisira des échantillons de taille $n = 10.000$. Qu'obtenez-vous ?

```
K=400;Pi=numeric(K);N=10000
for (k in 1:K)
  {X=runif(N,-1,1);Y=runif(N,-1,1)
  r2=X^2+Y^2
  Pi[k]=4*sum(r2<1)/N
  }
```

2. Quelle est, en théorie, la moyenne et l'écart-type, d'un tel échantillon ?

3. Quelle est la moyenne et l'écart type de votre échantillon Pi . Comparer avec la valeur théorique trouvée à la question précédente.

4. Le code suivant permet de comparer la distribution empirique de cet estimateur avec une approximation gaussienne :

```
hist(Pi,freq=FALSE)
curve(dnorm(x,mean(Pi),sd(Pi)), add=TRUE)
```

Expliquer ce code (pourquoi l'option `freq=FALSE` ?) et commenter le résultat obtenu.