Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Systèmes Dynamiques
Date : .
Groupe : .

Feuille-réponse 2
Étude qualitative d'équations différentielles en dimension 1

1 Exercices sur table : Dynamique d'une population de bactéries.

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y^2(t) \tag{1}$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Expliquer pourquoi toutes les solutions de cette équation (1) sont croissantes.

2. Montrer que $y(t) = \frac{5}{1-t}$ est une solution de l'équation différentielle (1).

3. Quelle est sa valeur y_0 à l'instant initial $t_0 = 0$?

4. Esquisser son graphe pour $-1 < t \leq 1$. Quel est le domaine de définition de cette solution ?

Exercice 2. : Usage d'un bactéricide

On lutte contre cette maladie en utilisant un traitement qui induit un taux de mortalité de 40 (pour 10 000) :

1. Expliquer pourquoi ceci peut être modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,2y(t)^2 - 40y(t).$$

2. Tracer l'allure du graphe de la fonction $h(y) = 0,2y^2 - 40y$ pour $y \in [0, 250]$ qui définit cette équation.

3. En vous servant du signe de cette fonction h, prévoir le comportement de cette population de bactéries selon sa taille initiale $y_0 = y(0)$. On distinguera successivement les cas $y_0 = 0$, $0 < y_0 < 200 = 0$, $y_0 = 200$ et $y_0 > 200$.

4. Expliquer pourquoi le traitement ne pourra être efficace que si $y_0 < 200$.

5. Que faudrait-il faire, à votre avis, si l'on avait $y_0 = 201$.

6. Discuter la stabilité des équilibres.

2 Exercices sur machine : Approche au moyen de Scilab

Exercice 3. : Révisions de Scilab

Rappelons ci-dessous quelques instructions Scilab utilisées la dernière fois, et donnons quelques précisions suplémentaires : derrière `//, le texte n'est pas compilé mais considéré comme du commentaire.`

```
clear;// reinitialise toutes les variables
r=0.5;K=100; //donne des valeurs aux constantes r et K
function ffff=fonc(y); //à droite le nom de la fonction
ffff=r*y.*(1-y/K)// à gauche le nom d'une variable locale ffff
endfunction;//(que l'on appelle comme on veut)
yy=0:0.1:K;// yy est donc une liste de valeurs, de 0 a K par pas=0.1
xset("window",1);// ouvre une nouvelle fenêtre graphique, de numéro 1
plot(yy,fonc(yy));//courbe liant les points specifiés
```

1. Notez le ''produit pointé" .* dans la définition de la fonction. Il effectue le produit terme à terme de deux matrices de même type, alors que le produit * effectuerait le produit usuel de matrices.Pour mieux comprendre cette multiplication particulière .* , choisir yy=1:1:5 et indiquer ce que valent les quantités (1-yy/K) et yy.*(1-yy/K) dans ce cas. Commenter.

2. Pour les même valeurs de yy, indiquer ce que valent yy' et (1-yy/K)' et expliquer pourquoi il est possible de calculer (1-yy/K)*yy' mais pas (1-yy/K)*yy.

3. En vous servant du code rappelé ici, tracer le graphe de la fonction $h(y)$ étudiée à la question 2 de l'exercice 2. Cela confirme-t-il votre tracé?

4. En vous servant de l'instruction ode comme lors de la première séance, tracer 4 trajectoires de l'équation différentielle de l'exercice 2 correspondant aux 4 cas envisagés à la question 3 de cet exercice. Indiquer l'allure des trajectoires trouvées.

Exercice 4. : Explosion

1. Definir une function f(t,y) telle que les instructions suivantes donnent une représentation graphique de la solution particulière $y(t) = \frac{5}{1-t}$ de l'équation (1)de l'exercice 1:
   tFinal=0.9;tt=0:0.01:tFinal;
   yy=ode(y0,0,tt,f)
   plot(tt,yy);
   Que trouvez-vous pour les deux quantités suivantes :
   $y(0.9) =$

   ode(y0,0,tFinal,f)=

2. Calculer la différence et commentez

3. Recommencez à tracer le graphe de la solution avec cette fois tt=0:0.1:tFinal; et expliquer la différence avec le graphe obtenu précédemment.

   Recommencez votre dessin avec tFinal=0.99; puis avec tFinal=0.999;. Expliquer.