Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014
Date : .
Salle et heure : .

Feuille-question du TP 8
Dynamique des populations : matrices de Leslie

1 Exercices sur table

1.1 Saumons

Considérons une population de saumons en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde, et enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 juveniles au cours de sa deuxième année et à 5 au cours de sa troisième année. Si l'on désigne respectivement par j_t, p_t et a_t les effectifs à l'instant t des femelles juvéniles, des femelles préadultes (saumons de 1 an) et des femelles adultes (saumons de 2 ans), les informations précédentes peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{t+1} & = & 4p_t + 5a_t \\ p_{t+1} & = & 0,53 j_t \\ a_{t+1} & = & 0,22 p_t \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Indiquer qu'elle est la matrice de Leslie L de cette dynamique.

La matrice de Leslie L associée au système d'equations differentielles (1) est

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} j & p & a \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0{,}53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} j \\ p \\ a \end{array} \end{array}$$

2. Calculer L^2, L^3, puis L^5 puis vérifier que la matrice L est *primitive*.

$$L^2 = L \cdot L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.12 & 1.1 & 0 \\ 0 & 2.12 & 2.65 \\ 0.1166 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^3 = L^2 \cdot L = \begin{pmatrix} 2.12 & 1.1 & 0 \\ 0 & 2.12 & 2.65 \\ 0.1166 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0.53 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.583 & 8.48 & 10.6 \\ 1.1236 & 0.583 & 0 \\ 0 & 0.4664 & 0.583 \end{pmatrix}$$

$$L^5 = L^2 \cdot L^3 = \begin{pmatrix} 2.12 & 1.1 & 0 \\ 0 & 2.12 & 2.65 \\ 0.1166 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.583 & 8.48 & 10.6 \\ 1.1236 & 0.583 & 0 \\ 0 & 0.4664 & 0.583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.47.. & 18.61.. & 22.47.. \\ 2.38.. & 2.47.. & 1.54.. \\ 0.06.. & 0.38.. & 1.23.. \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de L^5 sont non nuls. Il existe donc $n_0 = 5$ tq $L^5 > 0$. La matrice L est donc primitive

1.2 Zoiseaux

On considère une espèce d'oiseaux ayant une durée de vie maximale de 3 ans. Une étude conduit à l'observation suivante : En moyenne chaque paire de ces oiseaux conduit à la naissance durant leur deuxième année à deux oisillons. Un échantillon typique de 8 oiseaux produit 15 autres oisillons durant leur troisième année. Seul 40% atteignent leur deuxième année, et seul 30% des oiseaux d'un an atteignent leur troisième année. Les taux de survie ne dépendent pas du genre des oiseaux.

1. Donner un modèle de Leslie de la dynamique de ces oiseaux

Pour tout $t = 0, 1, 2..$ nous notrons j_t le nombre d'oisillons (= oiseaux dans leur première année), p_t le nombre d'oiseaux d'un an (= dans leur deuxième année), et a_t le nombre d'oiseaux de deux ans (= dans leur dernière année).

2. Donner les équations de la dynamique de votre modèle, puis sa matrice L.

Par règle de trois chaque oiseau d'un an donne un oisillon et chaque oiseau dans sa deuxième année donne $\frac{15}{8}$ d'oisillon.

$$L = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} & j & p & a \\ & & & \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{15}{8} \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ p \\ a \end{array}$$

3. Comme vous pourrez le vérifier au cours de la séance sous Scilab la valeur propre dominante de L est approximativement égale à $\lambda = 0.8$ de vecteur propre $X = {}^t(0.88, 0.44, 0.16)$ et L^5 n'a aucun de ses coefficients qui est nul. Indiquer comment vont s'établir les proportions entre les trois générations et comment va évoluer la population (augmenter, diminuer).

La distribution (= proportion entre les trois générations) va tendre vers un vecteur propre V^* associé à la vlp dominante $\lambda^* = 0.8..$ (voir justification à la question suivante). Pour calculer V^* il suffit de normaliser le vcp X (pour la norme $\| \ \|_1$); donc

$$V^* = \frac{1}{0.88+0.44+0.16} \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.44 \\ 0.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.59.. \\ 0.29.. \\ 0.10.. \end{pmatrix}$$

vérif Scilab:
```
[vcp, vlp] = spec(L);
S = sum(vcp, 'r');
Vstar = vcp(:,1)/S(1)
```

4. Pourquoi était-il important de connaitre la propriété indiquée de L^5 ?

C'est sous l'hypothèse que L est primitive que le théorème de Perron-Frobenius assure que la dynamique converge vers la distribution V^* tq $LV^* = \lambda^* V^*$

2 Exercice au moyen de Scilab

2.1 Zoiseaux

On commence par vérifier les affirmations relatives à la dynamique des oiseaux utilisées vue en 1.2

1. Quel est le nombre de coefficients nuls des matrices L^2, L^3, L^4, L^5 ? Conclusion ?

L^2 a 3 coefficients nuls
L^3 — 2 —
L^4 — 1 —
L^5 — 0 — ← ceci montre que L est primitive et donc que le théorème de Perron-Frobenius s'applique

2. On considère une population de 3000 oiseaux, également répartie sur les trois classes d'age. Quelle est la population et sa répartition après 10 ans et après 50 ans? Conclusion?

Population après 10 ans = sum(L^10*V0) = 449.35.. ← forte baisse depuis le 3000

— 50 ans = sum(L^50*V0) = 0.10.. c'est à dire disparition de l'espèce.

3. quel est l'évolution du nombre d'oisillons durant les 10 premières années ?

$(j_0, j_1, j_2, \dots, j_{10}) = (1000, 2750, 925, 1310, 947.5, 718.2.., 654.1, 486.2.., 412.4.., 331.8.., 267.1..)$

$\nearrow \searrow \nearrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$

2.2 Saumons

2.- Le théorème de Perron Frobenius assure que la distribution limite est un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module, dite *valeur propre dominante.* Nous allons expérimenter ceci pour les saumons considérés à la sous-section 1.1. Comme c'est une distribution, il convient de diviser les coefficients du vecteur propre donné par Scilab (qui est généralement normé pour la norme euclidienne) par la somme de ses coefficients obtenant ainsi un vecteur normé pour la norme de la somme des (valeurs absolues) des coefficients, souvent appelée "norme 1".

ici $L = [0,4,5;0.53,0,0;0,0.22,0]$

```
//Calcul des vecteurs propres et valeurs propres
[vcp,vlp]=spec(L) ;
//vecteur ligne ('r'=row) des sommes par colonnes
normes1vcp=sum(vcp,'r') ;
//calcul des vecteurs "renormalisés"
for ligne=1:3 ;
      vcpnorme(ligne,:)=vcp(ligne,:)./normes1vcp ;
end ;
disp(vcpnorme,"vecteurs propres=", vlp,"valeurs propres") ;
```

1. Pourquoi a-t-on ./ dans le calcul de vcpnorme ?

normes1vcp est le vecteur ligne des sommes des colonne.
./ effectue la division terme à terme de chaque ligne de vcp par ce vecteur ligne; lorsque vcp(:,colonne) est réel, cela norme ce vecteur

2. Quelle valeur propre dominante λ trouvez-vous et quelle distribution limite V_∞ ?

$\lambda^* = 1.5778145$

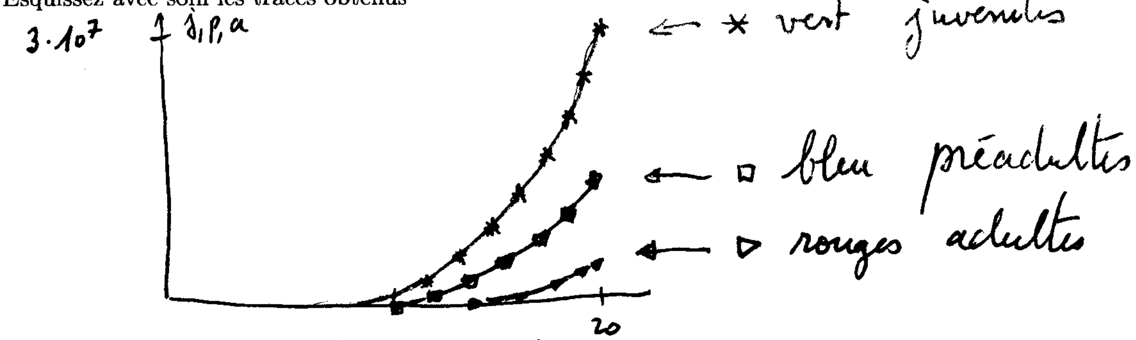
$$V^* = vcpnorme(:,1) = \begin{pmatrix} 0.72.. \\ 0.24.. \\ 0.03.. \end{pmatrix}$$

3. On veut calculer la dynamique d'une population qui, à l'instant initial, comporte 2000 juvéniles, 1000 préadultes, et 500 adultes.

```
//condition initiale
V0=[2000 ;1000 ;500] ;
// il y aura tMax+1 instants
tMax=20 ;
// initialisation de V
V=zeros(3,tMax+1) ;
V(:,1)=V0 ;
//voici les instants où V(t) sera calculé
tt=0:tMax ;
//Calcul des V_{t+1} pour t>0 ; rangé dans V(:,t+1+1)
for t=0:tMax-1 ;//on calcule V_{t+1}
V(:,t+1+1)=L*V(:,t+1) ;
```

```
end ;
//size(tt)//pour debuggage: verifier que les tailles sont egales.
//size(V)
j=V(1,:) ;//les juveniles
p=V(2,:) ;//les preadultes
a=V(3,:) ;//les adultes
//juveniles en vert, preadultes en bleu, adultes en rouge
plot(tt,j,'g-*') ;plot(tt,p,'b--o') ;plot(tt,a,'r.->') ;
```

Esquissez avec soin les tracés obtenus



4. Dynamique de la distribution des trois sous populations

```
xset("window",1) ;
total=j+p+a ;
plot(tt,j./total,'g-*') ; plot(tt,p./total,'b--o') ; plot(tt,a./total,'r.->') ;
```

Qu'observez-vous ? Pouviez-vous le prévoir ?

On observe que la distribution converge vers la distribution limite prévue V^*

5. Log de cette dynamique

```
xset("window",2) ;
plot(tt,log(j),'g-*') ; plot(tt,log(p),'b--o') ; plot(tt,log(a),'r.->') ;
```

Qu'observez-vous ? Expliquez en quoi cela montre que la dynamique des trois population est “en $Ce^{\mu t}$” ; quelle valeur de μ obtenez-vous ? Était-ce prévisible ?

On observe que pour $x = j, p,$ ou a, on a $\log(x)$ qui se comporte progressivement en $\log(x) = at + b$, avec $a \approx \frac{17-7.5}{20} = 0.475$ (mesure très approximative, à l'écran)

Donc $x_t = e^{at+b} \approx \underbrace{C}_{e^b}(e^a)^t = C(1.6..)^t \approx C(\lambda^*)^t$ puisque $\lambda^* = 1.58$

On retrouve une croissance géométrique de raison λ^*.

6. Une autre manière de programmer le tracé la dynamique

```
xset("window",3) ;
Couleur=['g-*','b--o','r.->'] ; for ligne=1:3 ;
W(ligne,:)=V(ligne,:)./total ;
plot(tt,W(ligne,:),Couleur(ligne))
end ;
```