Université de Nice — L3MASS et L3 Maths, année 2017-2018
Département de Mathématiques — Systèmes Dynamiques
NOM : Date : .
PRENOM : Salle et heure : .

Feuille-question du TP 10
Exercices de révision

1 Exercices sur table

1.1 Une dynamique économique

Le modèle suivant est appelé le *modèle d'exclusion compétitive*. Il modélise la compétition entre n entreprises qui se partagent un marché. On désigne par $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ la part de marché détenue à l'instant t par chacunes d'elles. Le taux de croissance de chaque entreprise comporte une part de croissance propre $x_i'(t) = \beta_i x_i(t)$ (β_i représente le taux naturel de croissance propre de l'entreprise en l'absence de compétiteurs) mais sa croissance est limitée (un peu comme dans un modèle logistique) par la concurrence des autres à travers un terme $x_i'(t) = -\gamma_i F_i(x(t))x_i(t)$ avec F qu'on supposera ici linéaire, pour simplifier ; $F(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Toutes les constantes β_i et α_i sont supposées strictement positives. On suppose en outre que $\frac{\beta_1}{\gamma_1} > \ldots > \frac{\beta_i}{\gamma_i} > \ldots > \frac{\beta_n}{\gamma_n}$. Ceci conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & (\beta_1 - \gamma_1 F(x))\, x_1 \\ x_2' & = & (\beta_2 - \gamma_2 F(x))\, x_2 \\ .... & = & .... \\ x_n' & = & (\beta_n - \gamma_n F(x))\, x_n \end{array} \right. \tag{1}$$

Nous considèrerons ici le cas où $n = 2$, et on choisit $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\beta_1 = 3$, et $\beta_2 = 2$.

1. Expliciter le système (1) dans ce cas.

2. Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}\,(x_1, x_2)$.

3. Quelle est la stabilité de l'équilibre $(0,0)$ et sa nature dans la classification de Poincaré ?

4. Montrer qu'il n'y a que deux autres points stationnaires, $M_1 = (x_1^*, 0)$ et $M_2 = (0, x_2^*)$. Déterminer la valeur de x_1^* et de x_2^* et observer que $x_1^* > x_2^* > 0$.

5. Vérifier que toutes les valeurs propres de Jac (M_1) sont strictement négatives. Quelle est la stabilité et la nature dans la classification de Poincaré de l'équilibre M_1 ?

6. Déterminer les valeurs propres de Jac (M_2). Quelle est la stabilité et la nature dans la classification de Poincaré de l'équilibre M_2 .

7. Soit Γ_1 et Γ_2 les deux droites parallèles d'équation $\beta_1 - \gamma_1 F(x) = 0$ et $\beta_2 - \gamma_2 F(x) = 0$. La droite Γ_1 est au-dessus de la droite Γ_2 du fait que $\frac{\beta_1}{\gamma_1} > \ldots > \frac{\beta_i}{\gamma_i}$. Représentez les points M_1 et M_2 et ces deux droites sur une figure représentant le quadrant positif et schématiser l'orientation des deux composantes du champ associé au système différentiel dans chacune des régions délimitées par ces droites et par les axes de coordonnées, puis esquisser le comportement des solutions.

Observez que M_1 est un équilibre stable, limite de toutes les solutions issues des points de coordonnées strictement positives. Plus généralement on peut montrer que, si l'on suppose que les $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ sont tous différents, une seule entreprise, celle qui a le plus grand coefficient $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ –supposons que, comme ici, ce soit celle qui porte le numéro $i = 1$– va survivre, les $n-1$ autres étant conduites à la disparition. Cela se traduit par la présence d'un unique équilibre stable dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première. On pourra vérifier pour cela que, sous les hypothèses faites, la matrice jacobienne du système est une matrice triangulaire avec des coefficients nuls sous la diagonale et des coefficients strictement négatifs sur la diagonale.

1.2 Révision de `Scilab`

Révision : répondre aux questions suivantes *sans utiliser* `Scilab`.

1. Comment s'écrit, en `Scilab`, le vecteur ligne de composantes 1, 2, 3, 4.

2. Comment s'écrit le vecteur colonne ayant ces mêmes composantes ?

3. Que représente `A(3,:)` ?

4. Que représente B(:,2) ?

5. Comment calculer la matrice des vecteurs propres d'une matrice `A` ?

6. Ces vecteurs propres sont-ils en ligne ou en colonne ?

7. Si `plot(0:0.1:3,y,'r.x')` ne retourne pas d'erreur que retourne la commande `size(y)` ?

8. Que retourne la commande `disp('décembre',25,'Noel a lieu le ') ;` ?

9. Si `A=[1,2,3 ;4,5,6 ;7,8,9]` que retourne `sum(A,'r')` ?

10. Est-ce un vecteur ligne ou un vecteur colonne ?

11. Comment tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour x entre 0 et 1 ?

12. Comment définir la fonction `w` pour que `ode(M0,0,tt,w)` calcule la solution issue du point M_0 du système différentiel $x' = y$, $y' = -x$ pour `tt` entre 0 et 5 ?

13. Comment tracer la solution calculée de cette façon ?

2 Exercices sous `Scilab`

2.1 Tracer de trajectoires du système de Van der Pol

On se propose de tracer des trajectoires du système de Van der Pol, telles que sur la figure 10.1 du chapitre 10 du cours. Nous ne vous donnons plus ici le code `scilab` qui permet d'obtenir ce dessin, mais les étapes qui permettent de le générer.

1. On pose $a = 1$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$, $f(x, y)$ et $g(x, y)$ tels que le système de Van der Pol puisse s'écrire.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

   Définir la constante `a` et les `function F`, `f`, et `g` en conséquence.

2. Définir la `function w=w(t,v)` de manière à pouvoir l'utiliser dans `ode` pour calculer des valeurs de solutions du système de Van der Pol.
3. On pose `tMax=50`. Définir un intervalle `tt` de valeur allant de `0` à `tMax` par pas de `0.1`.
4. Définir le vecteur colonne `M0` de coordonnées `0` et `0.5`.
5. Calculer, au moyen de `ode`, la matrice `M` des valeurs de la solution du système de Van der Pol issue de `M0` aux instants `tt`.
6. Définir `xt` comme étant la première ligne de `M` et `yt` comme étant la deuxième ligne de `M`.

7. Ouvrir et rendre active une fenêtre graphique numérotée 1.
8. Tracer au moyen de `plot2d`, dans un rectangle $[-2.5, 2.5] \times [-3, +3]$, la (portion de) demi trajectoire calculée.
9. Quelle est la plus grande et la plus petite abscisse calculée ; on les notes x_+ et x_-. Quelle est l'amplitude approximative en x du cycle de l'équation de Van der Pol ? L'amplitude exacte est-elle plus grande ou plus petite ? Expliquez.

10. Calculer au moyen de `-tt` et représenter de même la demi trajectoire négative de ce même point.
11. Quelle est la nature du point stationnaire $(0, 0)$?

12. Calculer et tracer de même la trajectoire du point `M1` de coordonnées `0` et `-0.5`.
13. Calculer et tracer de même la trajectoire du point `M2` de coordonnées `0` et `2.5`. NB : observez votre console et acceptez de continuer, malgré les trop grands risques d'erreur trouvés par `Scilab`.
14. Calculer et tracer de même la trajectoire du point `M3` de coordonnées `0` et `-2.5`.

2.2 La bifurcation de Hopf

Dorénavant nous ne considérerons plus que la demi-trajectoire positive issue de `M0`. On note $x_+(1)$ et $x_-(1)$ les valeurs de x_+ et x_- trouvées à la question 9.

1. Ouvrir et rendre active une fenêtre graphique numérotée 2. Cette fenêtre pourra être effacée entre deux tracés car ceux-ci correspondent à des systèmes différentiels différents puisque la valeur du paramètre a changera.
2. En modifiant la valeur de `a`, calculer de même $x_+(a)$ et $x_-(a)$ pour a égal à 0.9, 0.8, ..., 0.1 et inscrire les valeurs obtenues (deux chiffres significatifs) dans le tableau ci-dessous.

a	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$x_+(a)$											
$x_-(a)$											

3. Choisir `tMax=5000` et `M0=[0;0.01]`. Calculer $x_+(0.01)$ et $x_-(0.01)$. Pourquoi a-t-on choisi une valeur plus grande pour `tMax` ? Et pourquoi cette valeur de `M0` ?

4. Représenter les points $(a, x_+(a)$ et $(a, x_-(a)$ sur un même graphique. Que constatez-vous ?