Université de Nice
Département de Mathématiques
L3MASS et L3 Maths, année 2013-2014

NOM : Date : .

PRENOM : Salle et heure : .

Feuille-question du TP 10
Exercices de révision

1 Exercices sur table

1.1 Une dynamique économique

Le modèle suivant est appelé le *modèle d'exclusion compétitive.* Il modélise la compétition entre n entreprises qui se partagent un marché. On désigne par $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ la part de marché détenue à l'instant t par chacunes d'elles. Le taux de croissance de chaque entreprise comporte une part de croissance propre $x_i'(t) = \beta_i x_i(t)$ (β_i représente le taux naturel de croissance propre de l'entreprise en l'absence de compétiteurs) mais sa croissance est limitée (un peu comme dans un modèle logistique) par la concurrence des autres à travers un terme $x_i'(t) = -\gamma_i F_i(x(t))x_i(t)$ avec F qu'on supposera ici linéaire, pour simplifier ; $F(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Toutes les constantes β_i et α_i sont supposées strictement positives. On suppose en outre que $\frac{\beta_1}{\gamma_1} > \ldots > \frac{\beta_i}{\gamma_i} > \ldots > \frac{\beta_n}{\gamma_n}$. Ceci conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' &=& (\beta_1 - \gamma_1 F(x))\, x_1 \\ x_2' &=& (\beta_2 - \gamma_2 F(x))\, x_2 \\ .... &=& .... \\ x_n' &=& (\beta_n - \gamma_n F(x))\, x_n \end{array}\right. \qquad (1)$$

Nous considèrerons ici le cas où $n = 2$ et on choisit $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\beta_1 = 3$, et $\beta_2 = 2$.

1. Expliciter le système (1) dans ce cas.

$$x_1' = x_1(3 - x_1 - x_2) = 3x_1 - x_1^2 - x_1x_2 =: f_1(x_1, x_2)$$
$$x_2' = x_2(2 - x_1 - x_2) = 2x_2 - x_1x_2 - x_2^2 =: f_2(x_1, x_2)$$

expression commode pour calculer le signe de x_i'

expression commode pour calculer $\mathrm{Jac}(x_1, x_2)$

2. Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(x_1, x_2)$.

$$\mathrm{Jac}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x_1-x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 2-x_1-2x_2 \end{pmatrix}$$

3. Quelle est la stabilité de l'équilibre $(0, 0)$ et sa nature dans la classification de Poincaré ?

$$\mathrm{Jac}(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ donc $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, ce qui montre que $(0,0)$ est un noeud instable

4. Montrer qu'il n'y a que deux autres point stationnaires, $M_1 = (x_1^*, 0)$ et $M_2 = (0, x_2^*)$. Déterminer la valeur de x_1^* et de x_2^* et observer que $x_1^* > x_2^* > 0$.

(x,y) equilibre $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = f_1(x_1,x_2) = x_1(3-x_1-x_2) \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_1+x_2 = 3 \\ 0 = f_2(x_1,x_2) = x_2(2-x_1-x_2) \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ ou } x_1+x_2 = 2 \end{array}\right.$

Trois cas :

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \Updownarrow$ $(x_1,x_2) = \boxed{(0,0)}$ (voir question 3 pour l'étude)

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1+x_2 = 2 \end{array}\right. \Updownarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 = x_2^* \end{array}\right.$ $(x_1,x_2) = \boxed{(0, 2) = (0, x_2^*)}$

$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2 = 3 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \Updownarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3 = x_1^* \\ x_2 = 0 \end{array}\right.$ $(x_1,x_2) = \boxed{(3, 0) = (x_1^*, 0)}$

$$M_1 = (x_1^*, 0) = (3, 0)$$

5. Vérifier que toutes les valeurs propres de Jac (M_1) sont strictement négatives. Quelle est la stabilité et la nature dans la classification de Poincaré de l'équilibre M_1 ?

$$\mathrm{Jac}(M_1) = \mathrm{Jac}(3,0) = \begin{pmatrix} 3-6-0 & -3 \\ -0 & 2-3-2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = -3 < -1 = \lambda_2 < 0$
Les deux vlp sont négatives distinctes
M_1 est un noeud stable

6. Déterminer ~~que~~ toutes les valeurs propres de Jac (M_2). Quelle est la stabilité et la nature dans la classification de Poincaré de l'équilibre M_2 .

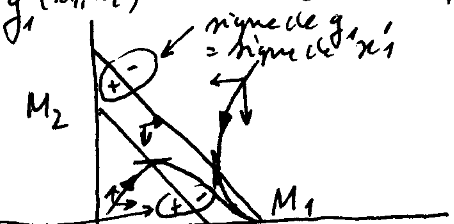
$$\mathrm{Jac}(M_2) = \mathrm{Jac}(0,2) = \begin{pmatrix} 3-0-2 & -0 \\ -2 & 2-0-2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ * & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = 1 > 0 > -2 = \lambda_2$
Les deux vlp sont de signe opposé.
M_2 est un col, donc instable

7. Soit Γ_1 et Γ_2 les deux droites parallèles d'équation $\beta_1 - \gamma_1 F(x) = 0$ et $\beta_2 - \gamma_2 F(x) = 0$. La droite Γ_1 est au-dessus de la droite Γ_2 du fait que $\frac{\beta_1}{\gamma_1} > \ldots > \frac{\beta_i}{\gamma_i}$. Représentez les points M_1 et M_2 et ces deux droites sur une figure représentant le quadrant positif et schématiser l'orientation des deux composantes du champ associé au système différentiel dans chacune des régions délimitées par ces droites et par les axes de coordonnées, puis esquisser le comportement des solutions.

$f_1 = x_1 g_1(x_1, x_2)$ avec $g_1(x_1, x_2) = 3 - x_1 - x_2$ $\quad \Gamma_1 = \{g_1(x_1,x_2) = 0\} = \{3 - x_1 - x_2\}$ ← droite passant par $(0,3)$ et $(3,0) = M_1$

$f_2 = x_2 g_2(x_1, x_2)$ avec $g_2(x_1, x_2) = 2 - x_1 - x_2$ $\quad \Gamma_2 = \{g_2(x_1,x_2) = 0\} = \{2 - x_1 - x_2\}$ ← droite passant par $(0,2) = M_2$ et $(2,0)$



signe de g_2 = signe de x_2'

Observez que M_1 est un équilibre stable, limite de toutes les solutions issues des points de coordonnées strictement positives. Plus généralement on peut montrer que, si l'on suppose que les $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ sont tous différents, une seule entreprise, celle qui a le plus grand coefficient $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$ –supposons que, comme ici, ce soit celle qui porte le numéro $i = 1$– va survivre, les $n - 1$ autres étant conduites à la disparition. Cela se traduit par la présence d'un unique équilibre stable dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la première. On pourra vérifier pour cela que, sous les hypothèses faites, la matrice jacobienne du système est une matrice triangulaire avec des coefficients nuls sous la diagonale et des coefficients strictement négatifs sur la diagonale.

1.2 Révision de `Scilab`

Révision : répondre aux questions suivantes *sans utiliser* `Scilab`.

1. Comment s'écrit, en `Scilab`, le vecteur colonne de composantes 1, 2, 3,

   [1 ; 2 ; 3]

2. Comment s'écrit le vecteur ligne ayant ces mêmes composantes ?

   [1, 2, 3]

3. Que représente `A(2,:)` ?

   li co

   2e ligne de la matrice A

li 3

4. Que représente B(:,3) ?

3e colonne de la matrice B

5. Comment calculer la matrice des vecteurs propres d'une matrice A ?

[vcp, vlp] = spec(A) les vecteurs propres sont les colonnes de vcp

6. Ces vecteurs propres sont-ils en ligne ou en colonne ?

en colonnes

7. Si `plot(0:0.1:2,y,'r.x')` ne retourne pas d'erreur que retourne la commande `size(y)` ? rep : 21

Pour qu'il n'y ait pas d'erreur il faut que 0:0.1:2 (={0,0.1,0.2,...,1.9,2}) ait le même nombre d'éléments que y, size(y)

8. Que retourne la commande `disp('décembre',25,'Noel a lieu le ');` ?

Noel a lieu le 25 décembre (affichage dans l'ordre inversé)

9. Si `A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]` que retourne `sum(A,'c')` ?

ma $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ← somm = 6, — " — = 15, — " — = 24 donc sum(A,'c') = 6 15 24

10. Est-ce un vecteur ligne ou un vecteur colonne ?

c'est un vecteur colonne (d'où le 'c').

11. Comment tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour x entre 0 et 1 ?

```
function f=f(x); f=x^2-1; endfunction; xx=0:0.01:1; plot(xx,f(xx));
```

12. Comment définir un champ de vecteurs w pour que `ode(M0,0,tt,w)` trace la solution issue du point M_0 du système différentiel $x' = y$, $y' = x$ pour `tt` entre 0 et 5 ?

```
function f=f1(x,y);
  f=y
endfunction;

function f=f2(x,y);
  f=x
endfunction;

function w=w(t,v),
  w(1)=f1(v(1),v(2));
  w(2)=f2(v(1),v(2));
endfunction.
```

13. Comment tracer la solution calculée de cette façon ?

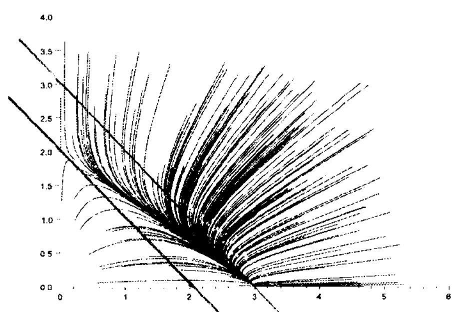
```
M0=(à choisir)
tt=0:0.1:5;
MM=ode(M0,0,tt,w);
plot(MM(1,:),MM(2,:))
```

2 Exercices sous Scilab

2.1 Tracer de trajectoires du système (1)

Représenter 200 trajectoires du système (1) avec condition initiale choisie au hazard dans le rectangle $[0, 2x_1^*] \times [0, 2x_2^*]$ et esquisser le résultat ci-dessous.

```
xmin=0; xmax=6; ymin=0; ymax=4;
for numerotraj=1:200
  M0=[xmin+(xmax-xmin)*rand(); ..
      ymin+(ymax-ymin)*rand]
  M=ode(M0,0,tt,w);
  xt=M(1,:); yt=M(2,:);
  plot(xt,yt)
end;
```



champ est vertical

champ est horizontal

avec

```
function f=f1(x1,x2);
  f=x1*(3-x1-x2);
endfunction

function f=f2(x1,x2);
  f=x2*(2-x1-x2);
endfunction
```

et w comme ci-dessus (12.)

2.2 Compléments à Leslie

1. Un modèle de Leslie a été proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individu de sexe féminin, c'est-à-dire en ignorant les naissances masculines dans les taux de fécondités des classes, on a choisi dix classes d'age d'une durée de cinq ans et un pas de temps de cinq ans également. On a obtenu les coefficients suivants sur la première ligne de la matrice

$$(\ 0,000 \quad 0,0010 \quad 0,878 \quad 0,3487 \quad 0,4761 \quad 0,3377 \quad 0,1833 \quad 0,0761 \quad 0,174 \quad 0,0010\ )$$

et les coefficients suivants sur la sous diagonale

$$(\ 0,9966 \quad 0,9983 \quad 0,9979 \quad 0,9968 \quad 0,9961 \quad 0,9947 \quad 0,9923 \quad 0,9987 \quad 0,9831\ )$$

Saisir la matrice de Leslie L correspondante en commençant par
`LL=zeros(10,10) ;` ou aussi LL(1,:)=[0.0, 0.001, 0.878, 0.3487, 0.4761, 03377, 0.1833, 0.0761.., 0.174, 0.001];
`LL(1,2)=0.001 ;`..........
pour la première ligne, puis par
`LL(2,1)=0.9966 ;` L(3,2)=0,9983; L(4,3)=0.9979; et...
pour la sous diagonale et executer le code suivant :

```
[vcpLL,vlpLL]=spec(LL) ;
//NB: ouvrir en grand la fenetre "console" avant d'executer les instructions suivantes
disp(LL,'Matrice de Leslie LL =') ;
disp(vlpLL,'valeurs propres de LL =') ;
disp(vlpLL*conj(vlpLL),'carré des normes euclidiennes') ;
disp(vcpLL,'vecteurs propres de LL =') ;
vlpLL(1,1)^(1/5) ;
```

} affichage avec commentaires

matrice diagonale des $\underbrace{\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i}_{|\lambda_i|^2}$

Quelle est la valeur propre la plus grande en norme euclidienne?

Dans la matrice diagonale vlpLL * conj(vlpLL) on voit que la plus grande v.l.p. est vlpLL(1,1) = 1.2204122 = "λ^*"

2. Quel est, à l'équilibre, le taux de croissance annuel de cette population?

A l'équilibre, la population est multipliée par μ chaque année, avec $\mu^5 = \lambda^*$ et donc $y = \sqrt[5]{\lambda^*}$ = (vlpLL(1,1)) ^ (1/5) = $\underline{\underline{1.0406419}}$

3. Quelle est la distribution d'équilibre de cette population? Donner le code Scilab.

Cette distribution est le vecteur propre dominant, normalisé par division par la somme de ses coefficients

distriEqui = vcp(:,1)/sum(vcp(:,1));

on obtient
0,21..
0,17..
0,14..
0,11..
0,09..
0,07..
0,06..
0,05..
0,04..
0,03..