Fiche de TP 2 :
Options américaines

On considère un processus S_t, défini pour tout $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T\}$, $T =: N\delta t$ qui représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps. On appelle option américaine de payoff $\varphi(S_t)$ et de date d'échéance T un contrat qui peut être exercé à *toute* date $t \in [0..T]$ et qui rapporte $\varphi(S_t)$ à son détenteur s'il l'exerce à l'instant t. Lorsque $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$, on parle de *call américain* et lorsque $\varphi(S_t) = (K - S_t)^+$, on parle de *put américain.* On désigne par U_t la valeur à l'instant t d'une option américaine dont le payoff, à l'instant t, est $P_t = \varphi(S_t)$. On désigne par $R = e^{r\delta t}$ le taux d'escompte entre les dates t et $t + \delta t$ (supposé connu et constant).

Une adaptation du raisonnement simple mené pour les options européennes permet de se convaincre que U_t vérifie la relation de récurrence descendante suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U_t & = & \text{Max}\left(P_t, \frac{1}{R}\mathbb{E}_t(U_{t+\delta t})\right) \\ U_T & = & P_T \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\mathbb{E}_t$ est l'espérance conditionnelle au sens de la probabilité "risque neutre", unique probabilité sous laquelle $\tilde{S}_t (:= \frac{S_t}{B_t})$ est une martingale, où B_t désigne l'actif sans risque qui satisfait la dynamique déterministe $B_{t+\delta t} = B_t \cdot R$.

1. En utilisant cette formule de récurrence rétrograde dans le cas d'un call, calculer (dans un modèle CRR), après avoir choisi les valeurs des paramètres S_0, K, R, T, σ, et n, le prix d'un call américain et le comparer à celui du call européen de mêmes paramètres.
2. Même exercice pour un put : on examinera successivement le cas $R > 1$ et le cas $R = 1$.
3. On considère à présent le cas d'un put américain avec $R > 1$. Sur l'arbre binaire représentant les trajectoires de l'actif sous-jacent, représenter les noeuds en deux couleurs différentes selon que le Max de la formule de récurence est égal à P_t ou à $\frac{1}{R}\mathbb{E}_t(U_{t+\delta t})$. On obtient ainsi deux régions séparée par la "frontière d'exercice". On pourra prendre $n = 20$. Pour rendre plus lisible cette frontière d'exercice sur le dessin, on pourra choisir de ne pas représenter toutes les arètes de l'arbre mais seulement les noeuds et se borner à ne tracer que la "partie basse" de l'arbre (par exemple en se limitant aux noeuds pour lesquels $S \leq 300$). Examiner comment varie la frontière d'exercice si l'on fait varier les différents paramètres.
4. Ecrire un algorithme permettant de calculer à chaque instant la composition du portefeuille de couverture d'un put américain en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.