Université de Nice
ESSI

Année 2004-2005
DESS IMAFA

Fiche de TP 6 :
Modèle d'arbre pour les produits de taux

Jusqu'ici nous n'avons considéré que le taux d'intérêt pour toute date est connu et constant. Sur plusieurs années, ceci est une simplification peu réaliste : si je sais que je peux emprunter sur un an au taux r_0, je ne peux pas être sûr qu'il en sera encore ainsi l'an prochain : les taux d'intérêts sont aléatoires. Nous abordons ici un modèle très simple et nous l'appliquons au problème du pricing d'un zéro-coupon de maturité k et au calcul de la courbe de taux et de ses variations.

I. Un modèle de taux aléatoire

De manière à être concrets, considérons que l'intervalle de temps δt est une année. Le modèle que nous considérons est à nouveau un modèle d'arbre : si à l'année `i` le taux est `r` le taux annuel l'année `i+1` sera `r*upr` ou `r*downr`. Comme d'habitude nous désignons par `j` le nombre de `upr` intervenus avant `i` ; nous choisissons `r0=0.07`, `upr=1.3` et `downr=0.9`.

1. Définir la procédure `r(i,j)` donnant la valeur du taux l'année `i` lorsqu'il y a eu `j upr`.
2. Repésenter pour `i=0..15` l'arbre des valeurs possibles des taux annuels.

II. Valeur présente $P_0(k)$ = `P(0,0,k)` d'un zéro coupon d'échéance k.

Soit V_i la valeur l'année i d'un produit sur taux. Le modèle probabiliste risque-neutre consiste à donner la même probabilité à `upr` et `downr` (donc égale à 0.5) et à demander l'indépendance de ces variations successives. On pose alors $V_i = \frac{1}{1+r_i}\mathbb{E}(V_{i+1}|r_i)$ et donc

`V(i,j)=0.5*(V(i+1,j)+V(i+1,j+1))/(1+r(i,j))`

On appelle *zéro-coupon d'échéance* k un placement qui vaudra 1 à la date $i = k$.

1. Définir par récurrence descendante une procédure `P(i,j,k)` donnant les valeurs à la date `i` d'un zéro-coupon d'échéance `k`.
2. Calculez `P(0,0,4)` ; que signifie ce résultat ?

III. Courbe des taux associée au modèle

On appel taux actuariel d'un prêt de durée k le taux s_k constant équivalent correspondant à la rémunération d'un zéro-coupon d'échéance k dont la valeur $P_0(k)$ à la date présente est donnée par `P(0,0,k)` :

$$\frac{1}{(1+s_k)^k} = P_0(k).$$

1. Définir une procédure `TauxActuariel(r0,k)` donnant la valeur du taux actuariel d'un prêt de durée `k`, où `r0` est un paramètre représentant le taux annuel présent (redéfinir la procédure `P` de manière à la faire dépendre du paramètre `r0`, `P(r0,i,j,k)`).
2. Représenter la *courbe des taux* sur 50 ans `l :=[[k,'TauxActuariel'(r0,k)] $k=1..50]`
3. Comment évolue cette courbe lorsque le taux varie de `r0=r(0,0)` à `r(i,j)` pour `i=1` puis `2` ? (Représenter ces différenres courbes de taux sur un même dessin, par une commande du type `plot([courbe1,courbe2,courbe3],style=point,symbol=circle);`)