Université de Nice, Année 2006-2007 NOM : .
Département de Mathématiques, LICENCE MP, 2e année Prénom : .

Probabilités
Examen Final - Session de Juin 2007
Mercredi 9 mai 2007
8 :00 - 11 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 ((6 points)) 1. Quelle est la densité f_X d'une v.a. X suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de paramètre $\lambda > 0$?

$f_X(x) =$

2. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_X(t)$ d'une telle v.a. X ?

$M_X(t)$

3. On rappelle qu'on dit qu'une v.a. discrète $K \in \{1, 2, \dots, k, \dots\}$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in [0,1]$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(\{K = k\}) = p(1-p)^{k-1}$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_K(t)$ d'une v.a. $K \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ pour tout $q \in]-1, 1[$.

$M_K(t)$

4. Pour tout $n \geq 1$ on considère une v.a. $T_n \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_n)$, avec $p_n = \frac{a}{n}$, où $a > 0$ est un réel fixé ; on pose $S_n := \frac{1}{n} T_n$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_{S_n}(t)$ de S_n.

M_{S_n}

5. Montrer que $\lim_{n\mapsto\infty} M_{S_n}(t) = \frac{a}{a-t}$. **Indication :** $e^x = 1 + x(1+\varepsilon(x))$, où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

6. Montrer que la suite de v.a. S_n converge en loi vers une v.a. $\overline{S}$ et préciser la loi de $\overline{S}$.

$\overline{S} \rightsquigarrow$

Exercice 2 ((4 points)) On pose $f(x) := cx^{\theta}\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $\theta > -1$ un paramètre inconnu.

1. La fonction f est une densité de probabilité. Que vaut c ?

$c =$

2. Soit X de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$\mathbb{E}(X) =$

3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ le résultat de n tirages indépendants de loi de densité f. Quelle est la vraissemblance $L(\theta)$ de cet échantillon ?

$L(\theta) =$

4. Calculer la valeur θ^* de θ où la log-vraissemblance $l(\theta)$ de cet échantillon est maximale.

$l(\theta) =$

$\theta^* =$

5. Quel est l'estimateur au maximum de vraissemblance $\hat{\theta}$ du paramètre θ ?

$\hat{\theta} =$

Exercice 3 ((3 points)) 1. Soit Z une v.a. normale centrée réduite. Déterminer au moyen de la table ci-dessous la probabilité de l'évènement $\{Z \leq -1.94\}$.

$\mathbb{P}(\{Z \leq -1.94\}) =$

2. Même question pour l'évènement $\{-1.94 \leq Z \leq 3.87\}$

$\mathbb{P}(\{-1.93 \leq Z \leq 3.87\}) =$

3. Soit S une v.a. normale, d'espérance 80 et écart-type $\sqrt{80/3} \simeq 5.16$. Quelle est la probabilité de l'évènement $\{70 \leq S \leq 100\}$?

$\mathbb{P}(\{70 \leq S \leq 100\}) =$

Exercice 4 ((7 points)) Une agence de voyage est chargée d'organiser une excursion en bus pour les 120 passagers d'un bateau faisant escale en bais de Villefranche. Elle offre deux options : l'option A est une visite de Monaco et de son musée océanographique, et l'option B est une visite de Nice et de son musée d'Art Moderne et Art Contemporain. L'option A a, par le passé, attiré les deux-tiers des visiteurs et l'aternative B le tiers des visiteurs. On numérote par i allant de 1 à 120 les passagers et on note $X_i = 1$ pour "le passager i choisit l'option A" et $X_i = 0$ s'il choisit B (nb : on ne lui laisse pas d'autre choix).

1. Donner un modèle probabiliste simple et convaincant correspondant à cette situation ; jusifiez vos choix ; précisez les hypothèses que vous serez ammenés à utiliser par la suite.

$X_i \rightsquigarrow$

2. L'agence utilise 3 autobus de 50 places pour cette excursion ; 2 pour l'option A et 1 pour l'option B. Quelle contrainte doit satisfaire $S_{120} := \sum_{i=1}^{120} X_i$ pour que tous les passagers puissent participer à l'excursion de leur choix ?

$S_{120} \in$

3. Ramener ce problème à celui d'une v.a. Z_{120} centrée et réduite.

$Z_{120} :=$

Z_{120} doit satisfaire à :

4. Vous aurez choisi Z_{120} de manière à ce que sa loi soit proche de celle d'une v.a. Z normale. Quel théorème appliquez vous ? (nom et explications) :

5. Quelle est la probabilité que tous les passagers puissent participer à l'excursion de leur choix ?

Réponse :

Loi Normale N(0,1)

Probabilité que X soit inférieure à u1+u2

u1\u2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000000	0,5039894	0,5079784	0,5119665	0,5159535	0,5199389	0,5239223	0,5279032	0,5318814	0,5358565
0,1	0,5398279	0,5437954	0,5477585	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831661	0,5870644	0,5909541	0,5948348	0,5987063	0,6025681	0,6064198	0,6102612	0,6140918
0,3	0,6179114	0,6217195	0,6255158	0,6293000	0,6330717	0,6368306	0,6405764	0,6443087	0,6480272	0,6517317
0,4	0,6554217	0,6590970	0,6627572	0,6664021	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	0,6914625	0,6949743	0,6984682	0,7019441	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7257469	0,7290692	0,7323712	0,7356528	0,7389138	0,7421540	0,7453732	0,7485712	0,7517478	0,7549030
0,7	0,7580364	0,7611480	0,7642376	0,7673050	0,7703501	0,7733727	0,7763728	0,7793501	0,7823046	0,7852362
0,8	0,7881447	0,7910300	0,7938920	0,7967307	0,7995459	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105704	0,8132671
0,9	0,8159399	0,8185888	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1,0	0,8413447	0,8437523	0,8461358	0,8484950	0,8508300	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8643339	0,8665004	0,8686431	0,8707618	0,8728568	0,8749280	0,8769755	0,8789995	0,8809998	0,8829767
1,2	0,8849303	0,8868605	0,8887675	0,8906514	0,8925122	0,8943502	0,8961653	0,8979576	0,8997274	0,9014746
1,3	0,9031995	0,9049020	0,9065824	0,9082408	0,9098773	0,9114919	0,9130850	0,9146565	0,9162066	0,9177355
1,4	0,9192433	0,9207301	0,9221961	0,9236414	0,9250663	0,9264707	0,9278549	0,9292191	0,9305633	0,9318879
1,5	0,9331928	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406200	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9452007	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535214	0,9544861
1,7	0,9554346	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599409	0,9607961	0,9616365	0,9624621	0,9632731
1,8	0,9640697	0,9648522	0,9656206	0,9663751	0,9671159	0,9678433	0,9685573	0,9692582	0,9699460	0,9706211
1,9	0,9712835	0,9719335	0,9725711	0,9731967	0,9738102	0,9744120	0,9750022	0,9755809	0,9761483	0,9767046
2,0	0,9772499	0,9777845	0,9783084	0,9788218	0,9793249	0,9798179	0,9803008	0,9807739	0,9812373	0,9816912
2,1	0,9821356	0,9825709	0,9829970	0,9834143	0,9838227	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9860966	0,9864475	0,9867907	0,9871263	0,9874546	0,9877756	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889894
2,3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903582	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9937903	0,9939634	0,9941322	0,9942969	0,9944574	0,9946138	0,9947664	0,9949150	0,9950600	0,9952012
2,6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957307	0,9958547	0,9959754	0,9960929	0,9962074	0,9963188	0,9964274
2,7	0,9965330	0,9966358	0,9967359	0,9968332	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971971	0,9972820	0,9973645
2,8	0,9974448	0,9975229	0,9975988	0,9976725	0,9977443	0,9978140	0,9978817	0,9979476	0,9980116	0,9980737
2,9	0,9981341	0,9981928	0,9982498	0,9983051	0,9983589	0,9984111	0,9984617	0,9985109	0,9985587	0,9986050
3,0	0,9986500	0,9986937	0,9987361	0,9987772	0,9988170	0,9988557	0,9988932	0,9989296	0,9989649	0,9989991
3,1	0,9990323	0,9990645	0,9990957	0,9991259	0,9991552	0,9991836	0,9992111	0,9992377	0,9992636	0,9992886
3,2	0,9993128	0,9993363	0,9993590	0,9993810	0,9994023	0,9994229	0,9994429	0,9994622	0,9994809	0,9994990
3,3	0,9995165	0,9995335	0,9995499	0,9995657	0,9995811	0,9995959	0,9996102	0,9996241	0,9996375	0,9996505
3,4	0,9996630	0,9996751	0,9996868	0,9996982	0,9997091	0,9997197	0,9997299	0,9997397	0,9997492	0,9997584
3,5	0,9997673	0,9997759	0,9997842	0,9997922	0,9997999	0,9998073	0,9998145	0,9998215	0,9998282	0,9998346
3,6	0,9998409	0,9998469	0,9998527	0,9998583	0,9998636	0,9998688	0,9998739	0,9998787	0,9998834	0,9998878
3,7	0,9998922	0,9998963	0,9999004	0,9999042	0,9999080	0,9999116	0,9999150	0,9999184	0,9999216	0,9999247
3,8	0,9999276	0,9999305	0,9999333	0,9999359	0,9999385	0,9999409	0,9999433	0,9999456	0,9999478	0,9999499
3,9	0,9999519	0,9999538	0,9999557	0,9999575	0,9999592	0,9999609	0,9999625	0,9999640	0,9999655	0,9999669
4,0	0,9999683	0,9999696	0,9999709	0,9999721	0,9999733	0,9999744	0,9999755	0,9999765	0,9999775	0,9999784
4,1	0,9999793	0,9999802	0,9999810	0,9999819	0,9999826	0,9999834	0,9999841	0,9999848	0,9999854	0,9999860
4,2	0,9999866	0,9999872	0,9999878	0,9999883	0,9999888	0,9999893	0,9999898	0,9999902	0,9999906	0,9999911
4,3	0,9999915	0,9999918	0,9999922	0,9999925	0,9999929	0,9999932	0,9999935	0,9999938	0,9999941	0,9999943
4,4	0,9999946	0,9999948	0,9999951	0,9999953	0,9999955	0,9999957	0,9999959	0,9999961	0,9999963	0,9999964
4,5	0,9999966	0,9999968	0,9999969	0,9999970	0,9999972	0,9999973	0,9999974	0,9999976	0,9999977	0,9999978
4,6	0,9999979	0,9999980	0,9999981	0,9999982	0,9999983	0,9999983	0,9999984	0,9999985	0,9999986	0,9999986
4,7	0,9999987	0,9999988	0,9999988	0,9999989	0,9999989	0,9999990	0,9999990	0,9999991	0,9999991	0,9999992
4,8	0,9999992	0,9999992	0,9999993	0,9999993	0,9999993	0,9999994	0,9999994	0,9999994	0,9999995	0,9999995
4,9	0,9999995	0,9999995	0,9999996	0,9999996	0,9999996	0,9999996	0,9999996	0,9999997	0,9999997	0,9999997
5,0	0,9999997	0,9999997	0,9999997	0,9999998	0,9999998	0,9999998	0,9999998	0,9999998	0,9999998	0,9999998