Université de Nice, Année 2007-2008 NOM : .
Département de Mathématiques, LICENCE MP, 2e année Prénom : .

Probabilités
Contrôle Continu Final - Session de Mai 2008
Mardi 20 mai 2007
13 :00 - 15 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 ((5 points)) Soient X et Y deux v.a. de même loi, de fonction de répartion F_X et F_Y, avec $F_X(x) := \frac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Calculer la densité f_X de X.

$f_X(x) =$

2. Montrer que $f_X(-x) = f_X(x)$; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

$\mathbb{E}(X) =$

3. On suppose que les v.a. sont couplées par la copule $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$. Calculer la fonction de répartition F_Z du vecteur aléatoire $Z := (X, Y)$.

$F_Z(x, y) =$

4. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Calculer la densité f_Z du vecteur aléatoire Z.

$f_Z(x, y) =$

Exercice 2 ((10 points)) Soit $(X_i)_{i=1,2,\ldots}$ et $(Y_i)_{i=1,2,\ldots}$ deux suites de v.a., avec $X_i = \frac{\theta}{\sqrt{i}} + \sigma Y_i$, où θ et σ sont des nombres positifs.

1. On suppose que les v.a. Y_i sont centrées-réduites (c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ et $Var(Y_i) = 1$). Déterminer $\mu_i := \mathbb{E}(X_i)$, $Var(X_i)$ et $\sigma_i := \sqrt{Var(X_i)}$.

$\mu_i := \mathbb{E}(X_i) =$	$Var(X_i) =$	$\sigma_i := \sqrt{Var(X_i)} =$

2. On suppose dorénavant que les Y_i suivent une loi normale. Quelle est la loi de X_i ? Indiquer sa densité f_{X_i} ?

$X_i \rightsquigarrow$	$f_{X_i}(x) =$

3. Montrer que la vraissemblance L de l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$ est égale à

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta,\sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\theta}{\sqrt{i}}\right)^2\right)$$

4. Calculer la log-vraissemblance l de cet échantillon

$l(x_1,\ldots,x_n,\theta,\sigma) =$

5. Pour $x_1,\ldots,x_n,\sigma$ fixés trouver le maximum θ^* de la fonction $\theta \mapsto \varphi(\theta) := l(x_1,\ldots,x_n,\theta,\sigma)$ et vérifier que $\theta^* = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}$, où $s_n := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

$\theta^*(x_1,\ldots,x_n) =$

6. Donner l'estimateur au maximum de vraissemblance $\hat{\theta}_n$ de θ pour l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$.

$\hat{\theta}_n =$

7. Calculer $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n)$. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il biaisé ?

$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) =$	L'estimateur $\hat{\theta}_n$ biaisé.

8. Calculer $\mathrm{Var}\,(\hat{\theta}_n)$

$\mathrm{Var}\,(\hat{\theta}_n) =$

9. Calculer $\|\hat{\theta}_n - \theta\|_{L_2}^2$. En déduire que l'estimateur $\hat{\theta}_n$ converge vers θ ; on rappelle que la série harmonique diverge : $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

$\|\hat{\theta}_n - \theta\|_{L_2}^2 =$

Exercice 3 (5 points) Peanuts

1. Soit U une v.a. normale d'espérance 100 et écart-type 2 ; écrire U sous la forme $U = a + bZ$, où Z est une v.a. normale centrée-réduite et trouver deux nombre z^- et z^+ tels que

$$\{U \in]u^-, u^+]\} = \{Z \in]z^-, z^+]\} \text{ , où } u^- = 101 \text{ et } u^+ = 103$$

$U =$	$z^- =$	$z^+ =$

2. A l'aide de la table fournie calculer probabilité $p := \mathbb{P}(\{U \in]u^-, u^+]\})$

$p := \mathbb{P}(\{U \in]101, 103]\} =$

Soit $(U_k)_{k=1..1000}$ un 1000-échantillon de $\mathcal{N}(100, 2)$; quel est l'effectif théorique t_4 de la classe $\mathcal{V}_4 =]101, 103]$?

$t_4 =$

3. Quel est l'effectif théorique t_5 de la classe $\mathcal{V}_5 =]103, +\infty[$?

$t_5 =$

4. Quels sont les effectifs théoriques t_1 et t_2 des classes $\mathcal{V}_1 =]-\infty, 97]$, $\mathcal{V}_2 =]97, 99]$?

$t_1 =$	$t_2 =$

Quel est l'effectif théorique t_3 de la classe $\mathcal{V}_3 =]99, 101]$?

$t_3 =$

5. Un dispositif est conçu pour emballer des cacaouettes en paquets de 100g. On suppose que le poids des paquets produits suivent une loi $\mathcal{N}(100, 2)$. Sur 1000 paquets produits on a observé les effectifs suivants pour ces mêmesclasses $\mathcal{V}_1 =]-\infty, 97]$, $\mathcal{V}_2 =]97, 99]$, $\mathcal{V}_3 =]99, 101]$, $\mathcal{V}_4 =]101, 103]$, $\mathcal{V}_5 =]103, +\infty[$, les effectifs respectifs suivants : 73, 235, 391, 233, 68.
Au moyen d'un test du χ^2, convient-il de confirmer ou rejeter cette hypothèse, au seuil $\alpha = 10\%$?

Votre statistique : $\chi^* =$	Il convient donc l'hypothèse

Loi Normale : probabilité que $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ soit inférieure à $u_1 + u_2$.

u1\u2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000000	0,5039894	0,5079784	0,5119665	0,5159535	0,5199389	0,5239223	0,5279032	0,5318814	0,5358565
0,1	0,5398279	0,5437954	0,5477585	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831661	0,5870644	0,5909541	0,5948348	0,5987063	0,6025681	0,6064198	0,6102612	0,6140918
0,3	0,6179114	0,6217195	0,6255158	0,6293000	0,6330717	0,6368306	0,6405764	0,6443087	0,6480272	0,6517317
0,4	0,6554217	0,6590970	0,6627572	0,6664021	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	0,6914625	0,6949743	0,6984682	0,7019441	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7257469	0,7290692	0,7323712	0,7356528	0,7389138	0,7421540	0,7453732	0,7485712	0,7517478	0,7549030
0,7	0,7580364	0,7611480	0,7642376	0,7673050	0,7703501	0,7733727	0,7763728	0,7793501	0,7823046	0,7852362
0,8	0,7881447	0,7910300	0,7938920	0,7967307	0,7995459	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105704	0,8132671
0,9	0,8159399	0,8185888	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1,0	0,8413447	0,8437523	0,8461358	0,8484950	0,8508300	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8643339	0,8665004	0,8686431	0,8707618	0,8728568	0,8749280	0,8769755	0,8789995	0,8809998	0,8829767
1,2	0,8849303	0,8868605	0,8887675	0,8906514	0,8925122	0,8943502	0,8961653	0,8979576	0,8997274	0,9014746
1,3	0,9031995	0,9049020	0,9065824	0,9082408	0,9098773	0,9114919	0,9130850	0,9146565	0,9162066	0,9177355
1,4	0,9192433	0,9207301	0,9221961	0,9236414	0,9250663	0,9264707	0,9278549	0,9292191	0,9305633	0,9318879
1,5	0,9331928	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406200	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9452007	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535214	0,9544861
1,7	0,9554346	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599409	0,9607961	0,9616365	0,9624621	0,9632731
1,8	0,9640697	0,9648522	0,9656206	0,9663751	0,9671159	0,9678433	0,9685573	0,9692582	0,9699460	0,9706211
1,9	0,9712835	0,9719335	0,9725711	0,9731967	0,9738102	0,9744120	0,9750022	0,9755809	0,9761483	0,9767046
2,0	0,9772499	0,9777845	0,9783084	0,9788218	0,9793249	0,9798179	0,9803008	0,9807739	0,9812373	0,9816912
2,1	0,9821356	0,9825709	0,9829970	0,9834143	0,9838227	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9860966	0,9864475	0,9867907	0,9871263	0,9874546	0,9877756	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889894
2,3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903582	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9937903	0,9939634	0,9941322	0,9942969	0,9944574	0,9946138	0,9947664	0,9949150	0,9950600	0,9952012
2,6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957307	0,9958547	0,9959754	0,9960929	0,9962074	0,9963188	0,9964274
2,7	0,9965330	0,9966358	0,9967359	0,9968332	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971971	0,9972820	0,9973645
2,8	0,9974448	0,9975229	0,9975988	0,9976725	0,9977443	0,9978140	0,9978817	0,9979476	0,9980116	0,9980737
2,9	0,9981341	0,9981928	0,9982498	0,9983051	0,9983589	0,9984111	0,9984617	0,9985109	0,9985587	0,9986050
3,0	0,9986500	0,9986937	0,9987361	0,9987772	0,9988170	0,9988557	0,9988932	0,9989296	0,9989649	0,9989991
3,1	0,9990323	0,9990645	0,9990957	0,9991259	0,9991552	0,9991836	0,9992111	0,9992377	0,9992636	0,9992886

Lois du Chi-deux : Les lignes correspondent au nombre de degrés de liberté, entre 1 et 9. Chaque colonne correspond à une même probabilité d'être supérieur à la valeur indiquée dans le tableau.

	0,99	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,0001571	0,0039322	0,0157907	0,1015311	0,4549362	1,3233042	2,7055406	3,8414553	5,0239026	6,6348913
2	0,0201004	0,1025862	0,2107208	0,5753639	1,3862936	2,7725904	4,6051761	5,9914764	7,3777791	9,2103510
3	0,1148316	0,3518460	0,5843755	1,2125321	2,3659727	4,1083421	6,2513945	7,8147247	9,3484040	11,3448821
4	0,2971068	0,7107241	1,0636243	1,9225580	3,3566947	5,3852661	7,7794340	9,4877285	11,1432620	13,2766986
5	0,5542969	1,1454773	1,6103091	2,6746042	4,3514587	6,6256784	9,2363491	11,0704826	12,8324920	15,0863174
6	0,8720833	1,6353805	2,2041303	3,4545975	5,3481190	7,8408057	10,6446375	12,5915774	14,4493550	16,8118718
7	1,2390317	2,1673492	2,8331052	4,2548522	6,3458093	9,0371459	12,0170314	14,0671273	16,0127737	18,4753241
8	1,6465062	2,7326326	3,4895374	5,0706416	7,3441201	10,2188538	13,3615619	15,5073125	17,5345446	20,0901592
9	2,0878894	3,3251151	4,1681557	5,8988229	8,3428320	11,3887495	14,6836632	16,9189602	19,0227776	21,6660476