Université de Nice, Année 2006-2007 NOM : .
Département de Mathématiques, LICENCE MP, 2e année Prénom : .

Probabilités
Examen Final - Session de Juin 2007
Mardi 9 mai 2007
8 :00 - 11 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 ((6 points)) 1. Quelle est la densité f_X d'une v.a. X suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de paramètre $\lambda > 0$?

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)}$$

2. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_X(t)$ d'une telle v.a. X ?

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_{x=0}^{+\infty}$$ il faut donc supposer $t-\lambda < 0$ c'est-à-dire $t < \lambda$

$$= \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\boxed{M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}}$$

3. On rappelle qu'on dit qu'une v.a. discrète $K \in \{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in [0, 1]$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(\{K = k\}) = p(1-p)^{k-1}$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_K(t)$ d'une v.a. $K \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. On rappelle que $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ pour tout $q \in]-1, 1[$.

$$M_K(t) = \mathbb{E}(e^{tK}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)e^t\right)^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} = \frac{p e^t}{1-(1-p)e^t}$$ il faut supposer $|(1-p)e^t| < 1$

$$\boxed{M_K(t) = \frac{p e^t}{1-(1-p)e^t}}$$

4. Pour tout $n \geq 1$ on considère une v.a. $T_n \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_n)$, avec $p_n = \frac{a}{n}$, où $a > 0$ est un réel fixé ; on pose $S_n := \frac{1}{n} T_n$. Calculer la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_{S_n}(t)$ de S_n.

$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t \frac{1}{n} T_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{n} T_n}\right) = M_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right),$$ avec $T_n \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{a}{n}\right)$

donc $$M_{S_n}(t) = M_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right) e^{\frac{t}{n}}}$$

$$\boxed{M_{S_n} = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right) e^{\frac{t}{n}}}}$$

5. Montrer que $\lim_{n\to\infty} M_{S_n}(t) = \frac{a}{a-t}$. **Indication :** $e^x = 1 + x(1+\varepsilon(x))$, où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$$M_{S_n}(t) = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{1-(1-\frac{a}{n})(1+\frac{t}{n}(1+\varepsilon(x)))} = \frac{\frac{a}{n} e^{\frac{t}{n}}}{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{n}(a-t(1+\varepsilon(x))-\frac{at}{n}(1+\varepsilon(x)))}$$

$$= \frac{ae^{\frac{t}{n}}}{a-t(1+\varepsilon(x))-\frac{at}{n}(1+\varepsilon(x))} \rightarrow \frac{ae^0}{a-t(1+0)-0(1+0)} = \frac{a}{a-t}$$

6. Montrer que la suite de v.a. S_n converge en loi vers une v.a. $\overline{S}$ et préciser la loi de $\overline{S}$.

Nous venons de montrer que $M_{S_n}(t) \longrightarrow M_{\overline{S}}(t)$ où $\overline{S} \sim \mathcal{E}(a)$. Ceci implique que $S_n = \frac{1}{n}T_n$ converge en loi vers $\overline{S} \sim \mathcal{E}(a)$

$\overline{S} \sim$ $\mathcal{E}(a)$

Exercice 2 ((**4 points**)) On pose $f(x) := cx^\theta \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $\theta > -1$ un paramètre inconnu.

1. La fonction f est une densité de probabilité. Que vaut c ?

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 c x^\theta dx = \left[\frac{cx^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_{x=0}^1 = \frac{c}{\theta+1}$$

$c =$ $\theta+1$

2. Soit X de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x c x^\theta dx = c\int_0^1 x^{\theta+1} dx = c\left[\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_{x=0}^1$$

$\mathbb{E}(X) =$ $\frac{\theta+1}{\theta+2}$

3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ le résultat de n tirages indépendants de loi de densité f. Quelle est la vraissemblance $L(\theta)$ de cet échantillon ?

$L(\theta) = c x_1^\theta \cdot c x_2^\theta \cdot \ldots \cdot c x_n^\theta$

$L(\theta) =$ $(\theta+1)^n (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^\theta$

4. Calculer la valeur θ^* de θ où la log-vraissemblance $l(\theta)$ de cet échantillon est maximale.

$l(\theta) = \ln(L(\theta))$

$l(\theta) =$ $n \ln(\theta+1) + \theta \ln(x_1 \ldots x_n)$

θ^* maximum de $l(\theta) \Rightarrow l'(\theta^*) = 0$ or.

$$0 = l'(\theta) = \frac{n}{\theta+1} + \ln(x_1 \ldots x_n) \Leftrightarrow \theta+1 = -\frac{n}{\ln(x_1 \ldots x_n)} \Leftrightarrow \theta = -\frac{n}{\ln(x_1\ldots x_n)} - 1$$

$\theta^* =$ $-\frac{n}{\ln(x_1 \ldots x_n)} - 1$

5. Quel est l'estimateur au maximum de vraissemblance $\hat{\theta}$ du paramètre θ ?

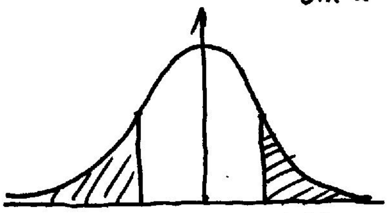
$\hat{\theta} =$ $-\frac{n}{\ln(X_1 \cdots X_n)} - 1$

Exercice 3 ((3 points)) 1. Soit Z une v.a. normale centrée réduite. Déterminer au moyen de la table ci-dessous la probabilité de l'évènement $\{Z \le -1.94\}$.

On a $\mathbb{P}(\{Z \le -1.94\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z \le +1.94\})$

$= 1 - 0.9738102$

$= 0.0261898$



-1.93 $+1.93$

$\mathbb{P}(\{Z \le -1.94\}) =$ 2.6 .. %

2. Même question pour l'évènement $\{-1.94 \le Z \le 3.87\}$

$\mathbb{P}(\{Z \in [-1.94, 3.87]\}) = \mathbb{P}(\{Z \le 3.87\}) - \mathbb{P}(\{Z \le -1.94\})$

$= 0.99994.. - 0.0262.. = 0.9737..$

$\mathbb{P}(\{-1.93 \le Z \le 3.87\}) =$ 97,37..%

3. Soit S une v.a. normale, d'espérance 80 et écart-type $\sqrt{80/3} \simeq 5.16$. Quelle est la probabilité de l'évènement $\{70 \le S \le 100\}$?

$\mathbb{P}(\{70 \le S \le 100\}) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{70-\mathbb{E}S}{\sigma(S)} \le \frac{S-\mathbb{E}S}{\sigma(S)} \le \frac{100-\mathbb{E}S}{\sigma(S)}\right\}\right)$

$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{-10}{\sqrt{80/3}} \le Z \le \frac{20}{\sqrt{80/3}}\right\}\right)$ où $Z := \frac{S-\mathbb{E}S}{\sigma(S)} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= \mathbb{P}(\{-1.94.. \le Z \le +3.87\}) = 97,37\%$ (question 3.2)

$\mathbb{P}(\{70 \le S \le 100\}) =$ 97,37..%

Exercice 4 ((7 points)) Une agence de voyage est chargée d'organiser une excursion en bus pour les 120 passagers d'un bateau faisant escale en bais de Villefranche. Elle offre deux options : l'option A est une visite de Monaco et de son musée océanographique, et l'option B est une visite de Nice et de son musée d'Art Moderne et Art Contemporain. L'option A a, par le passé, attiré les deux-tiers des visiteurs et l'aternative B le tiers des visiteurs. On numérote par i allant de 1 à 120 les passagers et on note $X_i = 1$ pour "le passager i choisit l'option A" et $X_i = 0$ s'il choisit B (nb : on ne lui laisse pas d'autre choix).

1. Donner un modèle probabiliste simple et convaincant correspondant à cette situation ; jusifiez vos choix ; précisez les hypothèses que vous serez ammenés à utiliser par la suite.

Nous modelisons les X_i par des <u>variables aléatoires</u>.
Pour la simplicité nous supposons les X_i <u>i.i.d.</u> (indépendantes, identiqu^t distribuées)
Comme les X_i ne prennent que les valeurs 0 et 1, ce son^t des v.a. de Bernoulli
$X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$
Si l'on fait la même hypothèse pour les situations passées, la
<u>Loi des Grands nombres</u> nous conduit à poser $p = \frac{2}{3}$ ("..A.. a attiré les deux-tiers")

$X_i \sim$ $\mathcal{B}(1,p)$, (X_i) sont i.i.d , $p = \frac{2}{3}$

2. L'agence utilise 3 autobus de 50 places pour cette excursion ; 2 pour l'option A et 1 pour l'option B. Quelle contrainte doit satisfaire $S_{120} := \sum_{i=1}^{120} X_i$ pour que tous les passagers puissent participer à l'excursion de leur choix ?

Pour que 2 autobus suffisent pour l'option A, il faut que $S_{120} \leq 100$

Pour qu'un autobus suffise pour l'option B, il faut qu'au moins 120-50 personnes choisissent l'option A, et donc $S_{120} \geq 70$

Finalement $S_{120} \in [70, 100]$

3. Ramener ce problème à celui d'une v.a. Z_{120} centrée et réduite.

Pour centrer la v.a. S_{120} il suffit de lui soustraire son espérance.

or $\mathbb{E}(S_{120}) = \mathbb{E}(\sum_1^{120} X_i) = 120\, \mathbb{E}(X_1) = 120 \cdot p = 120 \cdot 2/3 = 80$

Pour réduire S_{120} (ou $S_{120} - 80$) il suffit de la diviser par son écart-type σ^2

or $\sigma^2 = Var(S_{120}) = Var(\sum_1^{120} X_i) \overset{\perp\!\!\!\perp X_i}{=} \sum_1^{120} Var(X_i) = 120 \cdot p(1-p) = 80/3$

$\{S_{120} \in [70, 100]\} = \{\frac{S_{120} - 80}{\sqrt{80/3}} \in [\frac{70-80}{\sqrt{80/3}}, \frac{100-80}{\sqrt{80/3}}]$

$Z_{120} := \frac{S_{120} - 80}{\sqrt{80/3}}$

Z_{120} doit satisfaire à : $Z_{120} \in [\frac{-10}{\sqrt{80/3}}, \frac{+20}{\sqrt{80/3}}] = [-1.94.., +3.87..]$

4. Vous aurez choisi Z_{120} de manière à ce que sa loi soit proche de celle d'une v.a. Z normale. Quel théorème appliquez vous ? (nom et explications) :

On applique le Théorème Limite Central.

Il s'applique bien puisque nous avons supposé les X_i i.i.d.

$Var\, X_i = \sigma^2 = p(1-p) = 2/9$

On sait donc que $Z_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mathbb{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Donc, pour n assez grand (ici $n = 120$) $\mathbb{P}(\{Z_n \in [a,b]\}) \simeq \mathbb{P}(\{Z \in [a,b]\})$.

5. Quelle est la probabilité que tous les passagers puissent participer à l'excursion de leur choix ?

Nous assimilons la loi de Z_{120} à celle de $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Nous avons vu que le problème revient à $Z_{120} \in [-1.94, 3.87]$

$\mathbb{P}(\{Z_{120} \in [-1.94, +3.87]) \simeq \mathbb{P}(\{Z \in [-1.94, +3.87]\}) = 97,37..\%$

(question 3.2)

Probabilité que tous les passagers puissent participer à l'excursion de leur choix est donc

Réponse : 97,37%