Corrigé

Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence MASS 2e année

Probabilités et Statistique
Contrôle Continu Final
Mercredi 14 décembre 2011
13 :00 - 15 :00

Calculatrice autorisée. Document autorisé : une feuille A4 (recto-verso) écrite de votre main

Exercice 1 (7 points)) On pose $f(x) := cx^{\theta}\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $\theta > 0$ un paramètre.

1. La fonction f est une densité de probabilité. Que vaut c ?

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = c\int_0^1 x^{\theta}\,dx = c\left[\frac{1}{\theta+1}x^{\theta+1}\right]_{x=0}^{1} = \frac{c}{\theta+1}$$

donc $c = \theta+1$

$c = \theta+1$

2. Soit X de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = (\theta+1)\int_0^1 x\,x^{\theta}\,dx = (\theta+1)\left[\frac{1}{\theta+2}x^{\theta+2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

3. Calculer $\mathrm{Var}\,(X)$. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$ (Huygens)

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+2}\,dx = (\theta+1)\left[\frac{1}{\theta+3}x^{\theta+3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\theta+1}{\theta+3}$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\theta+1}{\theta+3} - \dfrac{(\theta+1)^2}{(\theta+2)^2} = \dfrac{(\theta+1)\left((\theta+2)^2 - (\theta+1)(\theta+3)\right)}{(\theta+3)(\theta+2)^2} = \dfrac{(\theta+1)(\theta^2+4\theta+4-\theta^2-\theta-3\theta-3)}{(\theta+3)(\theta+2)^2}$

$\mathrm{Var}\,(X) = \dfrac{\theta+1}{(\theta+3)(\theta+2)^2}$

4. Calculer la valeur $F_X(x_0) := \mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$ de la fonction de répartition de X au point x_0, si $x_0 \in [0,1]$.

Si $x_0 \in [0,1]$ $F_X(x_0) = \mathbb{P}(\{X \leq x_0\}) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx \overset{x_0\in[0,1]}{=} \int_0^{x_0} (\theta+1)x^{\theta}\,dx = (\theta+1)\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_{x=0}^{x=x_0}$

$= x_0^{\theta+1}$

Si $x_0 \in [0,1]$, $F_X(x_0) = x_0^{\theta+1}$

5. On dit que x_0 est la *médiane* de la v.a. X si et seulement si $\mathbb{P}\{X \le x_0\} = \frac{1}{2}$. Calculer la médiane x_0 de X.

Si $x_0 \le 0$ $\mathbb{P}(\{X \le x_0\}) = 0 \ne \frac{1}{2}$; si $x_0 \ge 1$ $\mathbb{P}(\{X \le x_0\}) = 1 \ne \frac{1}{2}$

Donc $x_0 \in [0,1]$; donc $\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{X \le x_0\}) = F_X(x_0) = x_0^{\theta+1} \iff x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\theta+1}}$

$\boxed{x_0 = \frac{1}{2^{\frac{1}{\theta+1}}}}$

6. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer sa fonction de répartition $F_Y(y_0) := \mathbb{P}(\{\frac{1}{X} \le y_0\}$; commencer par le cas $y_0 < 1$ puis traiter le cas $y_0 \ge 1$.

Seuls les évènements incluant des $X \in [0,1]$ sont de probabilité non nuls ; mais si $X \in [0,1]$ $Y = \frac{1}{X} \ge 1$. Donc, si $y_0 < 1$, $F_Y(y_0) = \mathbb{P}(\{\frac{1}{X} \le y_0\}) = 0$

Supposons $y_0 \ge 1$; alors $\{Y \le y_0\} = \{\frac{1}{X} \le y_0\} = \{X < 0\} \cup \{\frac{1}{y_0} \le X\}$, d'où

$F_Y(y_0) = \mathbb{P}(\{Y \le y_0\}) = \mathbb{P}(\{X < 0\}) + \mathbb{P}(\{\frac{1}{y_0} \le X\}) = 0 + 1 - F(\frac{1}{y_0})$ avec $\frac{1}{y_0} \in [0,1]$

$= 1 - \frac{1}{y_0^{\theta+1}}$

$\boxed{F_Y(y_0) = \left(1 - \frac{1}{y_0^{\theta+1}}\right) \mathbb{1}_{\{y_0 \ge 1\}}(y_0).}$

7. En déduire sa densité $f_Y(y)$.

On a $\left(1 - \frac{1}{y^{\theta+1}}\right)' = 0 - \left(y^{-(\theta+1)}\right)' = +(\theta+1) y^{-\theta-1-1} = \frac{\theta+1}{y^{\theta+2}}$

$\boxed{f_Y(y) = \frac{\theta+1}{y^{\theta+2}} \mathbb{1}_{\{y \ge 1\}}(y).}$

Exercice 2 (6 points)) On pose $f(x) := \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1. Soit X de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\theta}} dx \overset{IPP}{=} \frac{1}{\theta} \left\{ \left[x(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}) \right]_{x=0}^{\infty} + \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \left[-\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right]_{x=0}^{+\infty}$

Finalement $\mathbb{E}(X) = +\theta e^{-\frac{0}{\theta}} = \theta$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = \theta}$

2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ le résultat de n tirages indépendants de loi de densité f. Quelle est la vraissemblance $L(\theta)$ de cet échantillon ?

$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \ldots e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x_1 + \ldots + x_n}{\theta}}$

$\boxed{L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x_1 + \ldots + x_n}{\theta}}}$

3. Calculer la log-vraissemblance $l(\theta)$ de cet échantillon.

$$l(x_1,\dots,x_n;\theta) = \log(L(x_1,\dots,x_n;\theta)) = \log\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{x_1+\dots+x_n}{\theta}}\right)$$

$$= -n\log(\theta) - \frac{x_1+\dots+x_n}{\theta} = -n\log\theta - \frac{s}{\theta} \quad \text{avec } s = x_1+\dots+x_n.$$

$l(\theta) = -n\log\theta - \frac{s}{\theta}$, avec $s = x_1+\dots+x_n$.

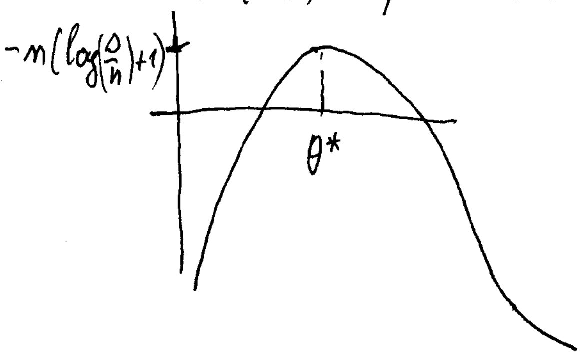
4. Calculer la valeur θ^* de θ où la log-vraissemblance de cet échantillon est maximale.

Pour que la log-vraissemblance (et donc la vraissemblance) soient maximales, il faut que $l'(\theta) = 0$; or

$$0 = l'(\theta) = \frac{-n}{\theta} + \frac{s}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}\left(-n + \frac{s}{\theta}\right) \Leftrightarrow -n + \frac{s}{\theta} = 0 \quad \left(\text{puisque } \frac{1}{\theta} \neq 0\right)$$

Finalement, on voit qu'il faut que $\frac{s}{\theta} = n \Leftrightarrow \theta = \frac{s}{n} = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$.

On s'assure que θ^* est bien un maximum en observant que $l'(\theta)$ 0 pour $\theta < \theta^*$ et $l'(\theta)$ 0 pour $\theta > \theta^*$



$\theta^* = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$

5. Quel est l'estimateur au maximum de vraissemblance $\hat{\theta}$ du paramètre θ ?

Par définition $\hat{\theta} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$, où $X_1,\dots,X_n$ est un échantillon de cette loi.

$\hat{\theta} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$

6. Cet estimateur est-il convergent ? (Justifiez votre réponse)

Par la Loi des Grands Nombres (LGN) on sait que $\hat{\theta} := \frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X) = \theta$

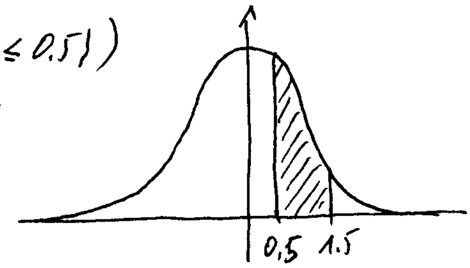
L'estimateur est-il convergent ? Oui, cet estimateur converge vers θ

Exercice 3 (7 points)) 1. Soit Z une v.a. normale centrée réduite. Déterminer au moyen de la table ci-dessous la probabilité de l'évènement $\{Z \in [0.5, 1.5]\}$.

$$\mathbb{P}(\{Z \in [0{,}5, 1{,}5]\}) = \mathbb{P}(\{Z \leq 1{,}5\}) - \mathbb{P}(\{Z \leq 0{,}5\})$$

lecture dans la table $\longrightarrow$ $= 0{,}9331928 - 0{,}6914625$

$= 0{,}2417303..$



$\mathbb{P}(\{Z \in [0.5, 1.5]) =$ $0{,}2417303..$

2. Soit X une v.a. normale, d'espérance 80 et écart-type 10. Quelle est la probabilité de l'évènement $\{X \geq 95\}$

Posons $Z = \dfrac{X-80}{10} = \dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X}}$, ainsi $Z \leadsto \mathcal{N}(0,1)$ et

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant 95\}) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{X-80}{10} \geqslant \frac{95-80}{10}\right\}\right) = \mathbb{P}(\{Z \geqslant 1{,}5\})$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\{Z < 1{,}5\}) = 1 - \mathbb{P}(\{Z \leq 1{,}5\}) = 1 - 0{,}9331928$$

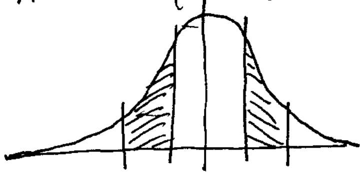
$$= 0{,}0668072$$

$\mathbb{P}(\{X \geq 95) =$ 0.0668072

3. Quelle est la probabilité de l'évènement $\{X \in [65, 75]\}$?

On pose à nouveau $Z = \dfrac{X-80}{10} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$ $\quad X \in [65,75] \Leftrightarrow Z \in \left[\dfrac{65-80}{10}, \dfrac{75-80}{10}\right]$

Alors $\mathbb{P}(\{X \in [65,75]\}) = \mathbb{P}(\{Z \in [-1.5, -0.5]\}) = \mathbb{P}(\{Z \in [+0.5, +1.5]\})$.



parité de la gaussienne

$= 0{,}2417303..$ (3.1).

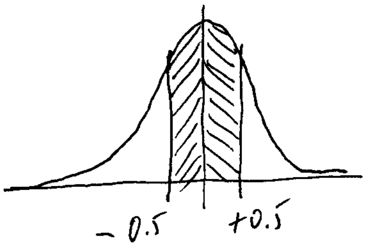
$\mathbb{P}(\{X \in [85, 95]\}) =$ $0{,}2417303...$

4. Quelle est la probabilité de l'évènement $\{X \in [75, 85]\}$?

Toujours avec $Z = \dfrac{X-80}{10} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$ $\quad \{X \in [75,85]\} = \{Z \in [-0.5, +0.5]\}$,

d'où $\mathbb{P}(\{X \in [75,85]\}) = \mathbb{P}(\{Z \in [-0.5, +0.5]\}) = 2\ \mathbb{P}(\{Z \in [0, 0.5]\})$.

parité de la gaussienne



$= 2 \cdot (0.6914625 - 0.5)$

$= 0{,}382925$

$\mathbb{P}(\{X \in [75, 85]\}) =$ $0{,}382925...$

5. On considère un échantillon de 1000 tirages normaux indépendants d'espérance 80 et écart-type 10. Quels sont les effectifs théoriques t_i des classes suivantes $\mathcal{V}_1 =]-\infty, 65]$, $\mathcal{V}_2 =]65, 75]$, $\mathcal{V}_3 =]75, 85]$, $\mathcal{V}_4 =]85, 95]$, $\mathcal{V}_5 =]95, +\infty[$?

L'échantillon étant de taille 1000, chaque effectif théorique est égal à $t_i = 1000 \cdot \mathbb{P}(\{X \in V_i\})$. Or, par symétrie de la loi gaussienne on voit que $\mathbb{P}(\{X \in V_1\}) = \mathbb{P}(\{X \in V_5\}) = \mathbb{P}(\{X \in [95, +\infty[\}) = 0,0668072$ d'après 3.2

$\mathbb{P}(\{X \in V_4\}) = \mathbb{P}(\{X \in V_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in [65, 75]\}) = 0,2417303..$ d'après 3.3

$\mathbb{P}(\{X \in V_3\}) = \mathbb{P}(\{X \in]75, 85]\}) = 0,382925$ d'après 3.4

Ainsi, on obtient les valeurs suivantes

$t_1 = 66,8072..$	$t_2 = 241,7303..$	$t_3 = 382,925..$	$t_4 = 241,7303..$	$t_5 = 66,8072..$

6. Un échantillonnage d'une grandeur supposée suivre une loi $\mathcal{N}(80, 10)$ a produit, pour ces mêmes classes, les effectifs respectifs suivants : 73, 235, 391, 233, 68. Calculer le χ^2 de cet échantillon sous cette hypothèse (dite *hypothèse nulle* H_0).

Notons $O_1 = 73$, $O_2 = 235$, $O_3 = 391$, $O_4 = 233$, et $O_5 = 68$ les effectifs observés. Par définition, la statistique du χ^2 vaut $\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - t_i)^2}{t_i}$

$$\chi^2 = \frac{(73-66,8072)^2}{66,8072} + \frac{(235-241,7303)^2}{241,7303} + \frac{(391-382,925)^2}{382,925} + \frac{(233-241,7303)^2}{241,7303} + \frac{(68-66,8072)^2}{66,8072}$$

$= 1,26831982$

$\chi^2 = 1,2683..$

7. Confirmez ou infirmez cette supposition au moyen d'un test du χ_2 au seuil $\alpha = 5\%$?

Comme nous avons 5 classes, nous avons $k = 4$ degrés de liberté. Dans la table nous voyons que $\mathbb{P}(\{\chi^2_4 \geq 9,4877285\}) \approx 5\% = \alpha$. Or $\chi_2 = 1,2683 \ll 9,487..$

$\boxed{\text{Acceptation}}$ ou ~~rejet~~ de H_0 = "$X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(80, 10)$"

On accepte l'hypothèse nulle H_0 = "$X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(80,10)$"

Loi Normale : probabilité que $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ soit inférieure à $u_1 + u_2$.

u1\u2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000000	0,5039894	0,5079784	0,5119665	0,5159535	0,5199389	0,5239223	0,5279032	0,5318814	0,5358565
0,1	0,5398279	0,5437954	0,5477585	0,5517168	0,5556700	0,5596177	0,5635595	0,5674949	0,5714237	0,5753454
0,2	0,5792597	0,5831661	0,5870644	0,5909541	0,5948348	0,5987063	0,6025681	0,6064198	0,6102612	0,6140918
0,3	0,6179114	0,6217195	0,6255158	0,6293000	0,6330717	0,6368306	0,6405764	0,6443087	0,6480272	0,6517317
0,4	0,6554217	0,6590970	0,6627572	0,6664021	0,6700314	0,6736448	0,6772419	0,6808225	0,6843863	0,6879331
0,5	$\boxed{0,6914625}$	0,6949743	0,6984682	0,7019441	0,7054015	0,7088403	0,7122603	0,7156612	0,7190427	0,7224047
0,6	0,7257469	0,7290692	0,7323712	0,7356528	0,7389138	0,7421540	0,7453732	0,7485712	0,7517478	0,7549030
0,7	0,7580364	0,7611480	0,7642376	0,7673050	0,7703501	0,7733727	0,7763728	0,7793501	0,7823046	0,7852362
0,8	0,7881447	0,7910300	0,7938920	0,7967307	0,7995459	0,8023375	0,8051055	0,8078498	0,8105704	0,8132671
0,9	0,8159399	0,8185888	0,8212136	0,8238145	0,8263912	0,8289439	0,8314724	0,8339768	0,8364569	0,8389129
1,0	0,8413447	0,8437523	0,8461358	0,8484950	0,8508300	0,8531409	0,8554277	0,8576903	0,8599289	0,8621434
1,1	0,8643339	0,8665004	0,8686431	0,8707618	0,8728568	0,8749280	0,8769755	0,8789995	0,8809998	0,8829767
1,2	0,8849303	0,8868605	0,8887675	0,8906514	0,8925122	0,8943502	0,8961653	0,8979576	0,8997274	0,9014746
1,3	0,9031995	0,9049020	0,9065824	0,9082408	0,9098773	0,9114919	0,9130850	0,9146565	0,9162066	0,9177355
1,4	0,9192433	0,9207301	0,9221961	0,9236414	0,9250663	0,9264707	0,9278549	0,9292191	0,9305633	0,9318879
1,5	$\boxed{0,9331928}$	0,9344783	0,9357445	0,9369916	0,9382198	0,9394292	0,9406200	0,9417924	0,9429466	0,9440826
1,6	0,9452007	0,9463011	0,9473839	0,9484493	0,9494974	0,9505285	0,9515428	0,9525403	0,9535214	0,9544861
1,7	0,9554346	0,9563671	0,9572838	0,9581849	0,9590705	0,9599409	0,9607961	0,9616365	0,9624621	0,9632731
1,8	0,9640697	0,9648522	0,9656206	0,9663751	0,9671159	0,9678433	0,9685573	0,9692582	0,9699460	0,9706211
1,9	0,9712835	0,9719335	0,9725711	0,9731967	0,9738102	0,9744120	0,9750022	0,9755809	0,9761483	0,9767046
2,0	0,9772499	0,9777845	0,9783084	0,9788218	0,9793249	0,9798179	0,9803008	0,9807739	0,9812373	0,9816912
2,1	0,9821356	0,9825709	0,9829970	0,9834143	0,9838227	0,9842224	0,9846137	0,9849966	0,9853713	0,9857379
2,2	0,9860966	0,9864475	0,9867907	0,9871263	0,9874546	0,9877756	0,9880894	0,9883962	0,9886962	0,9889894
2,3	0,9892759	0,9895559	0,9898296	0,9900969	0,9903582	0,9906133	0,9908625	0,9911060	0,9913437	0,9915758
2,4	0,9918025	0,9920237	0,9922397	0,9924506	0,9926564	0,9928572	0,9930531	0,9932443	0,9934309	0,9936128
2,5	0,9937903	0,9939634	0,9941322	0,9942969	0,9944574	0,9946138	0,9947664	0,9949150	0,9950600	0,9952012
2,6	0,9953388	0,9954729	0,9956035	0,9957307	0,9958547	0,9959754	0,9960929	0,9962074	0,9963188	0,9964274
2,7	0,9965330	0,9966358	0,9967359	0,9968332	0,9969280	0,9970202	0,9971099	0,9971971	0,9972820	0,9973645
2,8	0,9974448	0,9975229	0,9975988	0,9976725	0,9977443	0,9978140	0,9978817	0,9979476	0,9980116	0,9980737
2,9	0,9981341	0,9981928	0,9982498	0,9983051	0,9983589	0,9984111	0,9984617	0,9985109	0,9985587	0,9986050
3,0	0,9986500	0,9986937	0,9987361	0,9987772	0,9988170	0,9988557	0,9988932	0,9989296	0,9989649	0,9989991
3,1	0,9990323	0,9990645	0,9990957	0,9991259	0,9991552	0,9991836	0,9992111	0,9992377	0,9992636	0,9992886

Lois du Chi-deux : Les lignes correspondent au nombre de degrés de liberté, entre 1 et 30. Chaque colonne correspond à une même probabilité d'être supérieur à la valeur indiquée dans le tableau.

	0,99	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	α 0,05	0,025	0,01
1	0,0001571	0,0039322	0,0157907	0,1015311	0,4549362	1,3233042	2,7055406	3,8414553	5,0239026	6,6348913
2	0,0201004	0,1025862	0,2107208	0,5753639	1,3862936	2,7725904	4,6051761	5,9914764	7,3777791	9,2103510
3	0,1148316	0,3518460	0,5843755	1,2125321	2,3659727	4,1083421	6,2513945	7,8147247	9,3484040	11,3448821
k= 4	0,2971068	0,7107241	1,0636243	1,9225580	3,3566947	5,3852661	7,7794340	$\boxed{9,4877285}$	11,1432620	13,2766986
5	0,5542969	1,1454773	1,6103091	2,6746042	4,3514587	6,6256784	9,2363491	11,0704826	12,8324920	15,0863174
6	0,8720833	1,6353805	2,2041303	3,4545975	5,3481190	7,8408057	10,6446375	12,5915774	14,4493550	16,8118718
7	1,2390317	2,1673492	2,8331052	4,2548522	6,3458093	9,0371459	12,0170314	14,0671273	16,0127737	18,4753241
8	1,6465062	2,7326326	3,4895374	5,0706416	7,3441201	10,2188538	13,3615619	15,5073125	17,5345446	20,0901592
9	2,0878894	3,3251151	4,1681557	5,8988229	8,3428320	11,3887495	14,6836632	16,9189602	19,0227776	21,6660476
10	2,5581988	3,9402953	4,8651783	6,7371986	9,3418161	12,5488588	15,9871747	18,3070290	20,4832007	23,2092872
11	3,0534957	4,5748090	5,5777883	7,5841449	10,3409955	13,7006897	17,2750067	19,6751531	21,9200227	24,7250219
12	3,5705513	5,2260277	6,3037959	8,4384194	11,3403219	14,8453991	18,5493402	21,0260554	23,3366602	26,2169637
13	4,1068996	5,8918606	7,0414997	9,2990633	12,3397531	15,9839051	19,8119327	22,3620266	24,7355809	27,6881845
14	4,6604155	6,5706316	7,7895377	10,1653113	13,3392718	17,1169328	21,0641406	23,6847823	26,1189349	29,1411633
15	5,2293559	7,2609348	8,5467531	11,0365377	14,3388572	18,2450842	22,3071206	24,9957967	27,4883647	30,5779507
16	5,8121968	7,9616386	9,3122353	11,9122166	15,3384973	19,3688566	23,5418215	26,2962209	28,8453246	31,9998609
17	6,4077420	8,6717536	10,0851830	12,7919245	16,3381790	20,4886786	24,7690282	27,5871003	30,1909826	33,4087170
18	7,0149034	9,3904479	10,8649369	13,6752906	17,3379020	21,6048862	25,9894184	28,8693210	31,5264102	34,8052374
19	7,6326976	10,1170062	11,6509120	14,5619976	18,3376500	22,7178053	27,2035648	30,1435051	32,8523370	36,1907747
20	8,2603684	10,8507994	12,4426014	15,4517747	19,3374296	23,8276894	28,4119699	31,4104204	34,1695814	37,5662715
21	8,8971724	11,5913160	13,2395955	16,3443873	20,3372282	24,9347832	29,6150859	32,6705580	35,4788557	38,9322325
22	9,5424944	12,3380095	14,0414896	17,2396185	21,3370437	26,0392635	30,8132853	33,9244598	36,7806781	40,2894485
23	10,1956888	13,0905050	14,8479543	18,1372940	22,3368799	27,1413291	32,0068902	35,1724602	38,0756095	41,6383344
24	10,8563494	13,8484222	15,6586793	19,0372505	23,3367299	28,2411501	33,1962351	36,4150265	39,3640601	42,9797813
25	11,5239511	14,6113957	16,4734055	19,9393377	24,3365837	29,3388466	34,3815833	37,6524894	40,6464978	44,3140141
26	12,1981769	15,3791626	17,2918796	20,8434347	25,3364585	30,4345588	35,5631637	38,8851296	41,9231379	45,6416362
27	12,8784685	16,1513946	18,1138885	21,7494036	26,3363413	31,5284104	36,7412276	40,1132656	43,1945211	46,9628372
28	13,5646661	16,9278763	18,9392353	22,6571575	27,3362315	32,6204888	37,9159074	41,3371517	44,4607905	48,2781662
29	14,2564062	17,7083814	19,7677396	23,5665882	28,3361296	33,7109064	39,0874753	42,5569475	45,7222795	49,5878290
30	14,9534644	18,4926672	20,5992447	24,4776030	29,3360283	34,7997355	40,2560170	43,7729539	46,9792176	50,8921806