NOM, Prénom :............................ **GROUPE** : ....

Contrôle Continu : 06 avril 2005 (durée 1h30)
L2 : Probabilités
aucun document autorisé

Chaque carré dans la marge droite représente 1 point sur 20. *Ne rien inscrire dans ces carrés.*

Exercice 1 : L'arbre trinômial : Soit Ω l'ensemble des mots de deux lettres formés à l'aide des trois lettres u, n, et d. Pour $\omega \in \Omega$ et $k = 1, 2$ on pose $\delta T_k(\omega) := 1$ si la k-ième lettre du mot ω est un u, $\delta T = -1$ si la k-ième lettre du mot ω est un d, et 0 si la k-ième lettre du mot ω est un n. On pose $T_0 := 0$ puis par récurence $T_k = T_{k-1} + \delta T_k$, c'est à dire $T_1 = \delta T_1$ et $T_2 = T_1 + \delta T_2$.

1. Quelles sont les valeurs prises par les v.a. T_0, T_1, et T_2 sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

$T_0(\Omega) =$	$T_1(\Omega) =$
$T_2(\Omega) =$	

2. Pour $k = 0..2$, représenter dans un système de coordonnées (k, j) les points $(k, T_k(\omega))$ pour tous les $\omega \in \Omega$.

3. Dans le graphique précédent, joindre par un segment tous les points $(k-1, T_{k-1}(\omega))$ à $(k, T_k(\omega))$ pour $k = 1, 2$ et tous les $\omega \in \Omega$. Vous obtenez ainsi une représentation graphique de l'arbre ternaire de hauteur 2 associé au *processus trinomial* $\mathcal{T}_2 := (T_k)_{k=0..2}$.

Exercice 2. La filtration trinomiale On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Déterminer les atomes A_{-1}, A_0, et A_1 de l'algèbre $\alpha(T_1) =: \mathcal{T}_1$.

$A_{-1} =$	$A_0 =$	$A_1 =$

2. Déterminer de même les atomes B_i de l'algèbre $\alpha(T_2)$.

3. Quelle est l'algèbre $\alpha(T_1, T_2) :=< \alpha(T_1) \cup \alpha(T_2) >=: \mathcal{T}_2$?

$\alpha(T_1, T_2) =$

4. Quelle est l'algèbre $\alpha(T_0) := \mathcal{T}_0$? La suite l'algèbres emboitées $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ s'appelle la *filtration de* Ω *associée* au processus trinomial $(T_k)_{k=0..2}$.

$\alpha(T_0) =$

Exercice 3. Probabilités risque-neutres On reprend les notations de l'exercice 1 ; on note $X := \delta T_1$ et $Y := \delta T_2$. On suppose que les v.a. X et Y sont *indépendantes* et de même loi. On pose $\mathbb{P}(\{X = 1\}) =: p$ et $\mathbb{P}(\{X = -1\} =: q)$

1. Que vaut $\mathbb{P}(\{Y = 0\})$ en fonction p et de q ?

$\mathbb{P}(\{\text{Y=0}\})=$

Explications :

2. On pose $Z := X + Y$. Dans le calcul ci-dessous, donner dans la case prévue à cet effet la justification de l'égalité affirmée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z = x+1\}|\{X = x\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{Z = x+1\} \cap \{X = x\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X + Y = x+1, X = x\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{Y = +1, X = x\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{Y = +1\})\mathbb{P}(\{X = x\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \\
&= \mathbb{P}(\{Y = +1\}).
\end{aligned}$$

3. En utilisant ce calcul ou en vous en inspirant, donner en fonction p et de q les probabilités conditionnelles
$\mathbb{P}(\{Z = x+1\}|\{X = x\})$, $\mathbb{P}(\{Z = x\}|\{X = x\})$, et $\mathbb{P}(\{Z = x-1\}|\{X = x\})$.

$\mathbb{P}(\{Z = x+1\}|\{X = x\}) =$

Votre calcul de $\mathbb{P}(\{Z = x\}|\{X = x\})$

d'où finalement :

$\mathbb{P}(\{Z = x\}|\{X = x\}) =$

De même, on obtient (donnez votre résultat)

$\mathbb{P}(\{Z = x - 1\}|\{X = x\}) =$

4. Calculer $\mathbb{E}(Z|\{X = x\})$ en fonction de x.

$\mathbb{E}(Z|\{X = x\}) =$

5. A quelle condition sur p et q a-t-on $\mathbb{E}(Z|X) = X$? (Expliquez)

6. Donner la loi de la v.a. Z (cette question est un peu plus longue)

z_i					
p_i					

Exercice 4 : Loi du triangle Soit X une v.a. admettant la densité

$$f(x) := c(2-x)\mathbb{I}_{[0,2]}(x).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c.

$c =$

2. Représenter le graphe de la densité de X.

3. Il existe des nombres x_- et x_+ tels que $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\} = 0$ si et seulement si $x_0 \leq x_-$, et $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\} = 1$ si et seulement si $x_0 \geq x_+$. Donner les valeurs de x_- et x_+.

$x_- =$ | $x_+ =$

4. Calculer sur votre brouillon la valeur de $\mathbb{E}(X)$, puis donner ci-dessous les étapes principales de votre calcul, en omettant les calculs les plus triviaux.

$\mathbb{E}(X) =$

5. Calculer sur votre brouillon la valeur de $\mathrm{Var}\,(X)$, puis donner ci-dessous les étapes principales de votre calcul, en omettant les calculs les plus triviaux.

$\mathrm{Var}\,(X) =$

6. Calculer la valeur $F(x_0)$ de la fonction de répartition pour $x_0 \in [x_-, x_+]$.

$F(x_0) =$

7. On appelle *médiane* de X le réel x tel que $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}(\{X \geq x\})$. Calculer sur votre brouillon la valeur de la médiane x_{med}, puis donner ci-dessous les étapes principales de votre calcul, en omettant les calculs les plus triviaux.

$x_{\mathrm{med}} =$