NOM, Prénom :............................ **GROUPE** : ....

Contrôle Continu : 06 mars 2006 (durée 1h30)
L2 : Probabilités
aucun document autorisé

Chaque carré dans la marge droite représente 1 point sur 20. *Ne rien inscrire dans ces carrés.*

Exercice 1 : algèbre trace : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω et $B_0 \in \mathcal{A}$. On pose $\mathcal{B} := \{C \cap B_0 \mid C \in \mathcal{A}\}$

1. Montrer que $\emptyset \in \mathcal{B}$

2. Montrer que si $A \in \mathcal{B}$, alors $B_0 \setminus A \left(= \complement_{B_0} A\right) \in \mathcal{B}$

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre sur B_0.

Exercice 2. Questionnaire à choix multiples On considère une question $\mathcal{Q}$ d'un questionnaire à choix multiple (QCM) offrant n réponses à $\mathcal{Q}$, une seule réponse étant correcte.

On considère un candidat qui, lorsqu'il croit qu'il connaît la réponse correcte, se trompe avec une probabilité $1 - p$. S'il ne crois pas connaître la réponse correcte il répond au hasard. On observe qu'il a choisit la réponse correcte et on veut alors calculer la probabilité q qu'il connaisse la réponse correcte. Pour cela, on note A l'évènement "le candidat choisit la réponse correcte", et B l'évènement "le candidat connaît la réponse correcte".

1. En termes probabilistes, que représente q ?

$q :=$

2. Que représente et que vaut $\mathbb{P}(A|B)$?

$\mathbb{P}(A|B) =$

3. Que vaut $\mathbb{P}(A)$?

$\mathbb{P}(A) =$

4. Calculer q

$q =$

Exercice 3 : Une loi cubique Soit X une v.a. admettant la densité

$$f(x) := cx^2(1-x)\mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c.

$c =$

2. Représenter le graphe de la densité de X.

3. Il existe des nombres x_- et x_+ tels que $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\} = 0$ si et seulement si $x_0 \leq x_-$, et $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\} = 1$ si et seulement si $x_0 \geq x_+$. Donner les valeurs de x_- et x_+.

$x_- =$	$x_+ =$

4. Calculer sur votre brouillon la valeur de $\mathbb{E}(X)$, puis donner ci-dessous les étapes principales de votre calcul, en omettant les calculs les plus triviaux.

$\mathbb{E}(X) =$

5. Calculer sur votre brouillon la valeur de $\mathrm{Var}\,(X)$, puis donner ci-dessous les étapes principales de votre calcul, en omettant les calculs les plus triviaux.

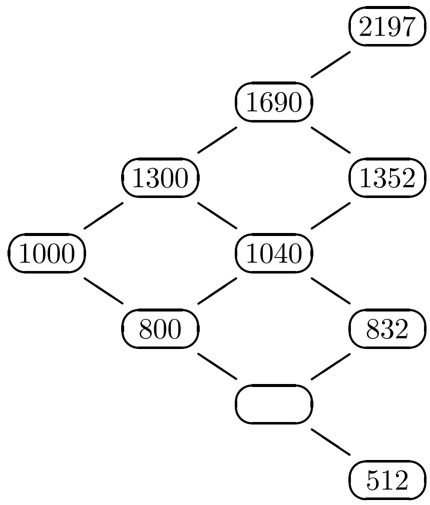
$\mathrm{Var}\,(X) =$

6. Calculer la valeur $F(x_0)$ de la fonction de répartition pour $x_0 \in [x_-, x_+]$.

$F(x_0) =$

Exercice 4 : Probabilité risque-neutre On consière un modèle d'actif financier $(S_k)_{k=0..3}$ défini par récurrence par $S_k := S_{k-1}U_k$, $U_k = a\rho^{X_1}$, où sont donnés les nombre S_0, a, et ρ, avec $a < 1 < a\rho$, les trois v.a. X_1, X_2, et X_3 qui sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ telle que $\mathbb{E}(U_k) = 1$.

1. Voici des valeurs de S_k. Déterminer a, ρ, et p et compléter la valeur manquante



$a =$	$\rho =$	$p =$

2. On considère une *option Call à la monnaie* payant $\varphi(S_3)$, avec $\varphi(s) = (s - S_0)^+$. Calculer les valeurs C_k d'un portefeuille de couverture, et en particulier C_0

$C_0 =$

3. Montrer que $\mathbb{E}(S_3) = S_0$

4. Calculer la loi de S_3 et de $Y := \varphi(S_3)$.

S_3 :

s_i				
$\mathbb{P}(\{S_3 = s_i\})$				

$Y = \varphi(S_3)$:

y_i			
$\mathbb{P}(\{Y = y_i\})$			

5. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(\varphi(S_3))$; qu'observez-vous ?

$\mathbb{E}(\varphi(S_3)) =$	Observation :

6. On considère une *option digitale* sur S_3 payant $\psi(S_3)$, avec $\psi(s) := \mathbb{I}_{[S_0,+\infty[}(s)$. Calculer $\mathbb{E}(S_0\psi(S_3))$.

$\mathbb{E}(\varphi(S_3)) =$

7. Voici les valeurs d'une option payant $\gamma(S_3)$: $\begin{array}{c|c|c|c|c|} s & 512 & 832 & 1352 & 2197 \\ \hline \gamma(s) & 100 & 100 & 0 & 0 \end{array}$. Donner une expression simple pour $\gamma(s)$ et calculer $\mathbb{E}(\gamma(S_3))$

$\gamma(s) =$	$\mathbb{E}(\gamma(S_3)) =$