Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2011-2012

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Probabilité

Fiche TD1

Algèbre d'évènements et variables aléatoires

Notez vos réponses sur cette feuille qui sera ramassée en fin de séance.

Exercice 1 (Indicatrice) On rappelle qu'on appelle *fonction indicatrice* de $A \subseteq \Omega$ la fonction $\mathbb{I}_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ définie par $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ sinon.

1. Exprimer, en fonction de $\mathbb{I}_A$ et de $\mathbb{I}_B$, les indicatrices $\mathbb{I}_{A^c}$, $\mathbb{I}_{A\cap B}$, $\mathbb{I}_{A\cup B}$. Soit $B \subseteq \Omega$. Vérifier que $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$ et $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$ où $x \wedge y := \text{Min}\,\{x,y\}$ et $x \vee y := \text{Max}\,\{x,y\}$. **Indication :** On commencera par remplir le tableau

$\omega \in$	$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_{A^c}$	$\mathbb{I}_{A\cap B}$	$\mathbb{I}_{A\cup B}$	$\mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$	$1-\mathbb{I}_A$
A		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
A^c		$\times$			$\times$		$\times$		
B	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$
B^c	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$A \cap B$									
$A - B := A \cap B^c$									
$B - A := B \cap A^c$									
$(A \cup B)^c$									

Donnez à présent vos réponses :

En observant les deux premières lignes du tableau vous voyez que $\mathbb{I}_{A^c} =$

En observant les quatre dernières lignes du tableau vous observez que $\mathbb{I}_{A\cap B} =$

Vous trouvez : $\mathbb{I}_{A\cup B} =$

Indiquez comment vous trouvez cette dernière réponse :

2. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (on peut aussi dire que X est une *variable aléatoire* (v.a.) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$). Ecrire chacune des v.a. ci-dessous sous la forme $\mathbb{I}_A$, où A est un nouvel ensemble défini au moyen de X, comme par exemple $A := \{X \leq 1\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$ (on dit que A est un *évènement* $\alpha(X)$-mesurable, et que $\mathbb{I}_A$ est une v.a. $\alpha(X)$-mesurable.)

$$\mathbb{I}_{\{X\leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X\geq -1\}} \quad , \quad \mathbb{I}_{\{X\leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X\geq -1\}} \quad , \quad \mathbb{I}_{\{X\leq 1\}}\mathbb{I}_{\{X^2\geq 4\}}$$

$\mathbb{I}_{\{X\leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X\geq -1\}} =$

$\mathbb{I}_{\{X\leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X\geq -1\}} =$

$\mathbb{I}_{\{X\leq 1\}}\mathbb{I}_{\{X^2\geq 4\}} =$

Lisez dans le chapitre 1 la définition d'une v.a. et d'une algèbre sur Ω.

Exercice 2 (Le chat à huit queues) Soit Ω l'ensemble des mots de trois lettres formés à l'aide des seules lettres h et b. Pour $\omega \in \Omega$ et $k = 1..3$ on pose $\delta J_k(\omega) := 1$ si la k-ième lettre du mot ω est un h et 0 sinon. On pose $J_0 := 0$ puis par récurence $J_k = J_{k-1} + \delta J_k$

1. Quelles sont les valeurs prises par les v.a. J_1, J_2, et J_3 sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$? Pour chacune de ces valeurs j donner un exemple de $\omega \in \Omega$ telle que $J_i(\omega) = j$.
   $J_1 =$

   $J_2 =$

   $J_3 =$

2. Pour $k = 0..3$, représenter dans un système de coordonnées (k, j) les points $(k, J_k(\omega))$ pour tous les $\omega \in \Omega$.

3. Dans le graphique précèdent, joindre par un segment tous les points $(k-1, J_{k-1}(\omega))$ à $(k, J_k(\omega))$ pour $k = 1..3$ et tous les $\omega \in \Omega$. Vous obtenez ainsi une représentation graphique de l'arbre binaire (couché !) de hauteur 3 associé au *processus du Bernoulli* $\mathcal{J}_3 := (J_k)_{k=0..3}$. (**Indication :** commencer par déterminer les segments issus du point $(1, 1)$ vers un point d'abscisse 2 : dans de cas que vaut k ? que dire de ω ? que dire de $\delta J_k(\omega)$?)