Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence MASS 2e année

Probabilité
Fiche TD2
Variables aléatoire et processus : le modèle CRR à trois étapes

Menez vos réflexions sur votre ***brouillon*.**
Rédigez **vos réponses sur cette feuille qui sera ramassée en fin de séance.**

Soient $S_0 > 0$ et $d < 1 < u$ trois nombres fixés. Pour tout k on défini la v.a. U_k égale à u si $\delta J_k = 1$ et à d sinon (le processus du Bernoulli $\mathcal{J}_3 := (J_k)_{k=0..3}$ est défini comme dans l'exercice 1.3 du polycopié). On définit par récurrence $S_k = S_{k-1} U_k$.

1. Pour $S_0 := 80$, $u := 1.5$, et $d = 0.5$, représenter dans une système de coordonnées (k,S) l'arbre binaire des valeurs du processus $\mathcal{S}_3 := (S_k)_{k=0..3}$ pour ce choix des valeurs des paramètres S_0, u, et d.

2. Vérifiez que la définition de U_k peut s'exprimer par $U_k = u^{\delta J_k} d^{1-\delta J_k}$.

3. Montrer que $g(x) := d\,(u/d)^x$ est telle que $U_k = g(\delta J_k)$.

4. En déduire par récurrence que $S_k = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_k} d^k$.

5. En déduire que S_k est $\alpha(J_k)$-mesurable (**Indication :** voir le théorème 1.3).

6. Déterminer la *probabilité* $p = \mathbb{P}^*(\{\delta J_k = 1\})$ telle que $S_0 = \mathbb{E}^*(S_1)$, où $\mathbb{E}^*$ désigne l'*espérance* pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

p=

Le processus $\mathcal{S}_N$ défini de manière analogue s'appelle le modèle de Cox, Ross, et Rubinstein pour un actif financier. On choisi souvent $u := e^{\sigma\sqrt{T/N}}$ et $d = 1/u$; le paramètre $\sigma > 0$ s'appelle la *volatilité* du modèle et $T > 0$ l'é*chéance* ou l'*horizon* du modèle.