Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice | Année 2011-2012

Département de Mathématiques | Licence MASS 2e année

Fiche TD3

Probabilité, loi d'une v.a., et espérance

Exercice 1 (Modèle CRR : probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$) Rappelons qu'on avait $S_k = S_{k-1}U_k$, avec $U_k = (\frac{u}{d})^{\delta J_k} d$. On dit que $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si[1] $\mathbb{E}^*(U_k) = 1$, où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance calculée pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

1. Déterminer $p := \mathbb{P}^*(\{U_k = u\})$ et $1 - p = \mathbb{P}^*(\{U_k = d\})$ en fonction de u et d.

$p=$	$1-p=$

2. On suppose que S_{k-1} est connu et vaut s ; montrer que[2] $\mathbb{E}^*(sU_k) = s$.

3. On appelle "contrat dérivé sur S_k de fonction de paiement φ" tout contrat payant $C_k := \varphi(S_k)$ (à la date k, lorsque S_k sera connu). On appelle "portefeuille de couverture" de ce contrat la combinaisons (à détenir si on veut "couvrir" ce contrat) de a actions et b euros telle que $aS_k + b = \varphi(S_k)$. Si $S_{k-1} = s$, determiner la composition (a, b) à la date $k-1$ d'un portefeuille de couverture, en fonction de $c^+ := \varphi(su)$ et $c^- := \varphi(sd)$.

$a=$	$b=$

.

[1] nous verrons ultérieurement le sens de cette hypothèse sibylline

[2] au prochain chapitre nous verrons que le membre de gauche est, de fait, une espérance contionnelle (lorsqu'on suppose les v.a. U_k *indépendantes*), se note $\mathbb{E}^*(S_k \mid \{S_{k-1} = s\})$ et se lit "l'espérance de S_k sachant que S_{k-1} est égale à s".

4. Calculer, en fonction de c^+ et c^- le prix $as + b =: c_{k-1}$ de ce portefeuille à la date $k-1$.

c_{k-1}=

5. Montrer que $c_{k-1} = \mathbb{E}^*(\varphi(sU_k))$.

Exercice 2 (Loi de Poisson) Soit $\lambda > 0$; on dit qu'une v.a. suit une *loi de Poisson* si et seulement si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(\{X = k\}) = c\frac{\lambda^k}{k\,!}$ (avec $0\,! := 1$). Nous verrons ultérieurement pourquoi la loi de Poisson est la loi des "évènements rares".

1. Déterminer la valeur de la constante c.

c=

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$. **Indication :** utiliser que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

$\mathbb{E}(X)$=

3. Soit $Y := g(X)$, avec $g(x) := x(x-1)$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

$\mathbb{E}(Y)$=

4. En déduire $\mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Donner ci-contre votre réponse

$\mathrm{Var}\,(X)$=