Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice | Année 2011-2012
Département de Mathématiques | Licence MASS 2e année

Fiche TD4

Probabilité, loi d'une v.a., et espérance (suite) : Loi exponentielle

Menez vos réflexions sur votre *brouillon*. *Rédigez* **vos réponses sur cette feuille.** Soit $\lambda > 0$; on dit qu'une v.a. X suit une *loi exponentielle* et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si elle admet pour densité la fonction $f_X(x) := ce^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$.

1. Déterminer la valeur de la constante c.

$c=$

2. Calculer la valeur $F_X(x_0) := \mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$ de la fonction de répartition de X au point x_0 ;

$F_X(x_0)=$

3. On dit que x_0 est la *médiane* de la v.a. X si et seulement si $\mathbb{P}\{X \leq x_0\} = \frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}\{X \leq x_0\} = \mathbb{P}\{X \geq x_0\}$, voyez-vous pourquoi ?). Calculer la médiane x_0 de X.

$x_0=$

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Indiquez d'abord l'expression que vous devez calculer.

$\mathbb{E}(X)=$ $\qquad =$

5. Soit $Y := g(X)$, avec $g(x) := x^2$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$. Indiquez d'abord l'expression que vous devez calculer.

$\mathbb{E}(Y)=$ $\qquad\qquad =$

6. En déduire $\mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

$\mathrm{Var}\,(X)=$

7. Calculer $F_Y(y_0) := \mathbb{P}(\{X^2 \leq y_0\}$; commencer par le cas $y_0 < 0$ puis traiter le cas $y_0 \geq 0$.

$F_Y(y_0)=$

8. En déduire $f_Y(y)$.

$f_Y(y)=$

Exercice 1 (Vecteur aléatoire) Soit $Z := (X, Y)$ un vecteur aléatoire, c'est-à-dire une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$ (ici $d = 2$). Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; rappelons qu'on note $\{Z \leq z_0\}$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0, Y(\omega) \leq y_0\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq y_0\}$. On dit que Z a pour *densité* la fonction $f_Z(z) = f_Z(x, y)$ si et seulement si

$$\mathbb{P}\{Z \leq z_0\} = \int_{\{Z \leq z_0\}} f_Z(z)dz := \int_{y=-\infty}^{y_0} \int_{x=-\infty}^{x_0} f_Z(x, y)dxdy.$$

On dit que Z suit une loi uniforme sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$ s'il a pour densité $f_Z(x, y) = K\mathbb{I}_D(x, y)$, où c est une constante convenable.

1. Déterminer la valeur de la constante K dans le cas où $D = [a, b] \times [c, d]$.

$K=$

2. Que vaut $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$?

$\mathbb{P}(\{X \leq x_0\})=$

3. Quelle est la loi de X ? Donner sa densité f_X.

$X \rightsquigarrow$

$f_X(x)=$

4. Que vaut $\mathbb{E}(Z) := (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$?

$\mathbb{E}(Z)=$