Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2011-2012

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 6

Probabilités conditionnelles (formule des probabilités totales, formule de Bayes)

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Familles nombreuses : jumeaux homozygotes et hétérozygotes) Rappel : On suppose que les deux enfants de la famille sont des jumeaux. *L'évènement certain est donc B* "les deux enfants sont des jumeaux" *et la probabilité est $\mathbb{P}_B$.* On fait l'hypothèse (vérifiée à l'aide de la loi des grands nombres) que lors d'une naissance géméllaire, garçon et fille restent équiprobables, mais la probabilité p que les deux jumeaux soient du même genre est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ car des jumeaux homozygotes, c'est-à-dire issus d'un même oeuf, sont nécessairement de même genre.

Les cas de jumeaux tout-deux garçons et tout-deux filles restent équiprobables.

On suppose que la disymétrie ($p > \frac{1}{2}$) est exclusivement dûe aux jumeaux homozygotes, les genres des deux jumeaux hétérozygotes étant indépendants, et garçon ou fille ayant la même probabilité.

Déterminer la probabilité π que des jumeaux soient homozygotes si $p = \frac{3}{4}$, puis si $p = \frac{9}{10}$.

Notations et indications : on notera

J_i "le i-ème jumeau est une fille",

E "les deux enfants sont des jumeaux hétérozygotes",

O "les deux enfants sont des jumeaux homozygotes",

M "les deux enfants sont des jumeaux de même genre",

$B = O \dot\cup E$ "les deux enfants sont des jumeaux", l'évènement certain dans cet exercice,

et $\pi := \mathbb{P}_B(O)$. On appliquera à M la *formule des probabilités totales.*

Exercice 2 (Not so bad news) On considère un test sanguin utilisé pour dépister une maladie rare dont un individu sur 100 000 est atteint[1]. Pour un individu touché, le test est positif dans 95% des cas. Pour un individu sain, il est positif (à tors) 5 fois sur 1000.

1. Le test dit que l'individu est atteint. Quelle est la probabilité que l'individu ne soit, en fait, pas atteint.

2. Le test dit que l'individu n'est pas atteint. Quelle est la probabilité que l'individu soit, en fait, atteint.

Thomas Bayes (1702-1761) : 

Notations et indications : On notera A "l'individu est atteint par la maladie",
et T "le test se révèle positif".

On caractérisera en terme de probabilité, éventuellement conditionnelle, les diverses données chiffrées et les questions posées. On a ici deux questions typiques se résolvant au moyen de la *formule de Bayes.*

[1]Nous admettons que ceci nous suggère de modéliser par un évènement C de probabilité $p = 10^{-5}$ la situation "être atteint par la maladie"