Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2011-2012

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 7 et 8

Variance

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille.

Exercice 1 (Calculs de variance de lois)

1. Calculer $\mathbb{E}(aX+b)$ et $\mathrm{Var}\,(aX+b)$ en fonction de $\mu := \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 := \mathrm{Var}\,(X)$.

2. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b]$, c'est-à-dire que X a pour densité $f_X(x) := \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$; calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}\,(X)$.

3. On rappelle que $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ si Y a pour densité $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Montrer que si $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors $X := \frac{1}{\sigma}(Y-\mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. (Indication : montrer que $\{X \leq x_0\} = \{Y \leq y_0\}$ pour un y_0 qu'on précisera en fonction de x_0, puis exprimer $\mathbb{P}(\{X \leq x_0\})$ en fonction de f_Y et effectuer le changement de variable $y = \sigma x + \mu$.)

4. Montrer que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(X) = 1$.

5. En déduire que $\mu = \mathbb{E}(Y)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(Y)$.

Exercice 2 (Variance d'une somme)

1. Montrer que $\mathrm{Var}\,(X+Y) = \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y) + 2\mathrm{Cov}\,(X,Y)$, où $\mathrm{Cov}\,(X,Y) := \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))$.

2. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_Y)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ sont deux v.a. gaussienne *indépendantes* et que leur somme S est également gaussienne. Montrer que $S \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour des valeur μ et σ que l'on précisera.

Exercice 3 (Mettre ses oeufs dans deux panier) Soient A_1 et A_2 deux évènements indépendants de même probabilité $0 < p < 1$.

1. Calculer l'espérance et la variance des deux v.a. $X_1 = 2k(1 - \mathbb{I}_{A_1})$ et $X_2 = k(1 - \mathbb{I}_{A_1}) + k(1 - \mathbb{I}_{A_2})$

2. Montrer[1] que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ et $\mathrm{Var}\,(X_2) < \mathrm{Var}\,(X_1)$

3. Donner les lois de X_1 et X_2 pour $p = 0.1$

Exercice 4 (Norme L^2)

1. Soient Z_1 et Z_2 deux v.a.. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $P(\lambda) := \mathbb{E}((Z_1 + \lambda Z_2)^2)$. En développant cette expression montrer que P est un polynôme de degré 2.

[1] Ceci montre que l'adage qu'*il est préférable de mettre ses oeufs dans deux paniers* exprime qu'à espérance égale le bon sens populaire préfaire l'option de moindre variance, moins "risquée".

2. Déduire du fait que $P(\lambda) \geq 0$ pour tout λ que $(\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2 \leq \mathbb{E}(Z_1^2)\mathbb{E}(Z_2^2)$. (**Indication :** utiliser que le discriminant Δ de P est nécessairement négatif.)

3. On pose $\|Z\| := \sqrt{\mathbb{E}(Z^2)}$; montrer que $\|\lambda Z\| = |\lambda| \|Z\|$.

4. Montrer que $\|Z_1 + Z_2\| \leq \|Z_1\| + \|Z_2\|$. (**Indication :** Calculer $(\|Z_1\| + \|Z_2\|)^2$)

5. Montrer que $\|Z\|^2 = (\mathbb{E}Z)^2 + \mathrm{Var}\,(Z)$