Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2011-2012

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Probabilité

Fiche TD 9

Loi jointe, copules

1. Cas de deux v.a. élémentaires Soient X et Y deux v.a. élémentaires dont les lois sont données par

x	1	2	3
$\mathbb{P}(\{X = x\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

, et

y	0	2	4
$\mathbb{P}(\{Y = y\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\operatorname{Var} X$, et $\operatorname{Var} Y$.

   On se propose de déterminer la loi jointe $F_Z(z)$ de $Z = (X, Y)$ et la copule couplant les lois de X et de Y dans deux situations distinctes.

2. On suppose que X et Y sont *indépendantes*. Former successivement les tableaux donnant les $p_z := \mathbb{P}(\{X = x, Y = y\})$, $F_Z(x, y) := \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\})$, et $C(u, v)$ tels que $F_Z(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$, pour tous $z := (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et tous $(u, v) \in F_X(\mathcal{X}) \times F_Y(\mathcal{Y})$, où $\mathcal{X} := X(\Omega)$ et $\mathcal{Y} = Y(\Omega)$.

   Que vaut $\operatorname{Cov}(X, Y)$?

3. On suppose à présent que les lois de X et Y sont couplées par la copule $C(u, v) := C^-(u, v) := \operatorname{Max}(u + v - 1, 0)$. Former successivement les tableaux donnant les $C(u, v)$, $F_Z(x, y)$, et p_z, pour tous $(u, v) \in C(F_X(\mathcal{X}), F_Y(\mathcal{Y}))$ et tout $z := (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

   Calculer la covariance $\operatorname{Cov}(X, Y)$ et la corrélation $\rho(X, Y)$ dans ce cas.

2. Cas de deux v.a. continues Soient X et Y deux v.a. élémentaires dont les lois sont données par $f_X(x) = \frac{1}{3}\mathbb{I}_{[0,3]}$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[0,2]}$. On se propose de déterminer la loi jointe $F_Z(z)$ de $Z = (X, Y)$ et la copule couplant les lois de X et de Y dans deux situations distinctes. On pose $\mathcal{X} := X(\Omega)$ et $\mathcal{Y} = Y(\Omega)$.

1. Que valent $F_X(x)$ pour $x \in [0, 3]$ et $F_Y(y)$ pour $y \in [0, 2]$?

2. On suppose que X et Y sont *indépendantes*. Donner successivement la densité $f_Z(x, y)$, la fonction de répartition $F_Z(x, y) := \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y\})$, et la copule $C(u, v)$ (telle que $F_Z(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$), pour tous $z := (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, et tous $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

3. On suppose à présent que les lois de X et Y sont couplées par la copule $C(u, v) := C^+(u, v) := \mathrm{Min}\,(u, v)$. Vérifier que[1] $F_Z(x, y) = ((0 \vee (\frac{x}{3} \wedge \frac{y}{2})) \wedge 1$.

   Représenter sur un schema du plan $\mathbb{R}^2_{x,y}$ sur quelles région la fonction F_Z est égale respectivement à 0, 1, $\frac{x}{3}$, et $\frac{y}{2}$, et montrer que si la loi de $Z := (X, Y)$ admettait une densité f_Z on aurait $f_Z(x, y) = 0$ "presque-partout".

   Vérifier que $Z := (X, Y)$ a même loi que $Z' := (X, \frac{2}{3}X)$.

   En déduire la covariance $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ et la corrélation $\rho(X, Y)$ dans ce cas.

Maurice Fréchet (1878-1973) :   : Abe Sklar ()

[1]On note $a \wedge b := \mathrm{Min}\,(a, b)$ et $a \vee b := \mathrm{Max}\,(a, b)$.