Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence MASS 2e année

Fiche TD 10
Décorrelation et indépendance

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Décorrélation et indépendance) .

1. Montrer que si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$.

2. Soit X une v.a. prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$, avec $\mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\{+1\})$. Vérifier que $X^3 = X$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

3. 0n pose $Y = X^2$ qui est donc X-mesurable; vérifier que X et Y ne sont pas indépendantes (Indication : considérer les évènements $A = \{X \leq -1\}$ et $B = \{Y \leq 0\}$ qui seraient indépendants si X et Y étaient indépendantes.)

4. Vérifier que néanmoins $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$.

Exercice 2 1. Soient X_0 et Y_0 deux v.a.; on suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0 = \mathbb{E}(Y_0)$ et $\mathrm{Var}\,(X_0) = 1 = \mathrm{Var}\,(Y_0)$. Montrer que si $\rho(X_0, Y_0) = 1$, alors $\mathbb{E}((X_0 - Y_0)^2) = 0$.
(**N.B. :** On dit que $X_0 = Y_0$ dans $L^2(\Omega)$; nous verrons que ceci implique que $\mathbb{P}(\{X_0 \neq Y_0\}) = 0$: on dit que les v.a. X_0 et Y_0 sont é*gales presque-sûrement* et on écrit $X_0 = Y_0$ p.s.)

2. Soient X et Y dans $L^2(\Omega)$; montrer que si $\rho(X,Y) = 1$ alors $Y = aX + b$ dans $L^2(\Omega)$ pour des valeurs de a et b que l'on déterminera. **Indication :** considérer X_0 la "centrée-réduite" de X et Y_0 la centrée-réduite de Y et montrer qu'on peut leur appliquer la question précédente.

3. Même question si $\rho(X,Y) = -1$.

Exercice 3 (Loi d'une somme) Soient X et Y deux v.a. supposées indépendantes, de densité f_X et f_Y respectivement, et soit $S = X + Y$.

1. Montrer que S admet pour densité $f_S = f_X * f_Y$, où $f * g$ est défini par

$$f * g(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t)g(t)dt.$$

Indication : Effectuer le changement de variable $(s,t) = (x+y, y)$ dans l'intégrale double

$$\int_{s=-\infty}^{s_0} f_{X+Y}(s)ds = \mathbb{P}(\{X+Y \leq s_0\}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{s\leq s_0\}}(X+Y)) = \int\int_{\{x+y\leq s_O\}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy,$$

Le domaine $D(s_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x+y \leq s_0\}$ correspond au domaine $D'(s_0) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | s \leq s_0\}$, et la *formule de changement de variable multidimensionnelle* donne $dsdt = j(x,y)dxdy$, où $j(x,y) := \mathrm{jac}\,(s(x,y), t(x,y)) = \det(\mathrm{Jac}\,(s(x,y), t(x,y)))$, avec $\mathrm{Jac}\,(s,t) = \begin{pmatrix} \partial s/\partial x & \partial s/\partial y \\ \partial t/\partial x & \partial t/\partial y \end{pmatrix}$.

2. On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu', \sigma')$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu'', \sigma'')$, et toujours que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Montrer que $X+Y$ est gaussienne.