Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice Année 2009-2010
Département de Mathématiques Licence MASS 2e année

Fiche TD 11

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.

1. Montrer que si les X_n sont centrées et telles que $\lim \mathbb{E}(X_n^2) = 0$ alors la suite converge en probabilité vers 0.

2. Supposons que $P(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$ et $P(X_n = -n) = P(X_n = n) = 1/2n^2$. Donner le tableau de la loi de X_n et en esquisser une représentation géométrique.

3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n^2)$.

4. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge (néanmoins) en probabilité vers 0.

Exercice 2 Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de v.a. et X et Y deux v.a.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\{|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{|Y_n - Y| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{|X_n + Y_n - X - Y| \leq \varepsilon\}$$

2. En déduire que $P(\{|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon\}) \leq P\left(\left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + P\left(\left\{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$.

3. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ convergent en probabilité vers X et Y alors $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.