Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
Licence MASS 2e année

Fiche TD 13
Fonctions génératrices, théorème de de Moivre Laplace

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Fonction génératrice : exemples) .

1. On rappelle qu'on dit que X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 0$, on a $\mathbb{P}(\{X = k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}$. Déterminer la fonction génératrice des probabilités de $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$; en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}\,(X)$.

2. On dit que X_n suit une loi uniforme discrète sur $[1..n]$ et on note $X_n \rightsquigarrow \mathcal{U}[[1..n]$ si et seulement si pour tout entier $k \in [1..n]$ on a $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n}$. Déterminer la fonction *génératrice des probabilités* G_{X_n} de X_n et G_{Y_n} de $Y_n := \frac{1}{n}X_n$.

3. Soit $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$; calculer sa fonction *génératrice des moments* $t \mapsto M_Z(t)$

Exercice 2 (Fonction génératrice : généralités) .

1. Montrer que $M_{aS+b}(t) = e^{bt} M_S(at)$.

2. Soient $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $U = \sigma Z + \mu$; quelle est la loi suivie par U ? Calculer sa fonction génératrice des moments $t \mapsto M_U(t)$

3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2. Donner, en fonction de $M := M_{X_1 - \mu}$, la fonction génératrice des moments $t \mapsto M_Y(t)$, pour $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.