Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
Licence MASS 2e année

Fiche TD 14
Fonctions génératrices et convergence en loi (suite) :
la loi de Poisson comme loi des assureurs

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (La loi de Poisson comme loi des assureurs) Il est d'usage de modéliser le nombre d'assurés d'un assureur qui subissent un sinistre (durant une période fixée) par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. L'idée est que le nombre n d'assurés d'un assureur est grand et que la probabilité qu'un assuré donné ait une sinistre est faible. Voici un modèle simple conduisant à ce résultat : Soit n fixé, et $(X_i)_{i=1..n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p_n)$, avec $p_n = \frac{\lambda}{n}$; $X_i = 1$ modélise que le i-ème assuré subit un sinitre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc

$$Y_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

On suppose que les $X_i$sont indépendants ; le fait que p_n est petit avec n modélise que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant le “nombre d'assurés sinistrés espéré”.

1. Soit $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer la fonction génératrice des moments (fgm) M_Z de Z.

$M_Z(t) =$

2. Calculer la fgm M_{X_i} de X_i.

$M_{X_i}(t) =$

3. Calculer la fgm $M_{Y_n}(t)$ de Y_n.

$M_{Y_n}(t) =$

4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} M_{Y_n}$. On rappelle que $\ln(1+u) = u(1+\varepsilon(u))$, où $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Conclusion ?

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M_{Y_n} = \quad}$

$\boxed{\text{Conclusion :} \quad}$

Exercice 2 (Et le TLC dans tout cela ?) .

1. L'idée du TLC est que toute accumulation d'évènements indépendants et identiquement distribués conduit à une loi normale, d'où l'omniprésence de cette distribution dans les phénomènes naturels. Or ici, c'est une loi de Poisson qui apparaît. Commentez cette présentation du TLC, expliquez ce paradoxe apparent.