Date : **NOM :** **Prénom :** **Groupe :**

Université de Nice — Année 2009-2010

Département de Mathématiques — Licence MASS 2e année

Fiche TD 17

Loi du Chi2

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez* **finalement votre réponse.**

Exercice 1 (Gros bras (suite)) On reprend le problème de remboursement de billet de la fiche de TD 16, ainsi que toutes ses notations et hypothèses. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ et $\mathcal{E}_n := \{S_n \leq 6500\}$. On généralise Z_{120} et $a = a_{120}$ à Z_n v.a. centrée réduite et a_n tels que $\mathcal{E}_n = \{Z_n \leq a_n\}$. Nous avons montré que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{120}) \simeq 0.9357$ et on souhaite préciser dans les 6.43% restant, lorsque qu'il n'est pas possible de rembourser tout les présents.

1. A quelle situation correspond l'évènement $\mathcal{A}_k := \mathcal{E}_{120-k} \cap \mathcal{E}^c_{121-k}$

2. Calculer une approximation de $\mathbb{P}(\mathcal{A}_1)$.

$\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) \simeq$

3. Trouver a_n tel que $\{S_n \leq 6500\} = \{Z_n \leq a_n\}$.

$a_n =$

4. On note k_α le plus petit k tel que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{120-k}) \geq 1 - \alpha$. Trouver $k_{0,01}$ et $k_{0,001}$

$k_{0,01} \simeq$	$k_{0,001} \simeq$

5. Formulez et expliquez votre conclusion quant au problème du guichetier ?


Johann Carl Friederich Gauss (1777-1855)

Exercice 2 (Fonction Γ) On appelle fonction Gamma la fonction définie par $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du$.

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\Gamma(1) = 1$. En déduire ce que vaut $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$\Gamma(n+1) =$

2. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3 (Loi du ChiDeux(n)) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ on dit que $Y := X^2$ suit une loi du ChiDeux(1) et on note $Y \rightsquigarrow \chi^2_1$.

1. Montrer que $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$.

2. En déduire que $M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$.

3. Soient X_1, …, X_n des v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes. On dit que $Y_n := X_1^2 + \ldots + X_n^2$ suit une loi du ChiDeux(n) et on note $Y_n \rightsquigarrow \chi^2_n$. Que vaut $M_{Y_n}(t)$? (expliquez)

$M_{Y_n}(t) =$

On montre que $f_{Y_n}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$.