

Date :  
Université de Nice  
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :  
Année 2009-2010  
Licence MASS 2e année

Fiche TD 18  
Estimateurs au maximum de vraisemblance

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.*

**Exercice 1 (Loi bruitée)** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon de la forme

$$X_i = \frac{\theta}{i^\alpha} + \sigma Y_i$$

où  $\alpha$  et  $\sigma$  sont supposés connus et les  $Y_i$  sont i.i.d. gaussiennes, centrées, réduites, et  $\theta$  est le paramètre inconnu que l'on veut estimer.

1. Quelle est la densité  $f_{X_i}(x)$  de  $X_i$  ?
2. Déterminer la vraisemblance  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  et la log-vraisemblance  $l(x_1, \dots, x_n, \theta) =$  d'un tel échantillon

$L(x_1, \dots, x_n, \theta) =$	$l(x_1, \dots, x_n, \theta) =$
--------------------------------	--------------------------------

3. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ .

$\hat{\theta}_n =$
--------------------

4. Est-il biaisé ?

5. Est-il consistant ?

**Exercice 2 (Loi exponentielle)** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon indépendant de la loi de probabilité de densité  $f_\theta(x) := \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ ,  $\theta > 0$ .

1. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ .

$\hat{\theta}_n =$
--------------------

2. Est-il biaisé ?

3. Est-il consistant ?

**Exercice 3 (Loi uniforme de domaine inconnu)** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon de la loi de la loi uniforme (discrète) sur  $\{1, 2, \dots, \theta\}$ .

1. Que vaut  $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  pour  $x_i \in \mathbb{N}^*$  ?

2. Déterminer l'estimateur au maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ .

3. Quelle est sa loi  $F_{\hat{\theta}_n}(k)$  ?

4. L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est-il consistant ? (**Indication** : que vaut  $\mathbb{P}(\{\hat{\theta}_n < \theta\})$  ?

5. L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est-il biaisé?

6. Déterminer la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$  conditionnelle à  $\hat{\theta}_n = k$ .

7. Soit l'estimateur  $T := 2^{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)} - 1$  de  $\theta$ . Est-il biaisé? (**Indication** : écrire  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \exp \ln(\mathbb{E}(\hat{\theta}_n))$ ) et développer  $\ln(1 + u)$  à l'**ordre 2**.