

Date :
Université de Nice
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :
Année 2009-2010
Licence MASS 2e année

Fiche TD 19

Les punaises préfèrent-elles tomber sur le dos ?
Intervalle de confiance d'une estimation

Menez vos réflexions sur votre brouillon. Rédigez vos réponses sur cette feuille. *Encadrez finalement votre réponse.* Lorsqu'on vide une boîte de punaises sur la table, on a l'impression qu'une punaise manifeste une "préférence" p à tomber sur le dos plutôt que sur la pointe.

1. Proposer un modèle probabiliste pour décrire cette situation.
2. On vide une boîte de n punaises sur la table et on compte le nombre D_n de punaises tombées sur le dos. Donner un modèle probabiliste pour D_n .
3. Donner un estimateur P_n (ou \hat{P}_n) de p .
4. Ecrire P_n sous la forme $P_n = aZ_n + b$, où Z_n est proche en loi d'une v.a. $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$; que valent alors a et b (en fonction de p et n) ?
5. On a vidé une boîte de 54 punaises et on a trouvé $d_{54} = 30$ punaises sur le dos; quelle est l'estimation \hat{p} de p issue de cette expérience ?

6. On cherche un “intervalle de confiance au seuil $\alpha = 5\%$ ” du type $[P_n - \Delta, P_n + \Delta]$, c’est-à-dire tel que $\mathbb{P}(\{p \notin [P_n - \Delta, P_n + \Delta]\}) \leq \alpha = 5\%$. Montrer tout d’abord que

$$\{p \in [P_n - \Delta, P_n + \Delta]\} = \{P_n \in [p - \Delta, p + \Delta]\}.$$

7. Trouver z_- et z_+ tels que $\{P_n \in [p - \Delta, p + \Delta]\} = \{Z_n \in [z_-, z_+]\}$.

8. En déduire finalement une approximation (majoration) Δ de $\Delta_\alpha = \Delta_{5\%}$.

9. Peut-on affirmer qu’au vu de l’expérience et de ce calcul, *au seuil $\alpha = 5\%$, les punaises préfèrent tomber sur le dos ?*

10. Même question si on avait $n = 540$ et $d_{540} = 299$.

Edwin Moore, inventeur, en 1900, de la punaise :



Exercice 1 (Contrôle des fraudes) Un boulanger découpe sa pâte à l'aide d'une machine produisant des boules de masse μ réglable, et d'écart-type $\sigma = 20g$.

1. Un contrôle prélève un échantillon de 100 pains. Le poids total se révèle être de 38kg. On modélise le poids du i ème pain par une v.a. X_i , où les v.a. (X_i) sont i.i.d. d'espérance μ et d'écart-type σ . Au vu de l'échantillon, donner une estimation μ^* de μ et un intervalle de confiance $[\mu^* - \delta, \mu^* + \delta]$ au seuil

$\alpha = 5\%$ puis $\alpha = 1\%$ pour la valeur exacte de μ .

$[\mu^* - \delta, \mu^* + \delta] =$

2. On suppose que $\mu = 400g$; quelle est la probabilité π qu'un échantillon de 100 pains ait un poids total de moins de 38kg?

$\pi =$
