Erwann Aubry

Th de Gromov

On va montrer que $G=\langle S\rangle$ vérifie $\mathcal{H}_\alpha = \{ f : G \to \mathbb{R} \text{ harm tq } \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} < +\infty \}$

Th (Kleiner) Si $\lim_{R\to+\infty} \frac{V_R}{R^n} < +\infty$ alors

$$\dim \mathcal{H}_\alpha \leq (16|S|)^{150(n+\alpha)^2} = C(n,\alpha,|S|)$$ pas optimal

① Préliminaires : Soit V un sev de $\mathcal{H}_\alpha$ tq $K=\dim V<+\infty$

On pose $Q_R(f)=\int_{B_R}|f|^2$. On a $Q_R \geq Q_r \geq 0$ $\forall R\geq r$

donc $\operatorname{Ker} Q_R \subset \operatorname{Ker} Q_r$ et il existe $i_0\in\mathbb{N}$ tq $Q_R>0$ $\forall R\geq 16^{i_0}$.

Soit $B_0=(e_1,\dots,e_K)$ une base fixée de V. On pose $\det_R = \det(Q_R(e_i,e_j))_{i,j}$ $\forall R\geq i_0$

Rque : $\boxed{\det_R \text{ dépend du choix de } B_0 \text{ mais pas } \frac{\det_R}{\det_{R'}}}$

Lemme (Calibration) : Soit $a=8(n+\alpha)\ln 16$

$$W=16\alpha+16n+E\left(\frac{\ln|S|}{\ln 16}\right)+1.$$

Sous les hypothèses du th, il existe $16^{i_0}\leq R_1 \leq \frac{R_2}{4}$ tels que

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \leq \frac{1}{e^{4a}|S|^2} \qquad \frac{V_{8R_1}}{V_{R_1/2}} \leq e^a \qquad \frac{V_{16R_2}}{V_{R_1/2}} \leq e^{Wa} \leq \frac{C(n,\alpha,|S|)}{\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\det_{16R_2}}{\det_{R_2}}\right)^{1/K} \leq e^a$$

② Estimées sur les fonctions harmoniques :

Rappels $\begin{cases} G=\langle S\rangle \ |S|<+\infty \\ \Gamma \text{ graphe de Cayley de } G \end{cases}$

$$\forall R\in\mathbb{N}^* \quad \int_{B_R}|f-f_{B_R}|^2 \leq 8|S|^2R^2\frac{V_{2R}}{V_R}\int_{B_{3R}}|\nabla f|^2 \quad \text{où } f_R=\frac{1}{V_R}\int_{B_R} f \quad (1)$$

Si f est harmonique sur Γ, alors $\int_{B_r}|\nabla f|^2 \leq \frac{16}{(R-r)^2}\int_{B_R}|f|^2 \quad (2)$

Soit – $B_i = B(x_i, R_1)$, où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille maximale d'éléments de $B(R_2)\cap G$ tq $d(x_i, x_j) \geq R_1$ $\forall i \neq j$.

– $\phi : V \to \mathbb{R}^I$

$$f \mapsto \left(\frac{1}{V_{R_1}}\int_{B_i} f\right)$$

Lemme : $\dim \ker \phi \geq k - e^{Wa}$ et $\forall u \in \ker\phi$, on a

$$e^{2a} Q_{R_2}(u) \leq Q_{16R_2}(u)$$

Dém : On a $\#I \cdot V_{R_1/2} = Vol\left(\coprod_{i\in I} B\left(x_i, \frac{R_1}{2}\right)\right) \leq Vol\, B(e, 2R_2) \leq V_{16R_2}$

d'où $\#I \leq e^{aW}$. On en déduit (th du rang) $\dim \ker\phi \geq k - e^{Wa}$

On a – $B_{R_2} \subset \bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup_{i\in I} 3B_i \subset B_{2R_2}$

Si $g \in B(x_{i_1}, 3R_1) \cap \dots \cap B(x_{i_\ell}, 3R_1) \neq \emptyset$

alors $x_{i_j} \in B(x_{i_1}, 6R_1)$ $\forall j \leq \ell$

et donc $\ell \times V_{R_1/2} = Vol \coprod_{j\leq \ell} B(x_{i_j}, R_1/2) \leq Vol\, B(x_{i_1}, 8R_1) = V_{8R_1}$

d'où $\ell \leq e^a$

boules centrées en des pts de G
G agit par isom sur Γ donc valables

Si $u \in \ker\phi$, on a $Q_{R_2}(u) = \int_{B_{R_2}} u^2 \overset{B_{R_2}\subset \bigcup_{i\in I} B_i}{\leq} \sum_{i\in I} \int_{B_i}\left(u - \frac{1}{V_{R_1}}\overbrace{\int_{B_i} u}^{0}\right)^2$

$$\overset{(1)}{\leq} 8|S|^2 R_1^2 \overbrace{\frac{V(2R_1)}{V_{R_1}}}^{\leq e^a} \sum_{i\in I}\int_{3B_i} |\nabla f|^2$$

$$\leq 8|S|^2 R_1^2 e^{2a} \int_{(\cup 3B_i \subset B(2R_2))} |\nabla f|^2 \overset{(2)}{\leq} \frac{8\times 16}{14^2} |S|^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 e^{2a} \int_{B(16R_2)} u^2$$

$$\leq \frac{1}{e^{2a}} Q_{16R_2}(u)$$

(3) Démo du th de Kleiner :

Soit $(e_1, \ldots, e_K)$ une BON de V pour Q_{R_2} qui diagonalise Q_{16R_2}

$0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_K$ les vp associées

on a donc $\left(\frac{\det_{16R_2}}{\det_{R_2}}\right)^{1/K} = \left(\prod_{i=1}^{K} \lambda_i\right)^{1/K}$

or $|\lambda_i| = |Q_{16R_2}(e_i)| \geq |Q_{R_2}(e_i)| = 1 \quad \forall i \leq K$

si $K > e^{aW}$

alors il existe $v \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{e^{aW}+1}) \cap \mathrm{Ker}\,\phi \setminus \{0\}$

et $\frac{Q_{16R_2}(v)}{Q_{R_2}(v)} = \frac{\sum_{i \leq e^{aW}+1} \lambda_i v_i^2}{\sum_{i \leq e^{aW}+1} v_i^2} \geq e^{2a}$ d'où $\lambda_{e^{aW}+1} \geq e^{2a}$

On en deduit que

$$e^a \geq \left(\frac{\det_{16R_2}}{\det_{R_2}}\right)^{1/K} \geq \left(e^{2a}\right)^{1 - \frac{e^{aW}}{K}}$$

$\Downarrow$

$a \leq \left(1 - \frac{e^{aW}}{K}\right) 2a \quad \Rightarrow \quad K \leq 2e^{aW} \leq C(n, \alpha, |S|)$

(4) Démo du lemme de Calibration :

Rque : Soit $(e_1, \ldots, e_K)$ une BON de V pour Q_{16^i} qui diag Q_R

on a $\det_R^{1/K} = \left(\det_{16^i}\right)^{1/K} \left(\prod_{i=1}^{K} Q_R(e_i)\right)^{1/K} \leq \underset{Q_{16^i}(f)=1}{\mathrm{Max}}\, Q(f) \times \left(\det_{16^i}\right)^{1/K}$

or $\|f\|_\alpha = \sup_{x \in G \setminus \{e\}} \frac{|f(x) - f(e)|}{d(e,x)^\alpha} + |f(e)|$ est une norme sur V

et $|f(x)| \leq \|f\|_\alpha R^\alpha \quad \forall x \in B_R \quad \forall f \in V$

$$\Rightarrow \frac{\det_R^{1/K}}{R^{2\alpha} V_R} \leq \frac{1}{V_R} \underset{Q_{16^i}(f)=1}{\mathrm{Max}} \int_{B_R} \frac{f^2}{R^{2\alpha}} \leq \overbrace{\underset{Q_{16^i}(f)=1}{\mathrm{Max}} \|f\|_\alpha^2}^{\leq C < +\infty \ (\dim V \geq 1)} \quad \forall R \in \mathbb{N}^*$$

Soit $h(i) = \ln V_{16^i} \left(\det_{16^i}\right)^{1/K}$

On a $\quad h(i_0+3\omega i) - 2(n+\alpha)(i_0+3\omega i)\ln 16$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{V_{16^{i_0+3\omega i}}}{(16^{i_0+3\omega i})^n}\right)^2}_{=: C_i} + \underbrace{\ln\left(\frac{(\det_{16^{i_0+3\omega i}})^{1/K}}{(16^{i_0+3\omega i})^{2\alpha}\, V_{16^{i_0+3\omega i}}}\right)}_{\leq C}$$

or $\exists R_k \to +\infty$ tq $\begin{cases} \left(\frac{V_{R_k}}{R_k^n}\right)^2 \leq C \\ R_k \to +\infty \end{cases}$

Soit $i_k \in \mathbb{N}$ tq $16^{i_0+3\omega i_k} \leq R_k \leq 16^{3\omega} \cdot 16^{i_0+3\omega i_k}$

donc $\begin{cases} C_{i_k} \leq \ln\left[\left(\frac{V_{R_k}}{R_k^n}\right)^2 16^{6\omega}\right] \leq C \quad \forall i \\ i_k \to +\infty \end{cases}$

d'où $\displaystyle \varliminf_{i\to+\infty} h(i_0+3\omega i) - (2n+2\alpha)(i_0+3\omega i)\ln 16 < +\infty$

or $C \geq h(i_0+3\omega i_\ell) - (2n+2\alpha)(i_0+3\omega i_\ell)\ln 16 \quad - h(i_0)$

$$= \sum_{j=0}^{i_\ell - 1}\Big(h(i_0+3\omega(j+1)) - h(i_0+3\omega j) - (2n+2\alpha)3\omega\ln 16\Big)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{i_\ell-1} \frac{(2n+2\alpha)}{3} 3\omega\ln 16 \quad \text{pour } \ell \text{ assez grand}$$

donc $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tq $h(\underbrace{i_0+3\omega(j_0+1)}_{m+3\omega}) - h(\underbrace{i_0+3\omega j_0}_{=m}) \leq \underbrace{\frac{4}{3}(2n+2\alpha)3\omega\ln 16}_{= a\omega}$

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} h(m+i+2\omega+1) - h(m+2\omega+i) = h(3\omega+m) - h(m+2\omega) \underset{\text{car } h \text{ croît}}{\leq} a\omega$$

donc $\exists i_2 \in [\![m+2\omega, m+3\omega]\!]$ tq

$$h(i_2+1) - h(i_2) \leq a$$

De m̂ $\exists i_1 \in [\![m, m+\omega]\!]$ tq $h(i_1+1) - h(i_1) \leq a$

On pose $R_1 = 2\cdot 16^{i_1}$, $R_2 = 16^{i_2} \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4\cdot 16^{2(i_1-i_2)} \leq 16^{-2\omega} \leq \frac{1}{|S|^2 e^{4a}}$

Enfin $$h(j)-h(e) = \ln \underbrace{\frac{V_{16j}}{V_{16e}}}_{\geqslant 0} + \ln \underbrace{\left(\frac{\det_{16j}}{\det_{16e}}\right)^{1/\dim V}}_{\geqslant 0}$$

D'où les estimées sur le vol et le det du lemme de calibration.