zéro spectraux

s tq $\operatorname{Re} s \neq 1/2$, s pôle de τ ou $s(1-s)$ vp de Δ_{κ}

$s = 1/2$ ~~est~~ pôle de multiplicité $\operatorname{tr}\left(S_{\chi}(1/2) + \frac{n_c}{2}\right) + 2\,\mathrm{mult}(\lambda = 1/4)$

autre possibilité prolonga méromorphe $s \mapsto [\Delta - s(1-s)]^{-1}$

$s - s^2 = x = 0$

$\Delta = -b^2$

Formules de Trace de Selberg

~~Cas~~ compact

I Rappels sur les surfaces hyperboliques

(S,g) surface hyperbolique orientable. $\pi : \tilde{S} \to S$ son revêtement universel (ie $\tilde{S}$ simplement connexe). $\tilde{g} = \pi^* g$ métrique hyp complète (Hadamard) $\Rightarrow (\tilde{S}, \tilde{g}) = (\mathbb{H}^2, \mathrm{can})$.

Isométries de $(\mathbb{H}^2, \mathrm{can})$: $\quad \mathbb{H}^2 = \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\right)$ on a $\operatorname{ch} d(z,z') = 1 + \frac{|z - z'|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} z'}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \in PSL_2(\mathbb{R}) \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$ isom de $(\mathbb{H}^2, \mathrm{can})$

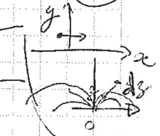
$PSL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^2$ et ~~le~~ sous gpe d'isotropie de i agit transitivement sur $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ on a toutes les isométries directes.

3 types : * elliptiques fixent 1 seul pt et dans $\mathbb{H}$ conjuguées à

* paraboliques fixent 1 seul pt et dans $\partial\mathbb{H}$

* hyperboliques fixent 2 pts (dans $\partial\mathbb{H}$)

Modèle du disque



Modèle du demi plan

Gpe de revt On note $\Gamma = \{ T : \tilde{S} \xrightarrow{C^0} \tilde{S} \,/\, \pi \circ T = \pi \}$.

alors T C^∞ et $T^* \tilde{g} = (\pi \circ T)^* g = \pi^* g = \tilde{g}$ ie $T \in PSL_2(\mathbb{R})$.

Prop : Γ agit propt, discont sans pt fixe sur $\mathbb{H}^2$

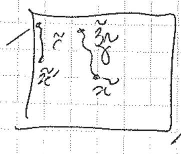
$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 = (S,g)$, $\Gamma < PSL_2(\mathbb{Z})$ discret.

Démo $\forall \tilde{x} \in \mathbb{H}^2$ $\quad \Gamma \cdot \tilde{x} \subset \pi^{-1}(\pi(x))$

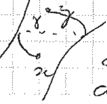
si $\tilde{x}' \in \pi^{-1}(\pi(\tilde{x}))$ et $\tilde{z} \in \mathbb{H}^2$, soit $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{H}^2$

tq $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ et $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{z}$ $\quad \gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ et $\tilde{c}$ tq $\begin{cases} \tilde{c}(0) = \tilde{x}' \\ \pi \circ \tilde{c} = \gamma \end{cases}$

$T_{\tilde{z}}$



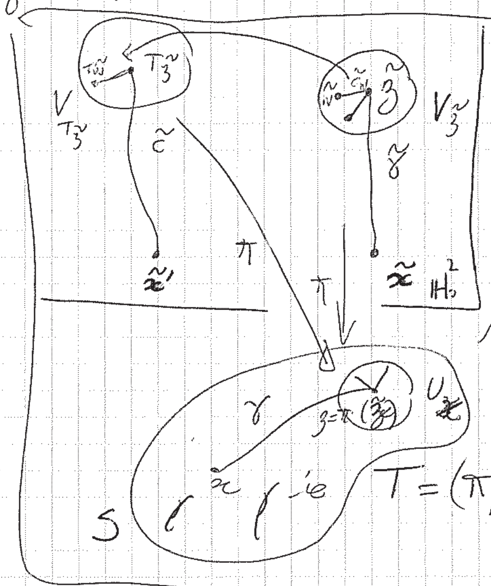
On pose alors $T\tilde{z} = \tilde{c}(1)$



$\pi \circ T \tilde{z} = \pi \circ \tilde{c}(1) = \gamma(1) = \pi(\tilde{z})$

Comme le relevé de $\tilde{c}$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\gamma}$ On obtient que T est C^∞ donc un elt de Γ

enfin $T(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ évidement



$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{C}(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$

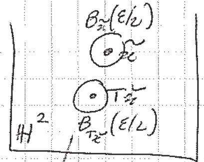
$\tilde{\gamma}(t) = (\pi_{|V_{T\tilde{z}}})^{-1} \circ \pi_{|V_{\tilde{z}}} (\tilde{C}_w(2t-1))$ si $t \geq 1/2$

relevé de $\gamma \# \pi \circ \tilde{c}_w$ issu de $\tilde{x}$

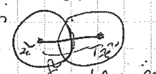
ie $T = (\pi_{|V_{T\tilde{z}}})^{-1} \circ \pi_{|V_{\tilde{z}}}$ sur $V_{\tilde{z}}$ $\Rightarrow T \in C^0$

donc $\Gamma . \tilde{x} = \pi^{-1}(\pi(x))$ ie $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$

les orbites sont discrètes car



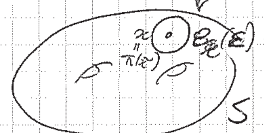
Si $B_{\tilde{x}}(\varepsilon/2) \cap B_{T\tilde{x}}(\varepsilon/2) \neq \phi$



$\tilde{\gamma}$ géod minimisante $\subset \bigcup B_{\tilde{x}}(\varepsilon/2) \cup B_{T\tilde{x}}(\varepsilon/2)$

$\Rightarrow \pi \circ \tilde{\gamma}$ géodésique de S de $\pi(\tilde{x})$ à $\pi(T\tilde{x}) = x$ de longueur $\leq \varepsilon$ et non injective

or pour ε petit $B_0(\varepsilon) \xrightarrow{\exp_x} B_x(\varepsilon)$ injective



Orbites disjointes $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{H}^2$ tq $\tilde{x} \notin \Gamma \tilde{y}$

$\Rightarrow x = \pi(\tilde{x}) \neq \pi(\tilde{y}) = y$ Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$B_x(\varepsilon) \cap B_y(\varepsilon) = \phi$

alors $\Big(\bigcup_{T \in \Gamma} B_{T.\tilde{x}}(\varepsilon)\Big) \cap \Big(\bigcup_{T \in \Gamma} B_{T.\tilde{y}}(\varepsilon)\Big) = \phi$

$\overset{\pi}{=} B_x(\varepsilon)$, $\overset{\pi}{=} B_y(\varepsilon)$.

Domaine fondamental

Def Soit Γ un groupe agissant sur $\mathbb{H}^2$ par isom

On appelle domaine fondamental de Γ toute partie mesurable F de $\mathbb{H}^2$ telle que

1. $\bigcup_{g \in \Gamma} g . F = \mathbb{H}^2$

2. $\exists \Omega \subset F$ mesurable tq $dV_{\mathbb{H}^2}(F \setminus \Omega) = 0$ et $g\Omega \cap \Omega = \phi$ $\forall g \in \Gamma$ (ie $g\Omega \cap g'\Omega = \phi$ $\forall g \neq g'$)

Expl Domaine de Dirichlet

Soit $\tilde{z} \in \mathbb{H}^2$, On pose $F_{\tilde{z}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{H}^2 / d(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq d(\tilde{x}, g.\tilde{z}) \ \forall g \in \Gamma\}$

$F_{\tilde{z}}$ est fermé dans $\mathbb{H}^2$.

Comme $\Gamma_{\tilde{z}} = \{g.\tilde{z}, g \in \Gamma\}$ est discret, $\forall \tilde{x} \in \mathbb{H}^2, \exists g_0 \in \Gamma$ tq

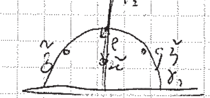
$d(\tilde{x}, F\tilde{z}) = d(\tilde{x}, g_0 \tilde{z}) \Rightarrow d(g_0^{-1}\tilde{x}, g\tilde{z}) = d(\tilde{x}, g_0 g \tilde{z}) \geq d(\tilde{x}, g_0 \tilde{z}) = d(g_0^{-1}\tilde{x}, \tilde{z})$

$\Rightarrow g_0^{-1} \tilde{x} \in F_{\tilde{z}} \Rightarrow \tilde{x} \in g_0 . F_{\tilde{z}}$ $\forall g \in \Gamma$

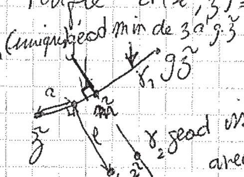
Donc $\mathbb{H}^2 \subset \bigcup_{g \in \Gamma} g . F_{\tilde{z}}$

On pose $\Omega = \mathring{F}_{\tilde{z}}$. Si $\tilde{x} \in \mathbb{H}^2$ vérifie $d(\tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, g.\tilde{z})$ pour $g \in \Gamma \setminus \{e\}$

alors $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{H}^2 \setminus F_{\tilde{z}}}$ car



γ_1 (unique) géod min de $\tilde{z}$ à $g.\tilde{z}$

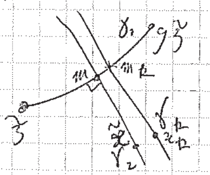


γ_2 géod issue du pt milieu m avec angle droit

Alcashi : $ch\, d(\tilde{z}, \tilde{w}) = ch\, a + ch\, l$ donc $\tilde{x} \in \gamma_2$

Soit l tq $\tilde{x} = \gamma_2(l')$ $\quad m_k \in \gamma_1$ tq $d(g\tilde{z}, m_k) = \frac{d(\tilde{z}, g\tilde{z})}{2} - \frac{1}{k}$

et $x_k = \gamma_k(l)$ où γ_k géod issue de m_k à angle droit



On a $x_k \to x$ et $ch\, d(g\tilde{z}, x_k) = ch\, l + ch\Big(\frac{d(\tilde{z}, g\tilde{z})}{2} - 1/k\Big)$

$< ch\, l + ch\Big(\frac{d(\tilde{z}, g\tilde{z})}{2} + \frac{1}{k}\Big)$

$= ch\, d(\tilde{z}, x_k)$

ie $x_k \in \mathbb{H}^2 \setminus F_{\tilde{z}}$

$\Rightarrow \tilde{x} \in \overline{\mathbb{H}^2 \setminus F_{\tilde{z}}}$

On en déduit que $\mathring{F}_{\tilde{z}} \subset \{\tilde{x} \in \mathbb{H}^2 / d(\tilde{x}, \tilde{z}) < d(\tilde{x}, g.\tilde{z}),\ \forall g \in \Gamma \setminus \{e\}\}$.

Si $x \in \Omega \cap g^{-1}\Omega$ alors $x, gx \in \Omega$

alors $d(x,z) < d(g^{-1}z, x) = d(z, gx) < d(gz, gx) = d(z,x)$

car $x \in \Omega$, $g^{-1} \neq e$; car $gx \in \Omega$, $g \neq e$

absurde

Enfin, si $\tilde{x} \in \partial F = F \setminus \Omega$ alors $\exists x_n \in \mathbb{H} \setminus F$ tq $x_n \to x$

ie $\exists g_n \in \Gamma \setminus \{id\}$ tq $d(g_n \tilde{z}, \tilde{x}_n) < d(\tilde{x}_n, \tilde{z})$ $(*)$

or $g_n \tilde{z}$ est alors bornée et comme $\Gamma . \tilde{z}$ discret, $g_n \tilde{z}$ est cste quitte à extraire $(= g\tilde{z})$ et en passant à la limite dans $(*)$ on obtient

$d(\tilde{x}, g\tilde{z}) \leq d(\tilde{x}, z)$ avec $g \neq e$

or $x \in F$ donc $d(\tilde{x}, g\tilde{z}) \geq d(\tilde{x}, \tilde{z})$

d'où $d(\tilde{x}, g\tilde{z}) = d(\tilde{x}, \tilde{z})$

On en déduit que $\partial F = \{ \tilde{x} \in \mathbb{H}^2 \,/\, d(\tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, g\tilde{z})$ pour au moins 1 $g \in \Gamma \setminus \{id\}\}$

$$\subset \underbrace{\bigcup_{g \in \Gamma \setminus \{e\}} \{ \tilde{x} \in \mathbb{H}^2 / d(\tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, g\tilde{z}) \}}_{\text{dénombrable géodésique de } \mathbb{H}^2 \text{ donc de mesure nulle}}$$

$\Rightarrow dV_{\mathbb{H}^2}(\partial F) = 0$

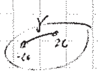
Prop Si $f : S \to \mathbb{R}$ est mesurable et $F \subset \mathbb{H}^2$ domaine fondamental du groupe Γ_S alors $\int_S f \, dV_S = \int_F f \circ \pi_S \, dV_{\mathbb{H}^2}$

Démo : $F \setminus \Omega$ de mesure nulle donc tout $\tilde{F}$ tq $\Omega \subset \tilde{F} \subset F$ est mesurable. Soit $\tilde{F}$ tq $\pi_{|\tilde{F}}$ soit une bijection de $\tilde{F}$ sur S

alors $\int_F f\pi = \int_{\tilde{F}} f\pi = \int_S f$.

Prop Si S est compacte alors Γ_S ne contient que des éléments hyperboliques.

Démo Soit $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}^2$ et $\tilde{x} \in \mathbb{H}^2$ tq $d(\tilde{x}_0, \tilde{x}) > \mathrm{diam}(S)$. Alors $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{x}_0)) \leq \mathrm{diam}\, S$

Soit γ une géod de S minimisante de $\pi(\tilde{x})$ à $\pi(\tilde{x}_0)$ $\square$  à $\tilde{\gamma}$ le relevé à $\mathbb{H}^2$

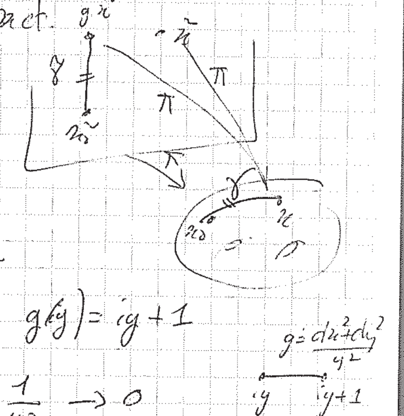
issu de $\tilde{x}_0$ alors $\pi(\tilde{\gamma}(d(x_0,x))) = \gamma(d(x_0,x)) = x$

ie $\tilde{\gamma}(d(x_0,x)) = g.\tilde{x}$ pour $g \in \Gamma$

et $d(\tilde{x}_0, g\tilde{x}) = d(x_0, x) \leq \mathrm{diam}\, S < d(\tilde{x}_0, \tilde{x})$

$\Rightarrow \tilde{x} \notin F_{\tilde{x}_0}$

$\Rightarrow F_{\tilde{x}_0} \subset B^{\mathbb{H}^2}_{\tilde{x}_0}(\mathrm{diam}\, S) \Rightarrow F_{\tilde{x}_0}$ est compact



Soit $\eta = \inf_{\substack{z \in F \\ g \in \Gamma \setminus id}} d(\tilde{z}, g\tilde{z}) > 0$ car $\begin{cases} F \text{ compact} \\ \Gamma . \tilde{z} \text{ discret} \end{cases}$

$= \inf_{\substack{z \in \mathbb{H}^2 \\ g \in \Gamma \setminus id}} d(\tilde{z}, g\tilde{z})$

car $\bigcup_g g.F = \mathbb{H}^2$ + g isom

On si g est parabolique

alors à conjugaison près $g(iy) = iy + 1$

et donc $d(iy, g(iy)) \leq \frac{1}{y^2} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow \underbrace{\inf_{y>0} d(iy, g.(iy))}_{\eta} = 0$ absurde

Géodésiques fermées et éléments hyperboliques

Soit S une surface hyperbolique complète.

Γ le groupe du revêtement $\pi_S : \mathbb{H}^2 \to S$

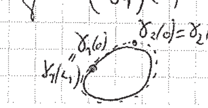
Γ_{hyp} l'ensemble des éléments hyperboliques de Γ.

Def Une géodésique $\gamma : [0,L] \to S$ (normale, ie tq $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$) est dite fermée ssi on a $\begin{cases} \gamma(0) = \gamma(L) \\ \gamma'(0) = \gamma'(L) \end{cases}$ ssi $\gamma : \mathbb{R} \to S$ est L-périodique

Si P est sa période primitive, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $L = k \times P$

On dit que $\gamma_{|[0,P]}$ est la géodésique primitive associée à $(\gamma, [0,L])$

(I) Dans la suite on identifie $(\gamma_1, [0, L_1])$ et $(\gamma_2, [0, L_2])$ ssi $\begin{cases} L_1 = L_2 \\ \gamma_1([0,L_1]) = \gamma_2([0,L_2]) \\ \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ ont même orientation} \end{cases}$



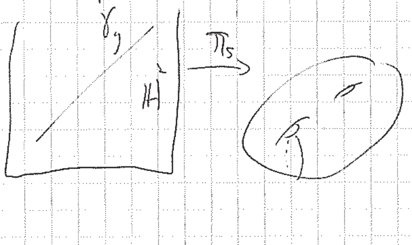
Rque : Si $(\gamma_1,[0,L_1]) = (\gamma_2,[0,L_2])$ et $(c_i,[0,P_i])$ primitive tq $\gamma_i = k_i$ fois c_i alors $k_1 = k_2$ et $(c_1,[0,P_1]) = (c_2,[0,P_2])$ (on a $L_i = k_i P_i$, $\gamma_1(t) = \gamma_2(t+t_0)$, $L_1 = L_2$, $P_1 = P_2$ = période de γ_1 et γ_2 $\Rightarrow k_1 = k_2$, $c_1([0,P_1]) = c_2([0,P_1])$).

Prop $\forall g \in \Gamma_{hyp}$, g stabilise une unique géodésique de $\mathbb{H}^2$, notée $\tilde{\gamma}_g$

De plus $\Phi : \Gamma_{hyp} \longrightarrow$ géod fermée de S

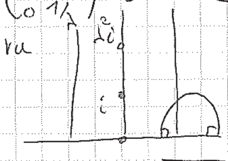
$$g \longmapsto \left(\gamma_g = \pi \circ \tilde{\gamma}_g,\ \left[0, 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g}{2}\right)\right]\right)$$

est surjective et vérifie $\Phi^{-1}(\Phi(g)) = [g]_{\Gamma} = \{h^{-1} g h,\ h \in \Gamma\}$.



Démo À conjugaison par une isométrie de $\mathbb{H}^2$ près, g est égal à $g(z) = \lambda^2 z$ (ie associée à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{R})$)

alors au vu des géod de $\mathbb{H}^2$



on constate que seule $i\mathbb{R}_+^*$ est stable par g (on a alors $\tilde{\gamma}_g(t) = e^t i$)

On a alors $\boxed{g \cdot \tilde{\gamma}_g(t) = \tilde{\gamma}_g(t + \ln \lambda^2)}$ (*)

$\lambda^2 e^t i$

On note $\gamma_g(t) = \pi \circ \tilde{\gamma}_g(t)$ on a $\gamma_g(0) = \gamma_g(\ln \lambda^2)$

et $\gamma_g'(0) = d_i\pi(\tilde{\gamma}_g'(0)) = d_i\pi(i)$

$\gamma_g'(\ln \lambda^2) = d_{\lambda^2 i}\pi(e^{\ln \lambda^2} i) = d_{\lambda^2 i}\pi \circ d_i g(i)$

$\quad = d_{\lambda^2 i}\pi(\tilde{\gamma}_g'(\ln \lambda^2))$ $\quad = d_i(\pi \circ g)(i) = d_i\pi(i)$

donc γ_g est $\boxed{\ln \lambda^2 = 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g}{2}\right)}$-périodique

Donc Φ est bien définie. (**) (rque les param normale orientée de $\tilde{\gamma}_g$ sont unique à translation près de t donc Φ bien définie sur (Γ))

Si $\begin{cases} g_2 = h g h^{-1} \text{ est hyp et stabilise } h \cdot \tilde{\gamma}_g \text{ alors } \Phi(hgh^{-1}) = \pi(h \tilde{\gamma}_g) \\ \text{avec } h \in \Gamma_S \end{cases}$

$\qquad = \pi \circ \tilde{\gamma}_g$

et $\mathrm{tr}\, hgh^{-1} = \mathrm{tr}\, g$

donc $\Phi(hgh^{-1}) = \Phi(g)$

réciproque Si $(\gamma,[0,L])$ est une géod fermée de S, on note $\tilde{z}_0 \in \mathbb{H}^2$ tq $\pi(\tilde{z}_0) = \gamma(0)$ et $\tilde{\gamma}$ le relevé de γ à $\mathbb{H}^2$ issu de $\tilde{z}_0$.

Alors $\tilde{\gamma}$ est une géodésique de $\mathbb{H}^2$ et $\pi \circ \tilde{\gamma}(L+t) = \pi \circ \tilde{\gamma}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\qquad \gamma(L+t) \qquad \gamma(t)$

en particulier $\pi_S \circ \tilde{\gamma}(L) = \pi_S \circ \tilde{\gamma}(0)$ donc $\exists g \in \Gamma_S$ tq $\tilde{\gamma}(L) = g \cdot \tilde{\gamma}(0)$.

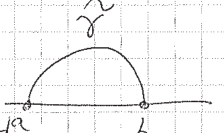
alors $\begin{cases} \tilde{\gamma}_2(t) = g \cdot \tilde{\gamma}(t) \\ \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}(t+L) \end{cases}$ sont 2 géod de $\mathbb{H}^2$ relevées de γ

issues de $\tilde{\gamma}(L)$ $\left(\begin{array}{l} \pi \circ \tilde{\gamma}_2(t) = \pi \circ g(\tilde{\gamma}(t)) = \pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) \\ \pi \circ \tilde{\gamma}_1(t) = \gamma(t+L) = \gamma(t) \end{array} \right)$

donc $g \cdot \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t+L)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

l'isométrie g fixe donc $a = \lim_{-\infty} \tilde{\gamma}(t)$ et $b = \lim_{+\infty} \tilde{\gamma}(t)$ dans $\partial \mathbb{H}^2$

donc $g \in \Gamma_{hyp}$



Enfin, $L = \ell(\gamma)$ car γ est normale

$= \ell(\tilde{\gamma}) = d(\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(L))$ car les géod de $\mathbb{H}^2$ sont minimisantes

$= d(\tilde{\gamma}(0), g \cdot \tilde{\gamma}(0))$

$= 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g}{2}\right)$

car g conj à $z \mapsto \lambda^2 z$ et $d(\tilde{\gamma}(0), \lambda^2 \tilde{\gamma}(0)) = \int_0^{\ln \lambda^2} \frac{\left|\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(0) e^t\right| dt}{|\tilde{\gamma}(0) e^t|} = \ln \lambda^2 = 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g}{2}\right)$

On a donc bien $\Phi(g) = \gamma$

Enfin, Si $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ alors $\exists t_1 \in \left[0, 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g_2}{2}\right)\right]$ tq

$\begin{cases} \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_1}(0) = \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_2}(t_1) \\ \text{or } \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_2}([0,L_1]) = \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_2}([0,L_2]) \\ + \text{m orientat} \end{cases} \Longrightarrow \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_1}(t) = \pi \circ \tilde{\gamma}_{g_2}(t_1 + t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$L_i = 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{\mathrm{tr}\,g_i}{2}\right)$

En appliquant le même raisonnement, $\exists! h \in \Gamma_S$ tq $\tilde{\gamma}_{g_1}(0) = h\, \tilde{\gamma}_{g_2}(t_1)$

alors $\tilde{\gamma}_{g_1}(t) = h\, \tilde{\gamma}_{g_2}(t_1 + t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

car $L_1 = L_2$

donc $\tilde{\gamma}_{g_1}(L_1) = h.\tilde{\gamma}_{g_2}(L_1 + t_1) = h.\tilde{\gamma}_{g_2}(L_2 + t_1) = h.g_2\,\tilde{\gamma}_{g_2}(t_1)$
$= h.g_2.h^{-1}\tilde{\gamma}_{g_1}(0)$

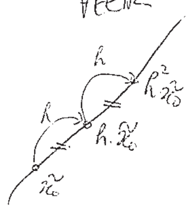
cf (*) et (**) $\rightarrow$ $\overset{\|}{g_1 \cdot \tilde{\gamma}_{g_1}(0)}$

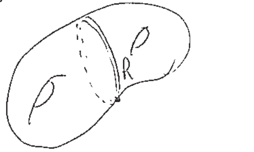
or Γ agit sans pt fixe donc $g_1 = h.g_2\,h^{-1} \in [g_2]$

Def $g \in \Gamma_{hyp}$ n'est pas primitif ssi $\exists h \in \Gamma_{hyp}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tq $g = h^k$.

Prop g est prim ssi $\phi(g)$ est une géodesique primitive.

Démo : ~~de~~ $g = h^k$ $\phi(g)$ stabilise la géodesique $\tilde{\gamma}_h$ donc par unicité $\tilde{\gamma}_h(t) = \tilde{\gamma}_g(a+t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\tilde{\gamma}_h$ $h^k.\tilde{x}_0 = g\tilde{x}_0$





donc $2\,\mathrm{argch}\left(\frac{t_g}{2}\right) = k \times 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{t_h}{2}\right)$

$\overset{\|}{d(\tilde{x}_0, g\tilde{x}_0)} = d(\tilde{x}_0, h\tilde{x}_0) + \dots + d(h^{k-1}\tilde{x}_0, h^k\tilde{x}_0) = k\,d(\tilde{x}_0, h.\tilde{x}_0)$

et $\phi(g)$ est égal à $\phi(h)$ suivie k-fois, ie de période $k \times$ période de $\phi(h)$
donc $\phi(g)$ n'est pas primitive.

- Si $\phi(g)$ n'est pas primitive, alors il existe $h \in \Gamma \setminus \{e\}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tq $\phi(g)$ soit $\phi(h)$ suivie k fois.

donc $\tilde{\gamma}_g(t) = \tilde{\gamma}_h(a+t)$ et $\tilde{\gamma}_g(L_g) = \tilde{\gamma}_g(kL_h) = h.\tilde{\gamma}_h(kL_h - L_h + a)$
$\overset{\|}{g\tilde{\gamma}_g(0)}$ $= h^k\tilde{\gamma}_h(a) = h^k.\tilde{\gamma}_g(0)$

comme Γ agit sans point fixe, on a $g = h^k$
et donc g n'est pas primitif.

Def Soit $\Pi_S = \{$ensemble des géodesique orientées primitives fermées de $S\}$.

$\Pi_{\Gamma} = \{1$ rep $g_\gamma \in \Gamma_{hyp}$ tq $\phi(g_\gamma) = \gamma$ $\forall \gamma \in \Pi_S\}$.

$\forall g \in \Pi_{\Gamma}$, on note $(R_i^{(g)})_{i \in I_g}$ un système de représentant des classes à droite du commutant $Z(g)$ de g dans Γ.

Prop $\Gamma_{hyp} \setminus \{e\} = \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \coprod_{g \in \Pi_\Gamma} \coprod_{i \in I_{g_\gamma}} (R_i^{(g_\gamma)})^{-1} g_\gamma\, R_i^{(g_\gamma)}$

Démo $\forall g \in \Gamma_{hyp} \setminus \{e\}$, $\exists!\,(\gamma, k) \in \Pi_S \times \mathbb{N}^*$ tq $\phi(g) = \gamma$ suivie k-fois $= \phi(g_\gamma^k)$

ie $\forall g \in \Gamma \setminus \{e\}$, $\exists!\,(g_\gamma, k) \in \Pi_\Gamma \times \mathbb{N}^*$ tq $g = h^{-1} g_\gamma^k h$ pour au moins 1 $h \in \Gamma$

or il existe $c \in Z(g_\gamma)$ et $i \in I_{g_\gamma}$ tq $h = cR_i^{(g_\gamma)}$.

et donc $g = R_i^{(g_\gamma)^{-1}} (g_\gamma)^k R_i^{(g_\gamma)}$

ie $\Gamma_{hyp} \setminus \{e\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\gamma \in \Pi_S} \bigcup_{i \in I_{g_\gamma}} (R_i^{(g_\gamma)})^{-1} g_\gamma^k R_i^{(g_\gamma)}$

Si $(R_{j_1}^{(\gamma_1)})^{-1} g_{\gamma_1}^{k_1} R_{j_1}^{(\gamma_1)} = (R_{i_2}^{(\gamma_2)})^{-1} g_{\gamma_2}^{k_2} R_{i_2}^{(\gamma_2)}$

alors $k_1 \times \phi(g_{\gamma_1}) = k_2 \times \phi(g_{\gamma_2})$

ie k_1 fois $\gamma_1 = k_2$ fois γ_2

donc $\gamma_1([0, L_1]) = \gamma_2([0, L_2])$ et la géodesique associée est de période $L_1 = L_2$ $= (\gamma_1, [0, L_1]) = (\gamma_2, [0, L_2])$ et enfin $k_1 = k_2 = k$

On a alors $R_{i_2}^{g_\gamma} (R_{j_1}^{g_\gamma})^{-1} \in Z(g_\gamma^k) = Z(g_\gamma)$ d'après le lemme suivant. d'où $i_2 = j_1$

On en déduit que la réunion est bien disjointe.

Lemme : Si g est un element primitif de Γ_{hyp}, alors
$$Z(g^k) = \{g^\ell, \ell \in \mathbb{Z}\} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Démo. Si $h \in Z(g^k)$ et a, b sont les pts fixes de g^k alors $h(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$ et $h^2(a) = a$ $h^2(b) = b$
ie h^2 est hyperbolique $\Rightarrow$ h hyperbolique (car ne peut etre elliptique dans Γ_S)

ie $Z(g^k) \subset \underbrace{\{h \text{ hyperbolique de m axe que } g\}}_{\text{Spe à 1 param réelle}} \cap \Gamma_S = \underbrace{\{g_0^k, k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{discret}}$

avec $g_0 \in \Gamma_S$. Donc $Z(g^k) = \{g_1^k, k \in \mathbb{Z}\}$ avec $g_1 \in Z(g^k)$
or $g \in Z(g^k)$ donc $g = g_1^{\pm \ell}$ et g primitif $\Rightarrow g = g_0$
D'où $Z(g^k) = \{g_0^\ell, \ell \in \mathbb{Z}\} \subset Z(g)$.

Def Spectre des longueurs de S : $\mathcal{L}_S = \{\ell(\gamma), \gamma \in \pi_S\}$.
$= \{\operatorname{argch}(\frac{\operatorname{tr} s}{2}), s \in \pi_S\}$

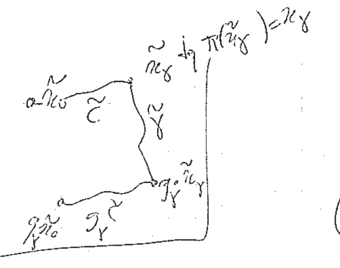
comptées avec multiplicités (qui sont toutes paires car 2 orientat° pour chaque géodésiques primitives).

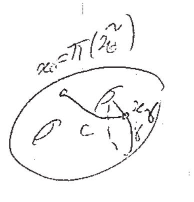
Prop : Si S est compacte, on a
$$\begin{cases} \#\overbrace{\{\gamma \in \pi_S / \ell(\gamma) \leq t\}}^{A(t)} = O(e^t) \\ \#\underbrace{\{g \in \Gamma / d(\tilde{\omega}, g.\tilde{\omega}) \leq t\}}_{B(t)} = O(e^t) \end{cases}$$
($\tilde{\omega}$ fixé dans $\mathbb{H}^2$)

Démo : Soit $\tilde{\omega} \in \mathbb{H}^2$ fixé, $F_{\tilde{\omega}}$ son domaine de Dirichlet et $\varepsilon > 0$ tq $B_{\tilde{\omega}}(\varepsilon) \subset \mathring{F}_{\tilde{\omega}}$ (par exemple $\varepsilon = \frac{\operatorname{inj}(S)}{2}$).

alors $\underbrace{\bigcup_{g \in B(t)} g \cdot B_{\tilde{\omega}}(\varepsilon)}_{\text{disjointes comme } (g \mathring{F}_{\tilde{\omega}})_{g \in \Gamma_S}} = \bigcup_{g \in B(t)} B_{g\tilde{\omega}}(\varepsilon) \subset B_{\tilde{x}}(t+\varepsilon)$

$\Rightarrow \# B(t) \operatorname{Vol} B_{\tilde{\omega}}(\varepsilon) = \operatorname{Vol}(\bigcup g . B_{\tilde{\omega}}(\varepsilon)) \leq \operatorname{Vol} B_{\tilde{x}}(t+\varepsilon) = O(e^t)$
$\Rightarrow \# B(t) = O(e^t)$ $\qquad 2\pi(\operatorname{ch}(t+\varepsilon) - 1)$





Soit $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}^2$ fixé et $\gamma \in A(t)$. On fixe $x_\gamma \in \gamma$ et c une geod min de x_0 à x_γ, $\tilde{c}$ son relevé issu de $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}_\gamma$ sa deuxième extremité.
alors $d(\tilde{x}_0, \tilde{x}_\gamma) \leq d = \operatorname{diam}(S)$
Si g_γ est l'élément de Π_S associé à γ, on a
$$d(\tilde{x}_0, g_\gamma \tilde{x}_0) \leq d(\tilde{x}_0, \tilde{x}_\gamma) + d(\tilde{x}_\gamma, g_\gamma \tilde{x}_\gamma) + d(g_\gamma \tilde{x}_\gamma, g_\gamma \tilde{x}_0)$$
$$\leq 2 \operatorname{diam} S + \ell(\gamma)$$

donc $\bigcup_{g \in A(t)} B_{g \tilde{x}_0}(\varepsilon) \subset B_{\tilde{x}_0}(\varepsilon + 2\operatorname{diam} S + t)$.
$\qquad \| $
$\bigcup_{g \in A(t)} g B_{\tilde{x}_0}(\varepsilon)$ $\Rightarrow \# A(t) \operatorname{Vol} B_{\tilde{x}_0}(\varepsilon) \leq \operatorname{Vol} B_{\tilde{x}_0}(\varepsilon + 2\operatorname{diam} S + t)$
$\Rightarrow \# A(t) = O(e^t)$

formule sommatoire de Poisson

Th Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $H^{1+\delta}$ et tq $f \in O\left(\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right)$ pour $\delta, \varepsilon > 0$

alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2 \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(2\pi n t) dt + \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$.

Démo Soit $K(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x-y+m)$ qui est C^0 sur $\mathbb{R}^2$ par hyp sur f et $\mathbb{Z}^2$-périodique. Donc K passe au quotient sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et définit $L : L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$
$$g \mapsto \left(y \mapsto \int_0^1 K(x,y) g(x) dx\right)$$
L est un operateur intégral de Fredholm
On a $L(e^{i2\pi k x}) = \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x-y+m) e^{i2\pi k x} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x-y+m) e^{i2\pi k x} dx$
$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{m-y}^{m-y+1} f(u) e^{i2\pi k(u+y-m)} = e^{i2\pi y k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i2\pi k u} = e^{i2\pi y k} \hat{f}(k)$

On $(e^{2\pi i k x})_{k\in\mathbb{Z}}$ base de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ $\Rightarrow$ L diagble et

$$\mathrm{Tr}(L) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(k).$$

de plus, $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 K(x,y)e^{-2\pi i k x} e^{+2\pi i k' y}\,dx\,dy = \hat{f}(k)\,\delta_{k,k'} \quad \forall k,k'$

donc $\displaystyle K(x,y) \underset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} e^{-2\pi i k y}$

or $\hat{f}(k) = O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right)$ donc l'égalité précédente est une égalité entre fonction C^0 dans L^2 ie une égalité entre fonction C^0.

d'où $\displaystyle\int_0^1 K(x,x)\,dx = \int_0^1 \sum_k \hat{f}(k) e^{2\pi i x 0} = \sum_k \hat{f}(k)$

enfin, on a $\displaystyle\int_0^1 K(x,x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)$

<u>Exple</u> :

Si $f(x) = e^{-2\pi r|x| - \pi i x}$

on a $\displaystyle\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi r|x| - \pi i x - 2\pi i t x}\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(2\pi r + i\pi + 2\pi i t)}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(2\pi r - i\pi - 2\pi i t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2r + i(1+2t)} + \frac{1}{2r - i(1+2t)}\right) = \frac{2r}{\pi(r^2 + (1+2t)^2)}$$

d'où $\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4r}{4r^2 + (1+2k)^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r}{r^2 + (k+\frac{1}{2})^2}$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) = 1 + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(-e^{-2\pi r}\right)^k$$

$$= 1 + 2\times\frac{(-e^{-2\pi r})}{1 + e^{-2\pi r}} = \frac{1 - e^{-2\pi r}}{1 + e^{-2\pi r}} = \frac{\operatorname{sh}\pi r}{\operatorname{ch}\pi r}$$

Δ $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2r}{r^2 + (k+\frac{1}{2})^2} = \pi \operatorname{th}\pi r$

En particulier, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin r\rho}{\operatorname{sh}\rho/2}\,d\rho = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ir\rho} - e^{-ir\rho}}{i(e^{\rho/2} - e^{-\rho/2})} = \int_0^{+\infty} e^{ir\rho - \rho/2}(1 - e^{-2ir\rho}) \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-k\rho}$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^{+\infty} e^{(ir - 1/2 - k)\rho} - \int_0^{+\infty} e^{(-ir - 1/2 - k)\rho}$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k + 1/2 - ir} - \frac{1}{k + 1/2 + ir}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2r}{r^2 + (k+1/2)^2} = \pi \operatorname{th}\pi r$$

<u>Cas d'une surface hyperbolique compacte $S = \Gamma_S\backslash\mathbb{H}$</u>

<u>Prop</u> : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $|f| \in O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ et f C^0 alors la série $\displaystyle K(z,w) = \sum_{g\in\Gamma} f\circ\operatorname{ch}(d(z, g\cdot w))$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}^2$ et passe au quotient en une fonction C^0 sur $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$.

<u>Démo</u> $\displaystyle\sum_{g\in\Gamma} |f\circ\operatorname{ch} d(z, g\cdot w)| = \sum_{k=-1}^{+\infty} \sum_{g\in\Gamma_k} |f\circ\operatorname{ch} d(z, g\cdot w)|$ où $\Gamma_0 = \{g\in\Gamma \,/\, d(z, g\cdot w) \le 1\}$, $\Gamma_k = \{g\in\Gamma \,/\, (1+\varepsilon/2)^k < d(z, g\cdot w) \le (1+\varepsilon/2)^{k+1}\}$

$$\le \sum_{k=-1}^{+\infty} \#\Gamma_k \frac{C\,2^{(1+\varepsilon)}}{e^{(1+\varepsilon/2)^k(1+\varepsilon)}} \le C'\left(1 + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(1+\varepsilon/2)^{k+1} - (1+\varepsilon)(1+\varepsilon/2)^k}\right)$$

$$\le C\left(1 + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\varepsilon/2\,(1+\varepsilon/2)^k}\right) < \infty$$

où C est indépendante de z et w et C' est uniforme sur tout compact.

On pose $L : L^2(S) \to L^2(S)$

$$\varphi \mapsto \left(y \mapsto \int_S K(x,y)\varphi(x)\,dx\right)$$

comme K est C^0 sur $S\times S$, L est un opérateur de compact

<u>Prop</u> $\displaystyle\int_S K(x,x)\,dx = -2\pi\chi(S)f(1) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \sum_{\ell\in\mathcal{L}_S} \frac{\ell}{\sqrt{2}\,\operatorname{sh}\left(\frac{k\ell}{2}\right)} \int_{\operatorname{ch}(k\ell)}^{+\infty} \frac{f(\rho)}{\sqrt{\rho - \operatorname{ch}k\ell}}\,d\rho$

<u>Démo</u> Soit F un domaine de Dirichlet de Γ_S. S compact $\Rightarrow$ F compact

et $\displaystyle\int_S K(x,x) = \int_F \sum_{g\in\Gamma} f\circ\operatorname{ch} d(z, g\cdot z)\,dV_{\mathbb{H}^2} = \sum_{g\in\Gamma} \int_F f\circ\operatorname{ch} d(z, g\cdot z)\,dV_{\mathbb{H}^2}$

comme $\Gamma \setminus \{e\} = \Gamma_{hyp}$, on a

$$\sum_{g\in\Gamma} \int_F f\circ ch\, d(z, g\cdot z)\, dv_{\mathbb{H}^2} = \int_F f(1)\, dv_{\mathbb{H}^2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{g\in\Pi_\Gamma} \sum_{\{R_i^{(g)}\}} \int_F f\circ ch(z, R_i g^n R_i^{-1} z)$$

$$= f(1)\, \mathrm{Vol}\, S + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{g\in\Pi_\Gamma} \sum_{R_i^{(g)}} \int_{R_i F} f\circ ch(R_i^{-1} z', R_i^{-1} g^n z')\, dz'$$

$$= -2\pi \chi(S) f(1) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{g\in\Pi_\Gamma} \int_{\cup R_i F} f\circ ch(z', g^n z')\, dz'$$

On note $F_g = \bigcup_{\{R_i^{(g)}\}} R_i F$. F est mesurable. Si $x \in \mathbb{H}^2$, $\exists h \in \Gamma_S$ tq $x = h\cdot F$

or $h = c R_i^{(g)}$ pour $c \in Z(g) = \{g^k, k\in\mathbb{Z}\} \Rightarrow h = g^k R_i^{(g)}$ et $x \in g^k R_i^{(g)} F$

donc $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g^k \bar{F}_g$

On note $\Omega_g = \bigcup R_i^{(g)} \mathring{F}$ mesurable. On a $x \in g^k \Omega \cap g^\ell \Omega$

$\Rightarrow x = g^k \underbrace{R_i^{(g)} m}_{\in \mathring{F}} = g^\ell \underbrace{R_j^{(g)} m'}_{\in \mathring{F}} \Rightarrow g^k R_i^{(g)} \mathring{F} \cap g^\ell R_j^{(g)} \mathring{F} \neq \emptyset$

$\Rightarrow g^\ell R_j^{(g)} = g^k R_i^{(g)} \Rightarrow R_i^{(g)} R_j^{(g)-1} \in Z(g)$

donc $i = j$ et $g^\ell = g^k \Rightarrow k = \ell$ car g hyperbolique donc d'ordre ∞.

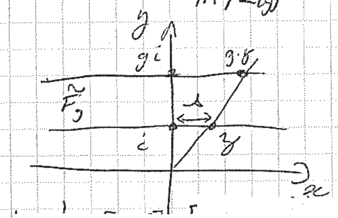
Conclusion : $g^k \Omega \cap g^\ell \Omega = \emptyset \quad \forall k \neq \ell$

enfin $F_g \setminus \Omega_g \subset \bigcup_{\{R_i^{(g)}\}} (R_i F \setminus \cup R_j \mathring{F}) \subset \underbrace{\bigcup_{R_i^{(g)}} R_i^{(g)} (F \setminus \mathring{F})}_{\text{réunion dénombrable d'ensemble de mesure nulle.}}$

donc F_g est un Domaine fondamental du groupe $Z(g)$.

On en déduit que $\int_{F_g} f\circ ch\,(d(z, g^k\cdot z)) = \int_{\mathbb{H}^2/Z(g)} f\circ ch\, d(z, g^k\cdot z) = \int_{\tilde{F}_g} f\circ ch\, d(z, g^k z)\, dz$

où F_g est de la forme



(ici on s'est ramené par conjugaison à $gz = dz$ ce qui ne change pas le résultat de l'intégrale).

On note $\ell = d(i, g\cdot i)$
$= \ln d$

On pose $\Phi : [0, \ell] \times [ch\, k\ell, +\infty[\longrightarrow \mathbb{H}^2$
$(t, \rho) \longmapsto e^t \left(i + \frac{\sqrt{\rho - ch\, k\ell}}{\sqrt{2}\, sh\, \frac{k\ell}{2}} \right)$

alors $ch\, d(\Phi(t,\rho), g^k \cdot \Phi(t,\rho)) = 1 + \dfrac{(1-d^k)^2 e^{2t} \left(1 + \frac{\rho - ch\, k\ell}{2\, sh^2 \frac{k\ell}{2}}\right)}{2 e^{2t} d^k}$

$= 1 + 2 \left(sh\, \frac{k\ell}{2}\right)^2 \dfrac{(\rho + 2sh^2 \frac{k\ell}{2} - ch\, k\ell)}{2 sh^2 \frac{k\ell}{2}}$

$= \rho$

et $\dfrac{dx \wedge dy}{y^2} = -\dfrac{e^t\, dt \wedge \left(\frac{e^t \sqrt{\rho - ch\, k\ell}}{\sqrt{2}\, sh \frac{k\ell}{2}} dt + \frac{e^t\, d\rho}{\sqrt{2}\, 2 \sqrt{\rho - ch\, k\ell}\, sh \frac{k\ell}{2}} \right)}{e^{2t}}$

$= \dfrac{dt\, d\rho}{2\sqrt{2}\, sh \frac{k\ell}{2} \sqrt{\rho - ch\, k\ell}}$

donc $\int_{\tilde{F}_g} f\circ ch\, d(z, g^k z) = 2 \int_{\tilde{F}_g \cap \{\mathrm{Re} \geq 0\}} f\circ ch\,(d(z, g^k z))\, dz$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\ell \dfrac{1}{sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)} \int_{ch\, k\ell}^{+\infty} \dfrac{f(\rho)}{\sqrt{\rho - ch\, k\ell}}\, d\rho\, dt = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}\, sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)} \int_{ch\, k\ell}^{+\infty} \dfrac{f(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho - ch\, k\ell}}$

Prop Si on note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$u \longmapsto \int_{ch\, u}^{+\infty} \dfrac{f(\rho)}{\sqrt{\rho - ch\, u}}\, d\rho = \int_0^{+\infty} 2 f(ch\, u + s^2)\, ds$

alors g est C^0 et L^1 $\left(|g(u)| \leq \int_0^{+\infty} \dfrac{c}{(ch\, u + s^2)^{1+\varepsilon}}\, ds = \int_0^{+\infty} \dfrac{C\, ds}{(ch\, u)^{1/2+\varepsilon}(1+s^2)^{1+\varepsilon}} \right.$

et on a $\hat{g}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 e^{-\theta i t} \int_0^{+\infty} f(ch\, t + s^2)\, ds\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta i t} f(ch\, t + s^2)\, ds\, dt$

On applique le changement de variable

$\Phi(s,t) = (\underbrace{e^{t/2} \sqrt{2}\, s}_{x}, \underbrace{e^t}_{y}) \qquad dx \wedge dy = \left(\sqrt{2} e^{t/2} ds + \frac{1}{\sqrt{2}} s e^{t/2} dt\right) \wedge e^t dt$
$= \sqrt{2}\, e^{3t/2}\, ds\, dt$

$$\text{donc } \hat{g}(\theta) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{1+x^2+y^2}{2y}\right) e^{-\theta i \ln y} y^{1/2} \frac{dx\,dy}{y^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{H}^2} f\left(\frac{1+x^2+y^2}{2y}\right) y^{\frac{1}{2}-\theta i} dV_{\mathbb{H}^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} h(-\theta)$$

où $h(\theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{H}^2} f\left(\frac{1+x^2+y^2}{2y}\right) y^{1/2+\theta i} dV_{\mathbb{H}^2}$.

<u>Prop</u> : Soit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ les valeurs propres de S

φ_i une base de Hilbert de $L^2(S)$ tq $\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \ \forall i$

alors $\displaystyle\int_S K(x,y)\varphi_i(x) = h\left(\sqrt{\lambda_i - 1/4}\right)\varphi_i(y) \ \forall i$

où $\operatorname{Im}\left(\sqrt{\lambda_i - \frac{1}{4}}\right) \geq 0$

<u>Démo</u> Soit Φ_i les relevées de φ_i à $\mathbb{H}^2$

$$L(\Phi_i)(y) = \int_F \sum_{g\in G} f\circ ch\, d(y, g.x)\, \Phi_i(x)dx$$

$$= \sum_{g\in G} \int_{g.F} f\circ ch\, d(y,w) \underbrace{\Phi_i(g^{-1}w)}_{=\Phi_i(w)} dw$$

$$= \int_{\mathbb{H}^2} \Phi_i f\circ ch\, d(y,w)\, dw = \int_0^{+\infty} f\circ ch\, r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi_i(\exp_y r.v)\,\theta(r,v)dv$$

$$= \int_0^{+\infty} f\circ ch\, r\ sh\, r \int_{\mathbb{S}^1} \Phi_i(\exp_y r.v)dv$$

ici $\theta(r,v) = sh\, r$ est la densité de volume en coordonnées exponentielles

Si on note $J_x(r) = \displaystyle\int_{\mathbb{S}^1} \Phi_i(\exp_x(rv))dv$

$$\theta(r)\frac{d}{dr}J_x(r) = \int_{\mathbb{S}^1} \theta(r)\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}(\exp_x r.v)dv = \int_{\partial B_x(r)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \int_{B_x(r)} \Delta \Phi_i$$

$$= \lambda_i \int_0^r\int_{\mathbb{S}^1} \Phi_i(\exp_x(s v))\,\theta(s)ds\,dv$$

$$\text{donc } \frac{d}{dr}\left(\theta \frac{d}{dr}J_x(r)\right) = \lambda_i J_x(r)\theta(r) \implies J_x'' + \frac{\theta'}{\theta}J_x' - \lambda_i J_x = 0$$

EDO d'ordre 2 singulière. On a une base de 2 sol° linéairement indépendantes dont 1 seule bornée au voisinage de $r=0$.

Soit $\Omega : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^{\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda-1/4}}$. On a $\Delta_{\mathbb{H}^2}\Omega = y^2\Delta_{eucl}\Omega = -\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda-1/4}\right)\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda-1/4}-1\right)\Omega = \lambda\Omega$

donc $J(r) = \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\exp_i(rv))dv$ vérifie la même edo que $J_x(r)$

on a $\begin{cases} J(0) = \Omega(i) = 1 \\ J_x(0) = \Phi_i(x) \end{cases}$ donc $J_x(r) = \Phi_i(x)J(r)$

$$\text{donc } L(\Phi_i)(y) = \int_0^{+\infty} \theta(r) f\circ ch(r) J(r)dr\ \Phi_i(y)$$

$$= \varphi_i(y) \int_{\mathbb{H}^2} f\circ ch\, d(i,z)\ \operatorname{Im}(z)^{\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda-1/4}}$$

$$\text{or } ch\, d(i, x+iy) = 1 + \frac{x^2+(y-1)^2}{2y} = \frac{1+x^2+y^2}{2y}$$

$$\text{donc } L(\varphi_i)(y) = \varphi_i(y)\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1+x^2+y^2}{2y}\right) y^{\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda-1/4}} dv_{\mathbb{H}^2}$$

$$= h\left(\sqrt{\lambda_i - 1/4}\right)\varphi_i(y).$$

En particulier, On a $K(x,y) = \displaystyle\sum_i h\left(\sqrt{\lambda_i - \frac{1}{4}}\right)\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ au sens L^2 d'après le th de Hilbert-Schmidt.

Si le membre de d^te cvge uniformément sur S^2 alors on obtient une égalité L^2 entre fonctions C^0, et donc une égalité ponctuelle globale.

$$\text{Alors } \int_S K(x,x)dx = \sum_i h\left(\sqrt{\lambda_i - 1/4}\right) \underbrace{\int_S \varphi_i^2(x)dx}_{=1\ \forall i}$$

Les hypothèses $f\ C^\infty$ et $f = O\left(\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right)$ ne suffisent pas a priori pour cette convergence uniforme. En revanche la condition $h = O\left((1+x^2)^{-1-\varepsilon}\right)$ ou $K\ C^2$ suffit (cf le livre de Buser Geometry and Spectra of compact Riemann surfaces).

Si On suppose $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ C^0 et $|f| = O\left(\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right)$

alors $g(\theta) = 2\int_0^{+\infty} f(x^2 + ch\,\theta)\,dx$

$\Rightarrow |g(\theta)| \leq C\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+ch\theta)^{1+\varepsilon}}dx = C\int_0^{+\infty} \frac{1}{(ch\theta)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \frac{1}{(1+u^2)^{1+\varepsilon}}du$

$\leq C' e^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)|\theta|}$

et $h(v) = \sqrt{2}\,\hat{g}(-v) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt} g(t)\,dt$

est holomorphe sur $|Im(v)| < \frac{1}{2} + \varepsilon$

et $|h(v)| \leq C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Im(v)t - \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)|t|}\,dt$

$\leq C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|\left(\frac{1}{2}+\varepsilon + Im(v)\frac{t}{|t|}\right)}$

Enfin h et g sont paires

Th (Formule de Trace de Selberg version fonctionnelle)

Soit $\mathcal{S}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} / |Im z| \leq \frac{1}{2}+\varepsilon\}$ et $h : \mathcal{S}_\varepsilon \to \mathbb{C}$ holomorphe et paire tq $h(z) \leq \frac{C}{(1+|z|^2)^{1+\varepsilon}}$ $(C \in \mathbb{R}_+$ fixé$)$

alors on a $\sum_{j=0}^{+\infty} h\left(\sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}\right) = -\frac{\chi(S)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} r\,h(r)\,th(\pi r)\,dr$

$+ \sum_{\ell \in \mathcal{L}_S} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ell}{sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)} \hat{h}(k\ell)$

où (λ_j) vp de S (hyp compacte) où $\hat{h}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} h(t)\,dt$

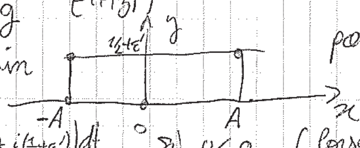
$\mathcal{L}_S$ spectre des longueurs de S.

Démo : Soit $h_\delta(z) = h(z)e^{-\delta z^2}$ $\quad g_\delta(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itv} h_\delta(t)\,dt$ avec $\delta > 0$

alors $|h_\delta(z)| = |h(z)|\,e^{-\delta(x^2-y^2)} \leq \frac{C}{(1+|z|^2)^{1+\varepsilon}} e^{-\delta x^2}$ $\forall z \in \mathcal{S}_\varepsilon$. on a $h_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} h$

par convergence dominée, on a $g_\delta \to g$

En appliquant Cauchy au chemin



pour $\varepsilon' < \varepsilon$ à $h_\delta(z)e^{-izv}$

on obtient $g_\delta(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t+i(\frac{1}{2}+\varepsilon'))v} h_\delta(t+i(\tfrac{1}{2}+\varepsilon'))\,dt$ si $v<0$ (lorsque $A \to +\infty$)

d'où $|g_\delta(v)| \leq C\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(1/2+\varepsilon')|v|}}{(1+t^2)^{1+\varepsilon}}dt \leq C(\varepsilon)e^{-(1/2+\varepsilon')|v|}$ $\forall v \leq 0$ $\forall \varepsilon' < \varepsilon$

On prenant le chemin symétrique / à (Ox) pour $v \geq 0$ et en faisant $\varepsilon' \to \varepsilon$

On obtient $|g_\delta(v)| = O\left(e^{-(1/2+\varepsilon')|v|}\right)$ $\forall v \in \mathbb{R}$

De m̂ $|g_\delta'(v)| = O\left(e^{-(1/2+\varepsilon)|v|}\right)$ $\forall v \in \mathbb{R}$

On pose $f_\delta(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{argch|x|}^{+\infty} \frac{g_\delta'(t)}{\sqrt{ch\,t - |x|}} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{g_\delta'(argch(v^2+|x|))\,dv}{\sqrt{(v^2+|x|)^2 - 1}}$

$\forall x \geq 1$.

l'estimée sur g_δ' donne

$|f_\delta(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{C\,e^{-(1/2+\varepsilon)\ln\left(v^2+x+\sqrt{(v^2+x)^2-1}\right)}}{\sqrt{(v^2+x)^2-1}}\,dv$

en posant $v = \sqrt{x}\,V$

$\leq \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}\int_0^{+\infty} \frac{dV}{\sqrt{(V^2+1)^2 - \frac{1}{x^2}}}\left(V^2+1+\sqrt{(V^2+1)^2 - \frac{1}{x^2}}\right)^{1/2+\varepsilon}$

$\leq \frac{C}{x^{\varepsilon+1}}\int_0^{+\infty} \frac{dV}{\sqrt{V}\sqrt{V+2}\left(V^2+1+\sqrt{V^2+2V}\right)^{1/2+\varepsilon}}$

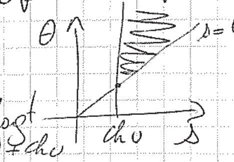
$\leq \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$

donc f_δ est une fonction admissible sur S et définit un opérateur intégral de Fredholm $L_\delta : L^2(S) \to L^2(S)$

Si on calcule $\int_{ch\,v}^{+\infty} \frac{f_\delta(s)}{\sqrt{s - ch\,v}}ds$

$= -\frac{1}{\pi}\int_{ch\,v}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s - ch\,v}}\int_{argch(s)}^{+\infty} \frac{g_\delta'(t)}{\sqrt{ch\,t - s}}\,dt\,ds = -\frac{1}{\pi}\int_{ch\,v}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s - ch\,v}}\int_s^{+\infty} \frac{g_\delta'(argch\,\theta)}{\sqrt{\theta^2-1}\sqrt{\theta - s}}d\theta$

Fubini $= -\frac{1}{\pi}\int_{ch\,v}^{+\infty} \frac{g_\delta'(argch\,\theta)}{\sqrt{\theta^2-1}}\left(\int_{ch\,v}^{\theta} \frac{ds}{\sqrt{\theta - s}\sqrt{s - ch\,v}}\right)d\theta$



$= -\int_{ch\,v}^{+\infty} (g_\delta \circ argch)'(\theta)\,d\theta = g_\delta(v)$ $\quad = \pi$ par chgt $s = v(\theta - ch\,v) + ch\,v$

enfin $z \mapsto \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\delta(t)e^{itz}\,dt$ est holomorphe sur I_ε d'après l'estimée établie sur g_δ et coïncide avec h_δ sur $\mathbb{R}$ d'après la formule d'inversion de Fourier. On en déduit que h_δ est la fonction associée à g_δ.

or $|h_\delta(t)| = |h(t)|\, e^{-t^2}$ est à décroissance exponentielle

Unitérat de Moser permet de montrer que $\|\varphi_i\|_\infty \leq O(\lambda_i^\beta)$ si $\Delta\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ sur S et comme $\lambda_i \sim Ci$ d'après l'asymptotique de Weyl, on obtient que la série

$$\sum_i h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4})\, \varphi_i(x)\varphi_i(y) \quad \text{cvge uniformément sur } S$$

et donc $K(x,y) = \sum_i h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4})\,\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ partout

$$\Rightarrow \int_S K(x,x)\,dx = \sum_i h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4}) \int_S \varphi_i^2(x)$$

$$-2\pi\chi(M)\, f_\delta(1) + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell \in \mathcal{L}_X} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ell}{\sqrt{2}\,sh\frac{k\ell}{2}}\, g(k\ell) = \sum_i h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4})$$

or $f_\delta(1) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{g_\delta'(u)}{\sqrt{ch\,u - 1}}\,du$ et $g_\delta'(\rho) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin r\rho\; r\, h_\delta(r)\,dr$

en test paire

donc $f_\delta(1) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin r\rho\; r\, h_\delta(r)}{\sqrt{ch\rho - 1}}\,dr\,d\rho$ intégrable sur $[0,+\infty[^2$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty} r h_\delta(r)\left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin r\rho}{sh\,\rho/2}\,d\rho\right) dr$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} r\, h_\delta(r)\, th\,\pi r\,dr \qquad \underbrace{}_{= \pi\, th\, \pi r} \text{ (cf l'appli de la formule sommatoire de Poisson)}$$

$$\xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} r\, h(r)\, th\,\pi r\,dr$$

par Conv Dom de Lebesgue.

De m
$$\begin{cases} |h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4})| \leq \dfrac{C}{(1+\lambda_i - 1/4)^{1+\varepsilon}} & \text{et } \lambda_i \sim i \times C \\ h_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} h \end{cases}$$

donc CDL $\Rightarrow \sum_i h_\delta(\sqrt{\lambda_i - 1/4}) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \sum_i h(\sqrt{\lambda_i - 1/4})$

enfin $g_\delta \to g$ et $|g_\delta(u)| \leq C e^{-(1/2+\varepsilon)|u|}$ or
C indep de δ

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell\in\mathcal{L}_S} \frac{C e^{-(1/2+\varepsilon)k\ell}\,\ell}{sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)} \leq C'\sum_{\ell\in\mathcal{L}_S}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-(1+\varepsilon)\ell}\right)^k \times \ell$$

$$\leq C'\sum_{\ell\in\mathcal{L}_S} \frac{\ell e^{-(1+\varepsilon)\ell}}{1 - e^{-(1+\varepsilon)\ell_0}}$$ où $\ell_0 = \inf_{\ell\in\mathcal{L}_S} \ell > 0$ (cf preuve de S compacte $\Rightarrow \Gamma_S$ hyperbolique)

$$\leq C''\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{\ell\in\mathcal{L}_S \\ \alpha^k \leq \ell \leq \alpha^{k+1}}} \alpha^{k+1} e^{-(1+\varepsilon)\alpha^k} + \#\{\ell \leq 1,\ \ell\in\mathcal{L}_S\}\right)$$

pour $1 < \alpha < 1+\varepsilon$

$$\leq C'''\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\#\{\ell \leq \alpha^{k+1}\}}_{= O(e^{\alpha^{k+1}})} \alpha^{k+1} e^{-(1+\varepsilon)\alpha^k} + 1\right)$$

$$\leq \tilde{C}'''\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{k+1} e^{-(-\alpha+1+\varepsilon)\alpha^k}}_{<\infty} + 1\right)$$

donc le th de conv dominée de Lebesgue donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell\in\mathcal{L}_S} \frac{\ell}{2\,sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)}\, g_\delta(k\ell) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell\in\mathcal{L}_S} \frac{\ell}{2\,sh\left(\frac{k\ell}{2}\right)}\, g(k\ell).$$