Théorème de la sphère

E. Aubry

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte. Son volume, son diamètre, son radius (par définition : la borne inférieure de l'ensemble des rayons des boules géodésiques recouvrant M) et son spectre (du laplacien) sont des invariants riemanniens. Les valeurs de ces seuls invariants sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes ne permettent pas de distinguer la topologie ou même la métrique de ces variétés. Toutefois, si on restreint ces fonctionnelles à des sous-ensembles de variétés satisfaisant certaines hypothèses de courbure, la situation peut devenir radicalement différente. La sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ peut, par exemlpe, être ainsi caractérisée :

Théorème 0.1 *Toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de ricci supérieure à $(n-1)$ vérifie les inégalités suivantes :*

(i) $\mathrm{Diam}(M^n, g) \leq \mathrm{Diam}(\mathbb{S}^n, can)$,

(ii) $\mathrm{Vol}(M^n, g) \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$,

(iii) $\mathrm{Rad}(M^n, g) \leq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n, can)$,

(iv) $\lambda_1(M^n, g) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n, can)$.

De plus, si l'égalité est réalisée dans une de ces inégalités, alors (M^n, g) est isométrique à $(\mathbb{S}^n, can)$.

Ces inégalités sont des théorèmes dorénavant classiques dûs à Myers, Bishop et Lichnerowicz. Les cas d'égalités découlent du théorème de Cheng ([6]) pour les cas (i), (ii) et (iii), et du théorème d'Obata ([15]) pour le cas (iv).

Au vu de ce résultat, il est naturel de se demander quelles propriétés (topologiques, différentiables ou métriques) de $(\mathbb{S}^n, can)$ sont conservées par les variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ pour lesquelles les valeurs prises par l'un des invariants riemanniens du théorème 0.1 sont suffisament proches de la valeur extrèmale.

Toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$, dont le volume (ou le diamètre, ou le radius, ou la k-ième valeur propre du laplacien) est ε-proche de celui de la sphère canonique, est-elle difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n$?

Bien sûr, une réponse affirmative à cette question sera d'autant plus satisfaisante que la constante ε dépendra du moins d'hypothèses supplémentaires possible sur la structure différentiable de M ou sur sa métrique; l'idéal étant que ε ne dépende que de la dimension n de la variété (M^n, g) (ce qu'on notera $\varepsilon = \varepsilon(n)$).

Remarquons tout de suite qu'il n'y a pas de stabilité du type différentiable (avec $\varepsilon = \varepsilon(n)$) lorsqu'on astreint que le diamètre ou la première valeur propre de la veriété (M^n, g) à être proche de leur valeur critique (des contres-exemples ont été donnés par M. Anderson [2]); en revanche, elle apparaît si on admet que ε puisse dépendre de n et d'un majorant de la courbure sectionnelle des variétés considérées (*cf* S. Ilias [14]). Nous ne nous intéresserons donc dans la suite qu'à la stabilité de genre différentiable vis-à-vis du volume, du radius ou de la $n+1$-valeur propre de la variété au voisinage de leur valeur critique.

De nombreuses réponses partielles (stabilité du genre topologique ou dépendence de ε vis-à-vis du rayon d'injectivité ou d'autre quantités géométriques) à cette question existaient sur le marché (on peut se référer à l'article de K. Shiohama [17] pour un historique de la question) avant que J. Cheeger et T. Colding ne démontre le résultat général suivant (*cf* [8], [9] et [4]), améliorant considérablement les résultats précédents :

Théorème 0.2 (J. Cheeger-T. Colding,[4]) *Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n)$ telle que toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à n-1 et vérifiant l'inégalité :*

$$\mathrm{Vol}(M^n, g) \geq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n, can)$$

soit difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Remarque 0.3 *la constante $\varepsilon(n)$ est universelle et ne dépend que de la dimension. Bien entendu, elle ne dépend pas de M... mais elle ne dépend pas non plus de bornes a priori qui seraient imposées à la courbure sectionnelle. Ce point est l'amélioration fondamentale apportée par T.Colding aux travaux antérieurs de Shiohama, Perelman, Otsu-Shiohama, Yamaguchi,...(cf [17]).*

La preuve de Cheeger et Colding (sujet de cet exposé) se décompose en deux étapes :

-Dans un premier temps, Colding a montré que, pour toute suite de variétés riemanniennes compactes $(M_p^n, g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de courbure de ricci supérieure à (n-1), il équivalent de converger en distance de Hausdorff-Gromov[1] vers $(\mathbb{S}^n, can)$ ou d'avoir convergeance de la suite $(\mathrm{Vol}(M_p))_{p\in\mathbb{N}}$ vers $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)$ ([8] et [9]).

-Dans un second temps, ils démontrent et utilisent un nouveau résultat de finitude du genre différentiable ([4]).

Dans la première partie de cet exposé, nous allons redémontrer et préciser le résultat de Colding. *Si la notation $\tau(\epsilon|x,\cdots)$ désigne une fonction τ telle*

[1]Soit (A, d_A) et (B, d_B) deux espaces métriques. Une ϵ-approximation de A sur B est un couple $\big(F, (C, d_C)\big)$ tel que (C, d_C) est un sur espace métrique de B et F est une application de A dans C telle que $d_C\big(F(A), B\big) \leq \epsilon$ et $\forall (x,y) \in A^2$, $|d_A(x,y) - d_C(F(x), F(y))| \leq \epsilon$. On munit l'ensemble des variétés reimanniennes compactes d'une métrique, appelée métrique de Haussdorff-Gromov, en posant :

$$d_{HG}\big((M,g),(M',g')\big) = \inf\{\epsilon \text{ tel qu'il existe une } \epsilon\text{-approximation de Haussdorff de (M,g) sur (M',g')}\}.$$

On pourra trouver des compléments d'information sur cette métrique dans [13].

que $\tau(\epsilon|x,\cdots)\to 0$ lorsque $\epsilon\to 0$ (les autres variables étant fixées) et si on pose :

$.H^d_\epsilon=\{(M^n,g)$ variété riemannienne compacte telle que $d_{HG}\big((M^n,g),(\mathbb{S}^n,can)\big)\le\epsilon\}$,

$.H^V_\epsilon=\{(M^n,g)$ variété riemannienne compacte telle que $\mathrm{Vol}(M^n,g)\ge(1-\epsilon)\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n,can)\}$,

$.H^\lambda_\epsilon=\{(M^n,g)$ variété riemannienne compacte telle que $\lambda_{n+1}(M^n,g)\le\lambda_1(\mathbb{S}^n,can)+\epsilon\}$,

$.H^R_\epsilon=\{(M^n,g)$ variété riemannienne compacte telle que $\mathrm{Rad}(M^n,g)\ge\mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n,can)-\epsilon\}$,

on va démontrer, par une méthode différente de celle de Colding et s'inspirant de [12] et de [16]), le résultat suivant :

Théorème 0.4 *Il existe une fonction $\tau=\tau(\varepsilon|n)>0$ telle que toute variété riemannienne compacte (M^n,g) de courbure de Ricci supérieure à (n-1) inclue dans l'un des ensembles $H^i_{\tau(\epsilon|n)}$ pour $i\in\{d,\ R,\ V,\ \lambda\}$ est aussi inclue dans les ensembles H^j_ε (pour tout $j\neq i$).*

Outre qu'elle permet l'extension du résultat de Colding, la démonstration que nous développerons en première partie de cet exposé aura l'avantage de fournir epxicitement une approximation de Hausdorff de (M^n,g) sur $(\mathbb{S}^n,can)$ lorsque $\mathrm{Vol}(M^n,g)$ est proche de $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n,can)$ (cette approximation est en fait une fonction surjective de classe C^∞ construite à partir des premières fonctions propres de M). De plus cette approximation devient un difféomorphisme si $\mathrm{Vol}(M^n,g)\ge(1-\epsilon(A,n))\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n,can)$ où A est un majorant de la courbure sectionnelle de M, ce que nous exposerons dans la seconde partie de cet exposé.

Pour montrer l'existence d'un difféomorphisme entre (M^n,g) et $(\mathbb{S}^n,can)$ sous les conditions du théorème 0.2 (c'est-à-dire sans borne sur le courbure sectionnelle de (M^n,g)) on ne sait pas si l'application construite en première partie suffit. On donc obligé de suivre Colding et Cheeger, qui utilisent un théorème de finitude du genre différentiable qui conclut mais sans fournir d'information sur le difféomorphisme existant. Nous renvoyons les lecteurs intéressés par ce résultat de Colding et Cheeger à un exposé ultérieur de ce séminaire.

Dans la suite, M désignera toujours une variété riemannienne complète à courbure de Ricci supérieure à (n-1).

1 stabilité des invariants géométriques de la sphère

Nous calculerons les normes L^p par rapport à la mesure unitaire riemannienne des variétés (qui seront toujours ici de volume fini, car compactes), ie :

$$\|f\|^p_{L^p}=\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M f^p(x)\,dv_g(x).$$

Quant au laplacien utilisé, ce sera celui des géomètres, qui par convention en font un opérateur positif. Plus précisement, il sera défini en coordonnées locales au voisinage de x, par :

$$\triangle f(x)=-\sum_{i,j}g^{i,j}Ddf\Big(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\Big).$$

Nous commençons cette partie par quelques remarques simples sur la sphère qui inspirerons notre démarche dans le cas général :

1.1 Cas de la sphere $\mathbb{S}^n$

La sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ est de courbure de Ricci constante égale à (n-1). Les fonctions propres du laplacien de $(\mathbb{S}^n, can)$ sont les restrictions à S^n des polynômes homogènes harmoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$. En particulier, l'espace des fonctions propres E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = n$ est l'espace des formes linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on peut écrire sous la forme $x \mapsto < x, r.x_0 >= r.cos(d(x, x_0))$, où x_0 est un élément quelconque de $\mathbb{S}^n$, r un élément quelconque de $\mathbb{R}^+$ et d la distance riemannienne sur $(\mathbb{S}^n, can)$.

On rappelle que pour tout endomorphisme A de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} Trace(A) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} < A(x), x > \, dx \tag{1}$$

Soit $\{e_i\}$ une BON de $\mathbb{R}^{n+1}$ et x_i l'extrèmité du vecteur e_i (ie $\vec{ox_i} = e_i$). D'après (1), les fonctions $f_i = cos(d(x_i, .)) =< e_i, . >$ forment une base L^2-orthogonale de E_{λ_1} telle que $\|f_i\|^2_{L^2} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que si $x_0 \in \mathbb{S}^n$ et que l'on pose $\alpha_{i_{|x_0}} = \left(\frac{n+1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n}\right) \int_{\mathbb{S}^n} cos(d(x_0, x)) f_i(x)\, dx$, alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} cos(d(x_0, .)) & = & \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i_{|x_0}} . f_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^2_{i_{|x_0}} & \equiv & 1. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, (1) nous donne :

$$\alpha_{i_{|x_0}} = \left(\frac{n+1}{\mathrm{Vol}\, \mathbb{S}^n}\right) \int_{\mathbb{S}^n} < x_0, x > . < e_i, x > \, dx =< x_0, e_i >= f_i(x_0).$$

On a donc en fait démontré que l'application :

$$F \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{S}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)) \end{array} \right.$$

est bien définie. De plus c'est une isométrie, puisque pour tous $x_0, x \in \mathbb{S}^n$, on a :

$$\begin{aligned} cos\left[d_{\mathbb{S}^n}(F(x_0), F(x))\right] &= < F(x_0), F(x) >= \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0).f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i_{|x_0}} .f_i(x) = cos[d(x_0, x)]. \end{aligned}$$

Bien entendu, il y avait une démonstration plus rapide du fait que F est une isométrie : elle consistait à reconnaitre que F est le plongement canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et que ce plongement identifie la métrique canonique de $\mathbb{S}^n$

avec la métrique de sous-variété. Cependant cette dernière preuve n'a aucune chance de se généraliser à une variété riemannienne abstraite, c'est pourquoi nous lui avons préféré la première preuve que nous allons généraliser, en prouvant que les égalités exhibées ci-dessus restent vraies à ε-près pour une variété riemannienne de volume presque maximal.

1.2 le cas général

Dans toute la suite du rapport, nous ferons une utilisation intensive du théorème de
Bishop-Gromov. Nous citons donc dès maintenant ce théorème dont le lecteur pourra trouver une démonstration dans l'appendice A :

Théorème 1.1 (Bishop-Gromov) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)\delta$ (où δ est un réel donné) et r un réel tel que $0 < r \leq R$. Pour tout point p de M on a :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,R))}{\mathrm{Vol}(B(p,r))} \leq \frac{V^\delta(R)}{V^\delta(r)},$$

où $V^\delta(r)$ désigne le volume d'une boule géodésique de rayon r de l'espace complet simplement con-nexe de courbure sectionnelle constante égale à δ. En particulier, par passage à la limite, on obtient $\mathrm{Vol}(B(m,R)) \leq V^\delta(R)$.

1.2.1 preuve de $H^V_\varepsilon \subset H^R_{\tau(\varepsilon|n)}$ et $H^d_\varepsilon \subset H^R_{\tau(\varepsilon|n)}$

.Soit $(M,g) \in H^V_\epsilon$ et $B\big(p, \mathrm{Rad}(M)\big)$ une boule géodésique de rayon $\mathrm{Rad}(M)$ recouvrant M (M étant compacte, elle existe). D'aprés le théorème 1.1, on obtient :

$$(1-\varepsilon)V^1(\pi) \leq \mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(B(p, \mathrm{Rad}(M))) \leq V^1(\mathrm{Rad}(M)).$$

Or $r \mapsto V^1(r)$ est une fonction continue strictement croissante sur $[0,\pi]$ ne dépendant que de n. D'où l'existence d'une fonction $\tau(\epsilon|n)$ telle que $H^V_\varepsilon \subset H^R_{\tau(\varepsilon|n)}$.

.Soit $(M,g) \in H^d_\varepsilon$ et $p \in M$. Alors il existe une application $F : (M,g) \to (C,d)$ où $(\mathbb{S}^n, can)$ est un sous-espace métrique de (C,d) et telle que $d(F(M), \mathbb{S}^n) \leq \epsilon$ et pour tout couple de points $(x,y) \in M^2$, on ait $|d_g(x,y) - d(F(x),F(y))| \leq \epsilon$. Il existe donc des points p' et q' de $\mathbb{S}^n$ tels que $d(F(p),p') \leq \epsilon$ et $d(p',q') = \pi$. Si q est un point de M tel que $d(F(q),q') \leq \epsilon$ alors on a trouvé un point q de M tel que $d_g(p,q) \geq \pi - 3\epsilon$. Autrement dit $H^d_\varepsilon \subset H^R_{3\varepsilon}$.

1.2.2 preuve de $H^R_\varepsilon \subset H^\lambda_{\tau(\varepsilon|n)}$

Dans ce qui suit, *nous notons (f_i) une famille orthogonale de fonctions propres du laplacien de (M,g) telle que*

$$\begin{cases} \triangle f_i &= \lambda_i f_i \\ \|f_i\|^2_{L^2} &= \frac{1}{n+1}, \end{cases}$$

où $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est la suite des valeurs propres du laplacien de* (M,g) *classées dans l'ordre croissant et chacune répétée un nombre de fois égale à leur multiplicité.*

Pour tout point x_0 de M *nous notons* $(\alpha_{i|x_0})$ *la suite des coefficients de Fourier de la fonction* $cos(d(.,x_0))$ *relativement à la famille des* f_i. C'est-à-dire que :

$$\alpha_{i|x_0} = \frac{(n+1)}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M cos(d(x_0,x))f_i(x)\,dx.$$

Alors le lemme suivant affirme que, si le radius d'une variété de courbure de Ricci supérieure ou égale à (n-1) est proche de celui de $(\mathbb{S}^n, can)$, alors les fonctions $cos(d(x_0,.))$ sont proches au sens L^2 des premières fonctions propres du laplacien (comparez avec le cas de la sphère) :

Lemme 1.2 *Il existe des fonctions universelles* $\tau_1(\varepsilon|n)$ *et* $\tau(\varepsilon|n)$ *telles que sur toute variété riemannienne compacte* (M^n,g) *de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant* $\mathrm{Rad}(M)\geq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n)-\varepsilon$ *on ait :*

(i) $\|cos(d(x_0,.)) - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)}\alpha_{i|x_0}f_i\|_{L^2(M)} \leq \tau(\varepsilon|n)$, *où* $k(\epsilon) = \sup\{i\ /\lambda_i \leq n+\tau_1(\varepsilon|n)\}$,

(ii) $\left|\sum_{i=1}^{k(\epsilon)}\alpha^2_{i|x_0} - 1\right|^2 \leq \tau(\varepsilon|n).$

Remarque 1.3 *Pour conclure il suffira de montrer que* $k(\epsilon)\geq n+1$ *pour* ϵ *assez petit. De plus nous avons vu que* $H^V_\varepsilon \subset H^R_{\tau(\varepsilon|n)}$ *(où* $\tau(\varepsilon|n)$ *tend vers 0 avec* ε*), on peut donc remplacer l'hypothèse* $\mathrm{Rad}(M)\geq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n)-\varepsilon$ *par* $\mathrm{Vol}(M)\geq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)(1-\varepsilon)$ *dans l'énoncé du lemme 1.2.*

Il est primordial de remarquer que les estimations du lemme 1.2 (comme beaucoup de celles qui suivront) sont universelles, puisqu'elles ne dépendent que des bornes sur la courbure de Ricci et sur le volume.

Preuve. Cette propriété est vraie sur la sphère, comme on l'a vu en section 1.1. La démonstration est fondée sur le lemme suivant qui affirme que, sous les hypothèses du lemme 1.2, les mesures riemanniennes de (M,g) et de $(\mathbb{S}^n, can)$ sont proches :

Lemme 1.4 *Il existe une fonction* $\tau(\varepsilon|n)$ *telle que, sur toute variété riemannienne compacte* (M^n,g) *de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant* $\mathrm{Rad}(M)\geq \mathrm{Rad}(\mathbb{S}^n)-\varepsilon$, *et pour toute fonction* $u\ :\ [0,\pi]\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1, *on ait :*

$$\left|\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M u\circ d_M(x_0,.)\,dv_g - \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n} u\circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x_0},.)\,dv_{can}\right| \leq \tau(\varepsilon|n)\int_0^\pi |u'(r)|\,dr,$$

pour tous les points $x_0\in M$ *et* $\bar{x_0}\in\mathbb{S}^n$.

Preuve. On note L(r) le volume (n-1)-dimensionnel de la sphère géodésique $S(x_0,r)$ de centre x_0 et de rayon r et $\bar{L}(r) = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})(sin(r))^{n-1}$ qui est le volume correspondant dans $\mathbb{S}^n$. Alors, comme application classique de la formule de la coaire (*cf* [3],p128), on obtient que la fonction $r \mapsto \mathrm{Vol}(B(x_0, r)) = V(r)$ est lipschitzienne est de dérivée égale presque partout à L. Par intégration par parties (et en utilisant le théorème de Myers cité en introduction), on obtient :

$$u(\pi)\,\mathrm{Vol}(M) = \int_0^\pi u(r)L(r)\,dr + \int_0^\pi u'(r)V(r)\,dr.$$

En appliquant cette formule à M et à $\mathbb{S}^n$, et en les retranchant, on obtient :

$$\left|\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M u\circ d_M(x_0,x)\,dv_g - \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n} u\circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x_0},x)\,dv_{can}\right| \leq \int_0^\pi |u'(r)|\left(\frac{V(r)}{\mathrm{Vol}(M)} - \frac{\overline{V}(r)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\right)dr,$$

où $\overline{V}(r)$ est le volume de la calotte sphèrique de rayon r. Or on a $\mathrm{Rad}(M) \geq \pi - \varepsilon$, donc tout point x_0 de M admet un presque antipode (i.e. il existe $y_0 \in M$ tel que $d(x_0, y_0) > \pi - 2\varepsilon$). Donc, par le théorème 1.1 et le théorème de Myers, on obtient que :

$$\frac{\overline{V}(r)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{V(r)}{\mathrm{Vol}(M)} \leq 1 - \frac{\mathrm{Vol}(B(y_0, \pi - r - 2\varepsilon))}{\mathrm{Vol}(M)} \leq 1 - \frac{\overline{V}(\pi - r - 2\varepsilon)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{\overline{V}(r + 2\varepsilon)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} \quad (2)$$

Or la fonction $\overline{V}$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc le lemme 1.4 est vérifié par la fonction $\tau(\varepsilon|n) = \sup_r \frac{\overline{V}(r+2\varepsilon) - \overline{V}(r)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} = \frac{\int_0^{2\varepsilon}(cos)^{n-1}dt}{\int_0^{\pi/2}(cos)^{n-1}dt}$.

Suite de la démonstration de la proposition 1.2 :

De l'inégalité du lemme 1.4, on déduit directement que :

$$\left|\alpha_{0|x_0}\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M cos(d(x_0, .))\right| \leq C(n)\tau(\varepsilon|n).$$

Puisqu'on a $\|\nabla d(x_0, .)\|^2 = 1$ sur presque tout M (*cf*Appendice A), le lemme 1.4 nous permet de comparer les quotiens de Rayleigh des fonctions radiales de M (i.e. de la forme $u \circ d(x_0, .)$) avec ceux des fonctions correspondantes sur la sphère. Ainsi, puisqu'on a :

$$\|\nabla cos\, d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, .)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^n)} = n\|cos\, d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, .)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^n)},$$

on obtient :

$$\left|\|\nabla cos\, d_M(x_0, .)\|^2_{L^2(M)} - n\|cos\, d_M(x_0, .)\|^2_{L^2(M)}\right| \leq C(n)\tau(\epsilon|n).$$

En posant $k(\epsilon) = \sup\{i/\lambda_i \leq n + \sqrt{\tau(\epsilon|n)}\}$, on en déduit :

$$\frac{\sqrt{\tau(\epsilon|n)}}{n+1}\sum_{i>k(\epsilon)}\alpha^2_{i|x_0} \leq \left|\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{\lambda_i - n}{n+1}\right)\alpha^2_{i|x_0}\right| \leq C(n)\tau(\epsilon|n),$$

d'où :

$$\|cos\, d_M(x_0, .) - \sum_{i=1}^{k(\epsilon)}\alpha_{i|x_0}.f_i\|^2_{L^2(M)} \leq (n+1)\sqrt{\tau(\epsilon|n)}.$$

Enfin, on obtient (ii) en appliquant le lemme 1.4 à la fonction $u = cos^2$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_{i|x_0}^2 - 1\right| &= (n+1)\left|\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M cos^2 d_M(x_0,.) - \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n} cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0,.)\right| \\ &\leq C(n)\tau(\epsilon|n)\end{aligned}$$

d'où :

$$\left|\sum_{i=1}^{k(\epsilon)} \alpha_{i|x_0}^2 - 1\right| \leq C'(n)\sqrt{\tau(\epsilon|n)}.$$

En utilisant le lemme 1.2, nous allons maintenant démontrer l'existence d'une fonction $\tau(\varepsilon|n)$ telle que $H_\varepsilon^R \in H_{\tau(\varepsilon|n)}^\lambda$.

En effet, du lemme 1.2, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème du théorème de Bishop-Gromov 1.1 (et quitte à modifier la fonction τ), on déduit :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\left|\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0}.f_i - \int_{B(x_0,\eta)} cos(d(x_0,.))\right| \leq \left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{n/2}\tau(\varepsilon,n).$$

En prenant $\eta = \tau(\varepsilon|n)^{1/n}$ et en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction cos, on obtient finalement, pour ε assez petit :

$$\left|1 - \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0}.f_i(x)dv_g(x)\right| \leq C(n)\tau(\varepsilon|n)^{1/n}.$$

Or :

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k \left(\alpha_{i|x_0} - f_i(x)\right)^2 dx \\ &\leq (1+\tau(\varepsilon|n)) - \frac{2}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0}.f_i(x)dx + \frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k f_i^2(x)dx\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}\int_{B(x_0,\eta)}\sum_{i=1}^k f_i^2(x)\,dx \geq 1 - C'(n)\tau(\varepsilon|n)^{1/n},$$

pour ε petit.

Par le théorème de Fubini, et en remarquant que les majorations précédentes ne dépendent pas de x_0, on obtient alors :

$$\begin{aligned}(1-\tau(\varepsilon|n)^{1/n})\int_M \frac{\mathrm{Vol}(B(y,\eta))}{\mathrm{Vol}(M)}dy &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M\left(\int_{B(y,\eta)}\sum_{i=1}^k f_i^2(x)\,dx\right)dy \\ &= \int_M\left(\sum_{i=1}^k f_i^2(x)\right)\frac{\mathrm{Vol}(B(x,\eta))}{\mathrm{Vol}(M)}dx\end{aligned}$$

Or, d'après les inégalités (2) (*cf*la démonstration du lemme 1.4), on en déduit que :

$$\frac{k}{n+1} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M \sum_{i=1}^k f_i^2(x)\, dx \geq (1 - \tau(\varepsilon|n)^{1/n}) \frac{\overline{V}(\eta)}{\overline{V}(\eta + 2\varepsilon)}.$$

En choisissant $\eta = \tau(\varepsilon|n)^{1/n}$, on obtient que $\epsilon/\eta \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$ (*cf*la démonstration du lemme 1.4 pour la valeur exacte de $\tau(\epsilon|n)$) donc k>n pour ε assez petit, ce qu'il fallait démontrer.

1.2.3 preuve de $H_\epsilon^\lambda \subset H_{\tau(\epsilon|n)}^V$ et $H_\epsilon^\lambda \subset H_{\tau(\epsilon|n)}^d$

Pour ces deux points nous utiliserons la même fonction F de M sur $\mathbb{S}^n$, construite à partir des fonctions propres du laplacien de M selon une méthode s'inspirant de la section 1.1. Dans le premier cas nous montrerons que cette fonction est surjective et contracte presque les volumes, et dans le second cas, nous montrerons qu'elle réalise une approximation de Hausdorff de M sur $\mathbb{S}^n$.

Dans toute la suite, *nous supposerons que M est une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant* $\lambda_k \leq n + \varepsilon$. De plus nous rappellons que *nous notons (f_i) une famille orthogonale de fonctions propres du laplacien de (M,g) telle que*

$$\begin{cases} \triangle f_i &= \lambda_i f_i \\ \|f_i\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Pour la suite, nous aurons besoin du lemme 1.2, que nous devons donc redémontrer pour les variétés de l'ensemble H_ε^λ. Sa démonstration est, dans ce cas, basée sur l'estimation L^∞ des fonctions propres de M donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.5 *Il existe une fonction $\tau_3(\varepsilon|n)$ telle que sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant $\lambda_k \leq n + \epsilon$, on ait, pour toute combinaison linéaire $f = \sum_{i=1}^k \beta_i.f_i$ de fonctions propres f_i :*

$$\|f^2 + |df|^2\|_\infty \leq (1 + \tau_3(\varepsilon|n))(\lambda_k + 1)\|f\|_2^2.$$

Preuve. On considère la variété $M' = M \times \mathbb{R}_+^*$ munie de la métrique $g' = r^2.g + (dr)^2$. En identifiant TM' à $TM \oplus (\mathbb{R}e)$, où $e = \frac{\partial}{\partial r}$, la connexion de Levi-Civita D' de M' est donnée par les relations :

$$\forall ((X,0),(Y,0)) \in TM'^2, \qquad \begin{aligned} &D'_X Y = D_X Y - r.g(X,Y)e, \\ &D'_e e = 0, \\ &D'_e X = D'_X e = \frac{X}{r}. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} F_i \;:\; (M', g') & \to & \mathbb{R} \\ \qquad\quad (x, r) & \mapsto & r.f_i \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F \ : \ (M',g') & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \qquad (x,r) & \mapsto & r.f \end{array} \right.$$

Si $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de T_xM telle que $D_{e_i}e_i = 0$ au centre x de la carte où se fait le calcul, on a alors, au point x :

$$\begin{aligned} \triangle' F_i &= -\frac{1}{r^2}\left[\sum_{k=1}^{n} D'_{e_k}d'_{e_k}(r.f_i)\right] - D'_e d'_e(r.f_i) \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\sum_{k=1}^{n} e_k.e_k.(r.f_i) - \sum_{k=1}^{n} d'(F_i)(D'_{e_k}e_k)\right] \\ &= -\frac{1}{r}\left[\sum_{k=1}^{n} D_{e_k}d_{e_k}f_i \ - nf_i\right] \\ &= \frac{(\lambda_i - n)}{r^2}F_i. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\triangle' F = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda_i - n)}{r^2}\beta_i F_i. \tag{3}$$

Par ailleurs, on a les propriétés suivantes (*cf*[12]) :

- $\mathrm{Ric}'(M') \geq 0$,

- $\triangle'|d'F|^2 = \triangle|d'F|^2$ en restriction a $M\times\{1\}$, car $|d'F|^2 = (\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i f_i)^2 + |\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i df_i|^2$ ne dépend pas de r.

La formule de Böchner (*cf*appendice A), appliquée à F, nous donne alors :

$$< d'(\triangle' F), d'F > = \frac{1}{2}\triangle'|d'F|^2 + |D'd'F|^2 + \mathrm{Ric}'(\nabla' F, \nabla' F), \tag{4}$$

(où $\nabla' F$ est le gradient F (g'-dual de $d'F$)), soit, en restriction à $M\times\{1\}$:

$$\frac{1}{2}\triangle|d'F|^2 + |D'd'F|^2 \leq |d'\triangle' F|.|d'F|.$$

Or, d'aprés l'égalité 3, on a :

$$\begin{aligned} |d'\triangle' F| &= |\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i(d'F_i - 2f_i dr)| \\ &\leq |\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i d'F_i| + 2|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i f_i dr| \\ &\leq 3|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i d'F_i|. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit l'inégalité suivante, valable pour tout k-uplet $(\beta_i)_{1\leq i\leq k}$:

$$\frac{1}{2}\triangle|d'F|^2+|D'd'F|^2\leq 3|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-n)\beta_i d'F_i|.|d'F|.$$

La restriction du fibré T^*M' à $M\times\{1\}$ peut-être vue comme un fibré au-dessus de M. L'espace vectoriel de dimension finie $E=Vect\{d'F_i\}_{1\leq i\leq k}$ est alors un sous-espace de l'ensemble des sections de ce fibré sur M. Pour tout $r\in[1,+\infty]$, on pose $A_r=\sup_{S\in E}\frac{\|S\|_r}{\|F\|_2}$. Soit S un élément quelconque de E; posons $u=\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}$ pour $\epsilon>0$. La fonction u est alors C^∞ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$|d\left(\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}\right)|^2\leq|d'\left(\sqrt{|S|^2+\epsilon^2}\right)|^2\leq\frac{|D'S|^2|S|^2}{|S|^2+\epsilon^2}\leq|D'S|^2$$

On en déduit :

$$u\triangle u=\frac{1}{2}\triangle(f^2)+|df|^2\leq\frac{1}{2}\triangle(|S|^2)+|D'S|^2\leq 3|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-n)\beta_i d'F_i|.u$$

Or u est une fonction strictement positive, la formule de Green permet donc de montrer que pour tout réel $p>1/2$, on a :

$$\int_M|d(u^p)|^2=\frac{p^2}{2p-1}\int_M(\triangle u)u^{2p-1}\leq\frac{3p^2}{2p-1}\int_M|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-n)\beta_i d'F_i|.u^{2p-1}.$$

Autrement dit, pour tout réel $p>1/2$, on a :

$$\|d(u^k)\|_2\leq\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2p-1}}\sqrt{\|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-n)\beta_i d'F_i\|_{2p}\|u\|_{2p}^{2p-1}}.$$

En appliquant à la fonction u^k l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme suivant (*cf* [14]) :

Lemme 1.6 *Soit (M^n,g) une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à (n-1), et $u\in H_1^2(M)$, alors on a :*

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}&\leq\frac{4}{n(n-2)}\|du\|_2^2+\|u\|_2^2\quad(si\ n\geq 3),\\ \|u\|_4^2&\leq\frac{1}{2}\|du\|_2^2+\|u\|_2^2\quad(si\ n=2).\end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\|S\|^p_{\frac{2pn}{n-2}}\leq\frac{C(n)p}{\sqrt{2p-1}}\sqrt{\|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-n)\beta_i d'F_i\|_{2p}\|S\|_{2p}^{2p-1}}+\|S\|^p_{2p}.$$

Or, on par définition :

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i d'F_i\|_{2p} &\leq A_{2p}\|\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - n)\beta_i d'F_i\|_2 \\ &\leq A_{2p}\cdot\epsilon(n+\epsilon)\|S\|_2\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\|S\|_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1+\frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{1/p} A_{2p}\|S\|_2,$$

et ceux pour tout élément S de l'espace vectoriel E. On a donc :

$$A_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1+\frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{1/p} A_{2p}.$$

Si on pose successivement $p = \beta^j$ avec $\beta = \frac{n}{n-2} > 1$ dans cette inégalité, on trouve :

$$A_{2\beta^m} \leq \prod_{j=0}^{m-1}\left(1+C'(n)\beta^{j/2}\sqrt{\epsilon}\right)^{1/\beta^j}.$$

Il suffit de remarquer que, M étant compacte, on a $A_r \to A_\infty$ lorsque $r\to\infty$, d'où :

$$A_\infty \leq (1+\tau_3(\epsilon|n)).$$

En appliquant le lemme 1.5, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.7 *Il existe une fonction $\tau_4(\varepsilon|n)$ telle que si M est une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et telle que $\lambda_{n+1} \leq n+\varepsilon$, alors on a $\left|\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 - 1\right| \leq \tau_4(\varepsilon|n)$.*

Preuve. D'après le lemme 1.5, on a $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x) \leq (1+\tau_3'(\varepsilon|n))$ pour tout point x de M (il suffit de poser $\beta_i = f_i(y)$ puis de faire x=y). De même on a :

$$|d(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2)| = 2|\sum_{i=1}^{n+1} f_i df_i| \leq 2\sqrt{(1+\tau_3'(\varepsilon|n))} \leq 3.$$

Soit $a = inf\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2\right)$ et x_0 un point où cet infimum est atteint. Sur $B(x_0,\eta)$, on a (par le théorème des accroissements finis) : $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \leq a+3\eta$. D'où, pour tout $\eta \leq \frac{1-a+\tau_3(\varepsilon|n)}{3}$, on a :

$$1 = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \leq \frac{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}{\mathrm{Vol}(M)}(a+3\eta)+\left(1-\frac{\mathrm{Vol}(B(x_0,\eta))}{\mathrm{Vol}(M)}\right)(1+\tau_3(\varepsilon|n)).$$

D'où :

$$1 \leq \left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n (a+3\eta) + \left[1-\left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n\right](1+\tau_3(\varepsilon|n)),$$

d'après le théorème 1.1 (où on utilise le fait que $\mathrm{Ric}(M) \geq 0$). Ceci implique l'inégalité :

$$\left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n [1 + \tau_3(\varepsilon|n) - a - 3\eta] \leq \tau_3(\varepsilon|n).$$

Posons $\eta = \left(\frac{1-a+\tau_3(\varepsilon|n)}{6}\right)$, nous obtenons finalement :

$$a \geq 1 - 6\pi(\tau_3(\varepsilon|n)/3)^{1/(n+1)}.$$

On peut dès lors prouver le théorème suivant :

Théorème 1.8 *Il existe une fonction $\tau_5(\varepsilon|n)$ telle que si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant $\lambda_{n+1}(M) \leq n + \varepsilon$ alors :*

$$\mathrm{Vol}(M) \geq (1 - \tau_5(\varepsilon|n)) \,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n).$$

Remarque 1.9 *Ce théorème achève de démontrer que pour une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à (n-1) il est équivalent d'être de volume presque maximal, de Radius presque maximal ou de n+1-ème valeur propre presque minimale.*

Preuve. Commençons par définir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} F \;:\; M & \to \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ \qquad\; x & \mapsto \quad (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{F} \;:\; M' & \to \quad \mathbb{R}^{n+1} \\ \qquad\; x & \mapsto \quad r.F(x). \end{cases}$$

De ce qui précède, on déduit que l'application $\Phi = \frac{1}{|F|} \cdot F$ est correctement définie de M dans $\mathbb{S}^n$ si ε est suffisamment petit. On remarquera de plus que ces fonctions sont construites de manière à imiter le plongement isométrique de $(\mathbb{S}^n, can)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ qui a été étudié en section 1.1.

<u>Φ est presque contractante :</u>

Dans la suite nous noterons p (resp. Π)la projection orthogonale de T_xM' (resp. $\mathbb{R}^{n+1}$) sur T_xM (resp. $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$) et i (resp. j) l'injection canonique de T_xM (resp. $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$) dans T_xM' (resp. $\mathbb{R}^{n+1}$).

Nous allons commencer par montrer que l'application Φ est presque contractante, il suffira alors, pour conclure, de montrer qu'elle est de plus surjective :

comme $d_x\Phi = \frac{1}{|F|}\Pi \circ (d'_{(x,1)}\widetilde{F}) \circ i$, on on a ${}^t(d_x\Phi) = \frac{1}{|F(x)|} p \circ^t (d'_{(x,1)}\widetilde{F}) \circ j$. Si $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, les définitions d F_i et de la transposée d'une application donnent :

$$ {}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(e_i) = \nabla' F_i = \nabla f_i(x) + f_i(x) \cdot e; \tag{5}$$

de cette égalité, on déduit que, pour tout $v \in T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$, ${}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(v)$ est orthogonal à e, d'où :

$$ {}^t(d_x\Phi)(v) = \frac{1}{|F(x)|}\, {}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(v). \tag{6}$$

De plus, de l'égalité (5) et du lemme 1.5, on déduit que :

$$\|{}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(v)\| \leq [1+\tau_3(\varepsilon|n)]\|v\| \tag{7}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cela veut dire que ${}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})$ est presque contractante, et par conséquent ${}^t(d_x\Phi)$ et $(d_x\Phi)$ sont presques contractantes (d'après la relation (6) et la proposition 1.7).

Le degré de Φ vaut ± 1 (cas M orientable) :

Dans un premier temps nous supposerons que M est orientable. De ce qui précède, on déduit l'inégalité suivante :

$$|deg\,\Phi|\operatorname{Vol}(\mathbb{S}^n) = \left|\int_M det(d_x\Phi)dv_g(x)\right| \leq (1+\tau(\varepsilon|n))\operatorname{Vol}(M)$$

Or d'aprés le théorème de Bishop-Gromov 1.1, on a $\operatorname{Vol}(M) \leq \operatorname{Vol}\mathbb{S}^n$; par ailleurs le degré d'une application est toujours un entier. Il suffit de montrer que le degré de Φ est non nul pour conclure que le volume de M est presque maximal (et alors le degré de Φ vaudra ± 1).

Il ne nous reste donc qu'à montrer que le degré de Φ est non nul. Et même, d'après l'égalité (6) et la proposition 1.7, il nous suffit de montrer que la valeur absolue de l'intégrale de $det(d'_{(x,1)}\widetilde{F})$, en restriction à $M\times\{1\}$, est supérieur à $1/2$.

(En effet, on peut munir $\mathbb{R}^{n+1}$ et TM d'une orientation. On en déduit une orientation induite de $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$ et une orientation de TM' qui prolonge celle de TM. Soit $\{u_1,\ldots,u_n\}$ et $\{v_1,\ldots,v_n\}$ des BON directes de T_xM et $T_{\Phi(x)}\mathbb{S}^n$ (respectivement), alors $\{e,u_1,\ldots,u_n\}$ et $\{\frac{F(x)}{|F(x)|},v_1,\ldots,v_n\}$ sont des BON directes de $T_{(x,1)}M'$ et$\mathbb{R}^{n+1}$. Les déterminants étant exprimés dans ces bases, nous avons :

$$\begin{aligned} det\left[{}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})\right] &= det({}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(\tfrac{F}{|F|}),{}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(v_1),\ldots,{}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(v_n)) \\ &= |F(x)|^{n+1}det(e,{}^t(d_x\Phi)(v_1),\ldots,{}^t(d_x\Phi)(v_n)) \\ &\ \text{en vertu de (6) et du fait que } g({}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})(\tfrac{F}{|F|}(x)),e) = |F(x)|. \\ &= |F(x)|^{n+1}det\left[{}^t(d_x\Phi)\right] \qquad\qquad). \end{aligned}$$

Soit $h(x) = \operatorname{tr}\left[(d'_{(x,1)}\widetilde{F})\circ{}^t(d'_{(x,1)}\widetilde{F})\right]$. D'aprés l'équation (5), on a $h(x) = \sum_{i=1}^{n+1}|df_i|^2+f_i^2$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{1}{\operatorname{Vol}(M)}\int_M h(x)\,dx &= \frac{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i}{n+1}+1, \\ \|h\|_\infty &\leq (n+1)(1+\tau_3(\epsilon|n)). \end{cases}$$

On pose $A_\varepsilon = \{h \leq (n+1)(1-\sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)})\}$, alors l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev nous donne :

$$\frac{\operatorname{Vol}(A_\varepsilon)}{\operatorname{Vol}(M)} < \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}.$$

En tout point x de $M\backslash A_\varepsilon$, les valeurs propres $\mu_i(x)$ de l'opérateur symétrique $(d'_{(x,1)}\widetilde{F}) \circ^t (d'_{(x,1)}\widetilde{F})$ vérifient :

$$\begin{cases} \left|\left(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i(x)\right) - (n+1)\right| \leq (n+1)\sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}, \\ \mu_i(x) \leq (1+\tau_3(\varepsilon|n)), \end{cases}$$

d'où $\|\mu_i - 1\|_\infty \leq (2n+1)\sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}$ et $\left|1 - det(d'_{(x,1)}\widetilde{F})^2\right| \leq C(n)\sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}$.

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \left[det(d'_{(x,1)}\widetilde{F})\right]^2 \geq [1-\tau(\varepsilon|n)]\,. \tag{8}$$

Posons $u(x) = det(d'_{(x,1)}\widetilde{F})$ et $\bar{u} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M u$. Nous devons donc montrer que $|\bar{u}|$ n'est pas nulle pour conclure. Or l'hypothèse $\mathrm{Ric}(M) \geq (n-1)$ implique $\lambda_1 \geq n$ (*cf*le théorème de Lichnerowicz en appendince A). D'aprés l'inégalite de Poincaré, il nous suffit de montrer que la norme L^2 de (du) est universellement petite (ce qui prouvera que $|\bar{u}| \geq 1 - \tau(\varepsilon|n)$).

Or si on prolonge $\{u_i\}$ en un repère orthonormé de TM au voisinage de x, tel que $D_. u_i = 0$ au point x, nous avons, pour tout $X \in T_xM$, :

$$\begin{aligned} d_xu(X) &= X.\left[det(\widetilde{F}(x,1), d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_1), \ldots, d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_n))\right] \\ &= \overbrace{det(d'_{(x,1)}\widetilde{F}(X), d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_1), \ldots, d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_n))}^{=0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} det(\widetilde{F}(x,1), d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_1), \ldots, D'd'\widetilde{F}_{|(x,1)}(X,u_i), \ldots, d'_{(x,1)}\widetilde{F}(u_n)) \\ &\leq C(n)|D'_Xd'\widetilde{F}| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (7). Or, en intégrant la formule de Bochner appliquée à F_i dans la démonstration du lemme 1.5 (page 10), on obtient :

$$\||D'd\widetilde{F}|\|^2_{L^2(M\times\{1\})} \leq \tau(\varepsilon|n). \tag{9}$$

d'où $\|du\|^2_{L^2} \leq C(n).n.\tau(\varepsilon|n)$, et finalement $|deg\Phi| \simeq |\bar{u}|^2 > 1/2$.

<u>Le cas non-orientable</u>

Si (M^n, g) est non-orientable, on peut toujours construire l'application Φ et remarquer qu'elle se relève sur le revêtement riemannien orientable $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ à deux feuillets de M en une application de degré necessairement paire. Or $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ est aussi de courbure de Ricci supérieure à (n-1), et les fonctions propres f_i de (M^n, g) se relèvent en des fonctions propres de $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ associées aux mêmes valeurs propres λ_i, donc d'une par $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ vérifie les hypothèses du théorème 1.8, mais si on considère la fonction $\widetilde{\Phi}$ construite comme précédemment à partir des fonctions propres de $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ qui sont les relevées des premières fonctions propres de (M^n, g) on obtient rien d'autre que le relevé de la fonction Φ. La contradiction vient de ce que $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ étant orientable, $\widetilde{\Phi}$ doit être de degré ± 1.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'une des hypothèses de pincement du volume, du radius ou de λ_{n+1} implique $d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) \leq \tau(\varepsilon|n)$. Il suffit même de démontrer, d'après ce qui précède, la proposition plus faible suivante (mais dont la démonstration est plus aisée, car on peut utiliser toutes les estimations précédentes) :

Proposition 1.10 *Il existe une fonction $\tau_5(\varepsilon|n)$ telle que pour toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et vérifiant* $\mathrm{Vol}(M) \geq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)$, $\mathrm{Rad}(M) \geq \pi - \varepsilon$ *et* $\lambda_{n+1} \leq n + \varepsilon$ *on ait* $d_{GH}\big((M,g), (\mathbb{S}^n, can)\big) \leq \tau_5(\varepsilon|n$.

Preuve. A un facteur multiplicatif près, il suffit de montrer qu'il existe une approximation de Hausdorff-Gromov assez bonne. Le bon candidat pour réaliser cette approximation est la fonction Φ. On sait déjà que l'application Φ est surjective pour ε assez petit, il ne reste donc qu'à montrer que pour tout $(x, y) \in M^2$, on a :

$$|d_{\mathbb{S}^n}(\Phi(x), \Phi(x)) - d(x, y)| \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Mais par uniforme continuité de cos^{-1} sur l'intervalle $[0, \pi]$, il suffit de montrer que

$$|< \Phi(x), \Phi(y) > -cos(d(x, y))| \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Pour montrer cela, on a besoin dans un premier temps d'établir l'équivalent L^∞ de l'estimation (ii) du lemme 1.2 :

Lemme 1.11 *Il existe une fonction $\tau_6(\varepsilon|n)$ telle que, sous les hypothèses de la proposition 1.10, on ait :*

$$\|cos(d(x_0, x)) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x_0} f_i\|_{L^\infty} \leq \tau_6(\varepsilon|n).$$

Preuve. pour démontrer ce lemme, on applique la même méthode que dans la démonstration de la proposition 1.7. On pose $f = cos(d(x_0, .)) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x_0} f_i$. On a alors

$$\|df\|_{L\infty} \leq 2 + \tau(\varepsilon|n) \leq C(n)$$

(d'aprés le lemme 1.5 et le lemme 1.2) et, toujours d'après le lemme 1.2,

$$\|f\|_2^2 \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Donc, pour tout $r > 0$ et tout point x_1 de M tel que $|f(x_1)| = \|f\|_{L^\infty}$, on a, en utilisant le fait que $|f|^2 \geq \|f\|_{L^\infty}(\|f\|_{L^\infty} - Cr)$ sur $B(x_1, r)$ par le théorème des accroissements finis :

$$\tau(\varepsilon|n) \geq \|f\|_{L^\infty} \left(\|f\|_{L^\infty} - 2Cr\right) \frac{\mathrm{Vol}(B(x_1, r))}{\mathrm{Vol}(M)}$$

En posant $r = \tau^{\frac{1}{2n}}$ et en utilisant le théorème de Bishop-Gromov 1.1, on obtient

$\sqrt{\tau} \geq \|f\|_{L^\infty}(\|f\|_{L^\infty} - 2C\tau^{\frac{1}{2n}})\frac{1}{\pi^n}$ et donc (quitte à changer τ) le résultat annoncé.

fin de la proposition 1.10

Pour conclure, on voit que comme dans le cas de la sphère (*cf*section 1.1), il suffit de montrer que $|\alpha_{i|x} - f_i(x)| \leq \tau(\varepsilon|n)$. En effet, on aura alors

$$cos(d(x_0,x)) \simeq \sum_i \alpha_{i|x_0} f_i(x) \simeq \sum_i f_i(x_0).f_i(x) \simeq < \Phi(x), \Phi(x_0) >= cos[d_{\mathbb{S}^n}(\Phi(x_0), \Phi(x))].$$

en utilisant également le lemme 1.11 et la proposition 1.7.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \left(\alpha_{i|x} - f_i(x)\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)^2 - 2\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x}.f_i(x) \\ &\leq 2 + \tau(\varepsilon|n) - 2cos(d(x,x)) = \tau(\varepsilon|n). \end{aligned}$$

d'aprés le lemme 1.2, le lemme 1.11 et la proposition 1.7, ce qui conclut.

Dans cette première partie, on a donc montré l'équivalence entre : la presque maximalité du volume, celle du radius, le pincement des (n+1) premières valeurs propres du laplacien et la proximité avec la sphère $\mathbb{S}^n$ au sens de Hausdorff-Gromov pour une variété de courbure de Ricci supérieure à (n-1).

2 Construction du difféomorphisme en courbure sectionnelle majorée

Pour construire le difféomorphisme entre M^n et $\mathbb{S}^n$ nous allons nous donner un majorant de la courbure sectionnelle qui nous permettra, en nous inspirant des travaux de S.Ilias (*cf*[14]) de transformer l'estimation L^2 du Hessien des fonctions propres associées aux petites valeurs propres donnée dans la démonstration du théorème 1.11 (inégalité 9, p.15) en une estimation L^∞. On en déduira alors facilement que l'application Φ construite dans la section précédente est un difféomorphisme, et même une presque-isométrie, dans le sens précisé par le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Pour tout $A > 1$, il existe une constante $\varepsilon(A,n)$ et une fonction $\tau(\epsilon|n,A)$ telles que, sur toute variété riemannienne compacte (M^n,g) de courbure de Ricci supérieure à (n-1), de courbure sectionnelle inférieure à A et vérifiant $\mathrm{Vol}(M) \geq (1-\varepsilon)\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)$ (avec $\epsilon \leq \epsilon(n,A)$), l'application $\Phi\ :\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x)}}(f_1(x),\ldots,f_n(x))$, donnée par les (n+1) premières fonctions propres f_i du laplacien, soit un difféomorphisme de M sur $\mathbb{S}^n$.*

De plus Φ est une presque-isométrie, i.e., pour tout $u \in TM \setminus \{0\}$, on a :

$$(1 - \tau(\varepsilon|A,n)) \leq \frac{< d\Phi(u), d\Phi(u) >}{g(u,u)} \leq 1 + \tau(\varepsilon|A,n).$$

Remarque 2.2 *Ce théorème est énoncé avec l'hypothèse de presque maximalité du volume, mais on pourrait tout aussi bien l'énoncer sous l'hypothèse de presque maximalité du radius, du pincement des (n+1) premières valeurs propres ou pour un voisinage suffisamment petit de la sphère en distance de Hausdorff-Gromov d'après la section précédente (théorème 0.4).*

Preuve. Elle est fondée sur le lemme suivant, dont on renvoie la démonstration la fin de cette partie :

Lemme 2.3 *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\tau(\varepsilon|A, n) > 0$ *telle que sur toute variété riemannienne compacte* (M^n, g) *de courbure de Ricci supérieure à (n-1) et de courbure sectionnelle inférieure à A, on ait* $\|D'd'(rf_i)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ *pour toute fonction propre* f_i *correspondant à une valeur propre* λ_i *inférieure à* $n+\tau(\varepsilon|n)$.

On a :

$$\left|\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M g'_{(x,1)}(d'F_i, d'F_j)dv_g \ -\delta_{ij}\right| = \frac{|\lambda_i - n|}{n+1}\delta_{ij} \leq \tau(\varepsilon|A,n),$$

et, en utilisant les lemmes 1.5 et 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\|d(g'(d'F_i, d'F_j))\|_{L^\infty} &\leq \|g'(D'd'F_i, d'F_j)\|_{L^\infty} + \|g'(d'F_i, D'd'F_j)\|_{L^\infty} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

donc, par le théorème des accroissements finis et le théorème de Myers, on en déduit que :

$$\|g'(d'F_i, d'F_j)dv_g \ - \delta_{ij}\|_{L^\infty} \leq \tau(\varepsilon|A,n) + \varepsilon\,\mathrm{Diam}(M) \leq \tau(\varepsilon|A,n) + \varepsilon\pi,$$

soit $\|(d'\widetilde{F}) \circ {}^t\,(d'\widetilde{F}) - id_{\mathbb{R}^{n+1}}\|_{L^\infty} \leq \tau(\varepsilon|A,n)$, i.e. $d'\widetilde{F}$ est presque isométrique. D'après la formule (6) (p.13) et la proposition 1.7, on en déduit que $(d_x\Phi)$ est presque isométrique.

Nous passons maintenant à la démonstration du lemme 2.3 :

Preuve.

La démonstration de ce lemme utilise le même schéma de preuve que pour la majoration de la norme L^2 du hessien des fonctions propres (*cf*la démonstration du théorème 1.8). On applique d'abord une formule de Bochner-Weitzenbock à F_i puis une technique d'itérations à la DeGiorgi-Möser, déjà utiliseé dans la démonstration du lemme 1.5. Elle est toutefois plus délicate.

On admettra la formule de Weitzenböck suivante :

Lemme 2.4 *Soit h un 2-tenseur symétrique défini sur* TM*, et pour tout* $p \in M$*, soit* $\{e_i\}$ *une BON de* T_pM*. on a alors :*

$$\frac{1}{2}\triangle|T|^2 = < \triangle_L T, T > -|DT|^2 - < \mathrm{R}(T), T > .$$

où

$$\mathrm{R}(h)(e_i,e_j) = \sum_k \mathrm{Ric}_M(e_i,e_k)h(e_k,e_j) + h(e_i,e_k)\,\mathrm{Ric}(e_k,e_j) \ -2\sum_{k,l} R(e_i,e_k,e_j,e_l)h(e_k,e_l),$$

et $\triangle_L h = D^*Dh + \mathrm{R}(h)$ *est appelé le laplacien de Lichnerowicz (*D^* *est l'adjoint de D pour le produit scalaire* L^2*).*

Posons $T = Ddf_i + \frac{\lambda_i}{n} f_i g = D'dF_i - \frac{\lambda_i - n}{n} f_i g$, d'aprés le lemme 1.5, il suffit donc de montrer que $\|T\|_\infty$ est petit dès que $(\lambda_i - n)$ est assez petit. De plus, on a :

$$\|T\|_2 \leq \|D'dF_i\|_{L^2(M)} + \frac{\lambda_i - n}{n+1},$$

et on a déjà montré en (9) l'inégalité $\|D'dF_i\|_{L^2(M)} \leq \tau(\epsilon|n)$. On en déduit qu'il suffit de majorer universellement le rapport $\dfrac{\|T\|_\infty}{\|T\|_2}$ pour pouvoir conclure. Comme pour la démonstration de lemme 1.5, nous allons faire cela en utilisant de façon itérative l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme 1.6.

Mais pour cela nous avons besoin de plusieurs lemmes :

Lemme 2.5 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de courbure de Ricci supérieure à n-1 et de courbure sectionnelle inférieure à A. Si f_i est une fonction propre de M associée à la valeur propre λ_i et qu'on pose $T = Ddf_i + \frac{\lambda_i}{n} f_i g$, alors on a :*

$$\frac{1}{2}\triangle|T|^2 + |DT|^2 \leq (\lambda_i - 2nA)|T|^2 + < \square \operatorname{Ric}_M, df_i \otimes T >$$

où on a posé :

$$\square \operatorname{Ric}_M(e_k; e_i, e_j) = D_{e_k} \operatorname{Ric}_M(e_i, e_j) - D_{e_j} \operatorname{Ric}_M(e_k, e_i) - D_{e_i} \operatorname{Ric}_M(e_j, e_k).$$

Preuve.

D'aprés le lemme 2.4, on a :

$$\frac{1}{2}\triangle|T|^2 + |DT|^2 = < \triangle_L T, T > - < \mathrm{R}(T), T > .$$

Or T est un tenseur symétrique, il existe donc une base $\{e_i\}$ de T_pM qui le diagonalise en $p \in M$, et alors on a :

$$\begin{aligned}
< \mathrm{R}(h), h > &= \sum_{i,j}\Big(\operatorname{Ric}_M(e_i, e_j) T^2(e_j, e_j)\delta_{i,j} + \delta_{i,j} T^2(e_i, e_i) \operatorname{Ric}_M(e_i, e_j) \\
&\qquad - 2\sum_k R(e_i, e_k, e_j, e_k) T(e_k, e_k)\delta_{i,j} T(e_i, e_j)\Big) \\
&= \sum_i \sum_k \sigma(e_i, e_j) T^2(e_i, e_i) + T(e_k, e_k)\sigma(e_i, e_i) - 2\sigma(e_i, e_k) T(e_k, e_k) T(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i,k} \sigma(e_i, e_k)[T(e_i, e_i) - T(e_k, e_k)]^2 \\
&\geq 2A(n|T|^2 - (tr\ T)^2) \\
&\geq 2An|T|^2.
\end{aligned}$$

De plus, si $\{e_i\}$ est une BON au voisinage de p telle que $D_{.}e_i = 0$ en p, alors :

$$\begin{aligned}
& (\triangle_L(Ddf) - Dd\triangle f)(e_i, e_j) = (\triangle_L(Ddf) - D(\triangle df))(e_i, e_j) \\
= & \sum_k DDDdf(e_i, e_k, e_k, e_j) - \sum_k DDDdf(e_k, e_k, e_i, e_j) - \sum_a D_{e_i}[\operatorname{Ric}(e_j, e_a) df(e_a)] \\
& + \sum_k \operatorname{Ric}(e_i, e_k) Ddf(e_k, e_j) + \sum_k \operatorname{Ric}(e_j, e_k) Ddf(e_i, e_k) - 2\sum_{k,l} R(e_i, e_k, e_j, e_l) Ddf(e_k, e_l).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \sum_k DDDdf(e_i,e_k,e_k,e_j) - \sum_k DDDdf(e_k,e_k,e_i,e_j) \\
= & \sum_k (D_{e_i}D_{e_k} - D_{e_k}D_{e_i})(D_{e_k}df(e_j)) + \sum_k D_{e_k}[(D_{e_i}D_{e_k} - D_{e_k}D_{e_i})df(e_j)] \\
= & \Big[\sum_{a,k} R(e_i,e_k,e_j,e_a)Ddf(e_k,e_a) - \mathrm{Ric}(e_i,e_a)Ddf(e_a,e_j) \\
& + \sum_{a,k}(D_{e_k}R)(e_i,e_k,e_j,e_a)df(e_a) + \sum_a R(e_i,e_k,e_j,e_a)Ddf(e_k,e_a)\Big].
\end{aligned}$$

Après simplification, on a donc :

$$(\triangle_L(Ddf) - Dd\triangle f)(e_i,e_j) = -\sum_a (D_{e_i}\mathrm{Ric})(e_j,e_a)df(e_a) + \sum_{k,a}(D_{e_k}R)(e_i,e_k,e_j,e_a)df(e_a)$$

La seconde identité de Bianchi donne alors :

$$(\triangle_L(Ddf) - Dd\triangle f)(e_i,e_j) = \square\,\mathrm{Ric}_M(\nabla f; e_i,e_j).$$

On conclut enfin en remarquant que :

$$\begin{aligned}
< \triangle_L T, T > &= < \triangle_L Ddf_i, T > = < Dd\triangle f_i, T > + < \square\,\mathrm{Ric}_M, df_i \otimes T > \\
&= \lambda_i |T|^2 + < \square\,\mathrm{Ric}_M, df_i \otimes T >
\end{aligned}$$

car $\triangle_L(g) \equiv 0$, donc $\triangle_L(f.g) = (\triangle f).g$, i.e. $< \triangle_L(f.g), T >= 0$ puisque T est de trace nulle.

Lemme 2.6 *Sous les mêmes hypothèses que pour le lemme 2.5 et pour tout* $k \geq 2$, *on a :*

$$\frac{4k-3}{k^2}\|d(|T|^k)\|_2^2 \leq C(n,A)\left[k^2 + \|T\|_\infty^2\right]\|T\|_{2k-2}^{2k-2}$$

Preuve.

D'aprés le lemme 2.5, on a :

$$\int_M \frac{1}{2}\triangle|T|^2|T|^{2k-2} + |DT|^2|T|^{2k-2} \leq (\lambda_i - 2nA)\int_M |T|^{2k} + \int_M < \square\,\mathrm{Ric}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2}.$$

Il nous faut estimer $\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M < \square\,\mathrm{Ric}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2}$:

Commençons par remplacer Ric_M par $\overline{\mathrm{Ric}}_M = \mathrm{Ric}_M - (n-1)\frac{k_1+k_2}{2}g$ où $k_1(n-1)$ (resp. $k_2(n-1)$) est la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de Ric_M sur M (elle existe car M est compacte, et est majorée (resp. minorée) universellement en fonction de A).

On a $\square\overline{\mathrm{Ric}}_M = \square\,\mathrm{Ric}_M$, et en utilisant la symétrie de T, on obtient :

$$\int_M < \square\overline{\mathrm{Ric}}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2} = \int_M < D\overline{\mathrm{Ric}}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2} - 2\int_M < D\overline{\mathrm{Ric}}_M, T \otimes df_i > |T|^{2k-2}$$

En appliquant le théorème de la divergence au champ $X =< \overline{\mathrm{Ric}}_M, T > |T|^{2k-2}\nabla f_i$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_M < D\overline{\mathrm{Ric}}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2} &= \int_M \triangle f_i < \overline{\mathrm{Ric}}_M, T > |T|^{2k-2} \\ &\quad - \int_M < df_i \otimes \overline{\mathrm{Ric}}_M, DT > |T|^{2k-2} \\ &\quad - (2k-2)\int_M < df_i \otimes \overline{\mathrm{Ric}}_M, d|T| \otimes T > |T|^{2k-3}.\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}-2\int_M < D\overline{\mathrm{Ric}}_M, T \otimes df_i > |T|^{2k-2} &= 2\int_M \sum_{k,l,m} \overline{\mathrm{Ric}}_M(e_k,e_l).T(e_m,e_k)Ddf_i(e_m,e_l)|T|^{2k-2} \\ &\quad +2\int_M \sum_{k,l,m} \overline{\mathrm{Ric}}_M(e_k,e_l).D_{e_m}T(e_m,e_k)df_i(e_l)|T|^{2k-2} \\ &\quad +2(2k-2)\int_M < d|T| \otimes \overline{\mathrm{Ric}}_M, T \otimes df_i > |T|^{2k-3}.\end{aligned}$$

Enfin remarquons que :

$$\begin{aligned}&\sum_{k,l,m} \overline{\mathrm{Ric}}_M(e_k,e_l).T(e_m,e_k)Ddf_i(e_m,e_l)|T|^{2k-2} \\ = &\sum_{k,l,m} \overline{\mathrm{Ric}}_M(e_k,e_l).T(e_m,e_k)T(e_m,e_l)|T|^{2k-2} \\ &-\frac{\lambda_i}{n} f_i < \overline{\mathrm{Ric}}_M, T > |T|^{2k-2}\end{aligned}$$

D'après les calculs ci-dessus et l'inégalité de Kato ($|d|T|| \leq |DT|$), on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_M < \square \,\mathrm{Ric}_M, df_i \otimes T > |T|^{2k-2}\right| &\leq \|\,\mathrm{Ric}\,\|_{L^\infty}\Big(A(n)\lambda_i \int_M f_i|T|^{2k-1} \\ &\quad +B(n)\int_M |T|^{2k} + D(n)\int_M k|DT||T|^{2k-2}|df_i|\Big) \\ &\leq C(n)(k_1-k_2)\Big(\|f_i\|_{L^\infty}\int_M |T|^{2k-1} \\ &\quad +\int_M |T|^{2k} + k\|df_i\|_{L^\infty}\int_M |DT||T|^{2k-2}\Big).\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.5 et ce qui précède, on a, si $\lambda_i \leq \lambda$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \frac{1}{2}\triangle(|T|^2)|T|^{2k-2} + |DT|^2|T|^{2k-2} &\leq C'(n,A,\lambda)\Big(\|T\|_{2k}^{2k} + \|f_i\|_\infty \|T\|_{2k-1}^{2k-1} \\ &\quad + k^2\|df_i\|_\infty^2 \|T\|_{2k-2}^{2k-2}\Big) \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M |DT|^2|T|^{2k-2}\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, et puisque $\int_M f_i = 0$, on a $\|f_i\|_\infty \leq \pi \cdot \|df_i\|_\infty$, donc

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \triangle(|T|^2)|T|^{2k-2} + |DT|^2|T|^{2k-2} \leq C(n,A,\lambda)\left(\|T\|_{2k}^{2k} + k^2\|df_i\|_\infty^2 \|T\|_{2k-2}^{2k-2}\right).$$

Soit, d'aprés le lemme 1.5 l'hypothèse sur λ_i et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \triangle(|T|^2)|T|^{2k-2}+|DT|^2|T|^{2k-2} \leq C(n,A)\left[k^2+\|T\|_\infty^2\right]\|T\|_{2k-2}^{2k-2}.$$

Or on a :

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M |d(|T|^k)|^2 \leq \frac{2k^2}{4k-3}\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \frac{1}{2}\triangle(|T|^2)|T|^{2k-2}+\frac{1}{2}|DT|^2|T|^{2k-2},$$

ce qui permet de conclure.

En utilisant l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme 1.6, on obtient :

$$\|T\|_{\frac{2kn}{n-2}}^{2k} \leq \left(\|T\|_\infty^2 + B(n,A)\frac{k^2}{4k-3}(k^2+\|T\|_\infty^2)\right)\|T\|_{2k-2}^{2k-2}.$$

On a vu précédemment qu'il existe une fonction $\tau(\epsilon|n)$ telle que $\|T\|_2 \leq \tau(\epsilon|n)$, supposons alors que T satisfasse l'inégalité $\|T\|_\infty \geq \tau(\epsilon|n)^\alpha$, où α est une constante qui sera précisée dans la suite. On peut supposer ϵ assez petit pour que $\tau(\epsilon,n)\leq 1$, on a alors :

$$\|T\|_{\frac{2kn}{n-2}}^{2k} \leq \left(\frac{1+B'(n,A)k^3}{\tau(\epsilon|n)^{2\alpha}}\right)\|T\|_\infty^2\|T\|_{2k-2}^{2k-2}.$$

On pose alors $\beta=\frac{n}{n-2}$ et $k=\beta^i+1$, pour tout entier i. En utilisant l'inégalité de hölder, on obtient :

$$\frac{\|T\|_{2\beta^{i+1}}}{\|T\|_\infty} \leq \left(1+B''(n,A)\beta^{3i}\right)^{\frac{1}{2(\beta^i+1)}}\tau(\epsilon|n)^{-\frac{\alpha}{(\beta^i+1)}}\left(\frac{\|T\|_{2\beta^i}}{\|T\|_\infty}\right)^{\frac{\beta^i}{(\beta^i+1)}}.$$

En posant $a(n)=\displaystyle\prod_{i=0}^{\infty}\frac{\beta^i}{(\beta^i+1)}<1$ et $K(n,A)=\displaystyle\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+B''(n,A)\beta^{3i}\right)^{\frac{1}{2a(n)\beta^i}}$, on obtient (en itérant l'inégalité précédente) :

$$\|T\|_\infty \leq K(n,A)\tau(\epsilon|n)^{-\alpha\frac{1-a(n)}{a(n)}}\|T\|_2.$$

En posant $\alpha=\frac{a(n)}{2(1-a(n))}$, on obtient :

$$\|T\|_\infty \leq K(n,A)\sqrt{\tau(\epsilon|n)}.$$

En final, on en déduit que :

$$\|T\|_\infty \leq \sup(K(n,A)\sqrt{\tau(\epsilon|n)},\tau(\epsilon|n)^{\frac{a(n)}{2(1-a(n))}}).$$

3 Appendice A: Quelques propriétés des variétés à courbure de Ricci positive :

3.1 La courbure de Ricci et le laplacien :

La courbure de Ricci, comme toutes les autres notions de courbure, est un outil permettant l'étude locale des variétés riemanniennes. Nous ne travaillerons, dans la suite, que dans le cadre riemannien. C'est-à-dire que la connection de nos variétés est celle de Levi-Civita. Si (M,g) est une variété riemannienne le tenseur de courbure est :

$$R(X,Y,Z,W) = g\left(D_X D_Y W - D_Y D_X W - D_{[X,Y]} W, Z\right). \tag{1.1}$$

On a alors, en particulier, les relations suivantes :

$$\begin{array}{llll} a, & R(X,Y,Z,W) & = -R(Y,X,Z,W) & = R(Y,X,W,Z) \\ b, & R(X,Y,Z,W) & = R(Z,W,X,Y) & \end{array} \tag{1.2}$$

La courbure de Ricci, notée Ric, est une trace de R. Si $e_1, \cdots, e_n \in T_pM$ est une base orthornomale, alors :

$$Ric(v,w) = tr_{13}R(v,w) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i,v,e_i,w) = \sum_{i=1}^{n} R(v,e_i,w,e_i) \tag{1.2}$$

D'après les formules (1.2), Ric est une forme bilinéaire symètrique. On dira que la courbure de Ricci de M est minorée par k si (Ric-kg) est une forme bilinéaire positive. Pour toute fonction f de classe C^∞ définie sur M, on définit $\triangle f$ par :

$$\triangle f = -tr\ Ddf = -\sum_i Ddf(e_i,e_i) \tag{1.4}$$

On peut alors démontrer en utilisant le théorème de Stockes la formule suivante, appelée formule de Green :

$$\int_U (f\triangle h - h\triangle f)\, dv_g = \int_{\partial U} (f\frac{\partial h}{\partial \nu} - h\frac{\partial f}{\partial \nu})\, \omega_{n-1}$$

où U est un ouvert tel que $\bar{U}$ est une variété à bord, dv_g est la mesure canonique de (M,g), ν la normale intérieure et ω_{n-1} est la mesure induite sur la sous-variété ∂U.

3.2 Régularité de la fonction distance :

Soit x un point donné de M, une variété compacte. On définit alors :

$U_x = \{v \in T_xM / \exists \varepsilon > 0$ tel que la géodésique$t \to exp_x(tv)$ minimise sur $[0, 1+\varepsilon]\}$

Les résultats suivants sont classiques, et seront utilisées sans démonstration :

U_x est un ouvert, M=$exp_x(U_x) \amalg exp_x(\partial U_x)$, $exp_{x|U_x}$ est un C^∞ difféomorphisme sur son image et $exp_x(\partial U_x)$ est de mesure nulle. On notera $exp_x(\partial U_x) = Cut(x)$.

3.3 Théorème de Bishop-Gromov :

Les théorèmes de comparaison sont des outils permettant, sous de bonnes hypothèses sur la courbure (en général on minore la courbure de Ricci ou on encadre la courbure sectionnelle), de comparer la géométrie d'une variété avec celle d'autres variétés de référence, de courbure sectionnelle constante. Le premier résultat est l'inégalité de Bishop-Gromov:

Théorème 3.1 (Bishop-Gromov) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de courbure de Ricci supérieure à (n-1)k, où k est un réel donné. Alors, pour tous les ε, R tels que $0 < \varepsilon < R$, on a, $\forall x \in M$:*

$$\left(\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)}\right) \leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}, \tag{3.1}$$

où $V^k(r)$ désigne le volume de la boule de rayon r dans l'espace complet simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à k (c'est-à-dire R^n si k=0, $S^n(1/\sqrt{k})$ si $k > 0$ et $(H^n, g_0/\sqrt{-k})$ si $k < 0$, où (H^n, g_0) est l'espace hyperbolique canonique).

Preuve. Pour démontrer cette formule, on doit étudier les variations de la mesure riemannienne de (M^n, g) en fonction de la distance à un point donné. Cette étude peut-être faite en passant par celle du laplacien de la distance sur la variété . Il est naturel de l'exprimer dans la carte normale centrée en un point m fixe. Soit Φ :$]0, \infty[\times S^{n-1} \longrightarrow M$ l'inverse de la carte normale en m, ie $\Phi(r, v) = exp_m(rv)$. On a alors $\Phi^* dv_g = \theta(r, v)drdv$. Supposons que $r.v \in U_x$, alors pour tout voisinage U assez petit de v dans S^{n-1}, pour tout ε assez petit,tout point (t, u) de $[r, r+\varepsilon] \times U$ est tel que $t.u$ appartienne à U_x (puisque U_x est ouvert). Donc la fonction θ est régulière et non nulle sur un voisinage de $[r, r+\varepsilon] \times U$ et la fonction $\rho = d(m, .)$ est régulière sur $\Phi([r, r+\varepsilon] \times U)$. On en déduit que, quand ε et le diamètre de U tendent vers 0,

$$\begin{aligned}
\triangle\rho[\Phi(r,v)].\left(\int_{[r,r+\varepsilon]\times U} \theta(t,u)dtdu\right) &\simeq \int_{\Phi([r,r+\varepsilon]\times U)} \triangle\rho dv_g \\
&= \int_{\partial(\Phi([r,r+\varepsilon]\times U))} \frac{\partial\rho}{\partial\nu}\omega_{n-1} \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r\}\times U)] - \mathrm{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r+\varepsilon\}\times U)] \\
&= \int_U \theta(r,u)du - \int_U \theta(r+\varepsilon,u)du \\
&= \int_{[r,r+\varepsilon]\times U} -\frac{\partial\theta}{\partial r}(t,u)dtdu \\
&\simeq -\frac{1}{\theta(r,v)}.\frac{\partial\theta}{\partial r}(r,u)\left(\int_{[r,r+\varepsilon]\times U} \theta(t,u)dtdu\right)
\end{aligned}$$

D'où il vient que $\triangle\rho = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}$ sur $M \setminus Cut(x)$.

En fait, on peut montrer que $\triangle\rho$ se décompose en une partie régulière, que nous venons de calculer, définie sur U_x, et une partie singulière qui est une mesure positive à support dans Cut(x).

Pour mener plus loin notre étude de la fonction θ, on a maintenant besoin de la formule de Bochner :

Proposition 3.2 (formule de Bochner) *Pour toute fonction f de classe C^∞ sur (M,g), on a :*

$$g(d(\triangle f), df) = \mid Ddf \mid^2 + \frac{1}{2}\triangle(\mid df \mid^2) + Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{3.4}$$

Preuve. Les formules de Bochner sont les formules obtenues en traçant des formules de commutation de tenseurs. Ici on calcule la différence :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z)$$

or, on a :

$$\begin{aligned} DDdf(X,Y,Z) &= X.Ddf(Y,Z) - Ddf(D_XY,Z) - Ddf(Y,D_XZ) \\ &= X.(Y.df(Z)) - X.df(D_YZ)) - (D_XY).df(Z) + df(D_{D_XY}Z) \\ &\quad -Y.df(D_XZ) + df(D_YD_XZ), \end{aligned}$$

d'où :

$$DDdf(X,Y,Z) - DDdf(Y,X,Z) = df(R(Y,X)Z) = R(X,Y,Z,\nabla f). \tag{3.5}$$

D'autre part :

$$DDdf(X,Y,Z) = DDdf(X,Z,Y) \tag{3.6}$$

(car $Ddf(Y,Z) - Ddf(Z,Y) = ([Y,Z] + D_ZY - D_YZ).f = 0$ car la torsion est nulle). On obtient, en traçant la relation (3.5) et en utilisant (3.6) :

$$\begin{aligned} tr_{12}DDdf(Y) &= D_Y(tr_{12}Ddf) + tr_{13}R(\nabla f, Y) \\ &= -d\triangle f(Y) + Ric(\nabla f, Y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Enfin, on a : $d(\mid df \mid^2)(X) = 2g(D_Xdf, df)$, d'où

$$\begin{aligned} Dd(\mid df \mid^2)(X,Y) &= 2g(D_Xdf, D_Ydf) + 2g(D_YD_Xdf, df) - 2g(D_{D_XY}df, df) \\ &= 2g(D_Xdf, D_Ydf) + 2g(DDdf(X,Y), df) \end{aligned}$$

soit, en traçant

$$-\frac{1}{2}\triangle\mid df \mid^2 = \mid Ddf \mid^2 + tr_{12}DDdf(\nabla f) \tag{3.8}$$

En combinant (3.7) et (3.8) on obtient la formule annoncée. Nous adopterons, par souci de concision, la notation $f'(r,v)$ pour $\frac{\partial f}{\partial r}(r,v)$.

En posant $f(x) = r = d(p,x)$, en notant que $\mid dr \mid = 1$ et que r est régulière sur $\Phi(U_x)$, on a :

$$g(d(\triangle r), dr) = \frac{\partial}{\partial r}\triangle r = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\theta''}{\theta} + (\triangle r)^2,$$

on obtient :

$$-\frac{\theta''}{\theta} = \mid Ddr \mid^2 - (\triangle r)^2 + Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}). \tag{3.9}$$

On pose $b = \theta^{\frac{1}{n-1}}$, alors :

$$(n-1)\frac{b''}{b} + Ric(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = -(\mid Ddr \mid^2 - \frac{1}{n-1}(\triangle r)^2) \leq 0. \tag{3.10}$$

La dernière inégalité étant une conséquence de l'inégalité de Schwarz (le n-1 provenant du fait que $Ddr(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = d(dr(\frac{\partial}{\partial r}))(\frac{\partial}{\partial r}) = d(1)(\frac{\partial}{\partial r}) = 0$, car $D_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r} = 0$ puisque $r \mapsto \Phi(r,v)$ est une géodésique).

En utilisant l'hypothèse sur la courbure (on remarquera qu'elle n'a pas été utilisée dans ce qui précède), on obtient :

$$b'' + kb \leq 0.$$

on pose alors :

$$f = \frac{b}{\bar{b}},$$

où $\bar{b}$ est solution de l'équation

$$\bar{b}'' + k\bar{b} = 0$$

avec pour conditions initiales $\bar{b}(0) = b(u,0) = 0$ et $\bar{b}'(0) = b'(u,0) = 1$ car $\theta(r,v) \simeq r^{n-1}$ puisque l'application tangente à exp_m au point 0_m est id_{T_mM}, donc une isométrie de T_mM. On pose aussi

$$f' = \frac{h}{\bar{b}^2}.$$

On a alors

$$h' = \bar{b}(b'' + kb) \leq 0,$$

donc h décroît et, comme h(0)=0, f'=h est négatif.

On en déduit que f aussi décroît. On appelle b^+ le prolongement de b à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ obtenu en prolongeant par 0 en dehors de U_x–on remarquera que $\bar{b}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (mais peut être négative en courbure positive, ce qui ne correspond plus à la géométrie!), alors que b n'est définie que sur le segment de direction u contenu dans U_x. Alors $\frac{b^+}{\bar{b}}$ reste décroissante car si le segment $t \mapsto t.u$ atteint le bord de U_x après que $\bar{b}$ ne s'annule, alors la décroissance implique que b s'est annulé auparavant, ce qui est contradictoire.

Donc $b^+(t,v)^{n-1}$ est minorée (resp. majorée) par $\frac{b^+(\varepsilon,v)}{\bar{b}(\varepsilon)}^{n-1} \cdot \bar{b}(t)$ sur $[0,\varepsilon]$ (resp. sur $[\varepsilon, R]$). En intégrant ces inégalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^R b^+(r,v)^{n-1}dr}{\int_0^\varepsilon b^+(r,v)dr} &\leq 1 + \frac{\int_\varepsilon^R b^+(r,v)^{n-1}dr}{\int_0^\varepsilon b^+(r,v)^{n-1}dr} \\ &\leq 1 + \frac{\int_\varepsilon^R \bar{b}(r)dr}{\int_0^\varepsilon \bar{b}(r)dr} \leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned} V_x(R) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^R b^+(r,v)^{n-1} dr \right) dv \\ &\leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\varepsilon b^+(r,v)^{n-1} dr \right) dv \\ &\leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)} V_x(\varepsilon). \end{aligned}$$

On peut déduire de la démonstration du théorème de Bishop-Gromov (plus particulièrement de la version locale du théorème de Bishop-Gromov : le fait que $\frac{b}{b}$ soit décroissante) le théorème de Myers cité en introduction :

Théorème 3.3 (Myers) *Soit M une variété riemannienne compacte vérifiant* $\mathrm{Ric}(M) \geq (n-1)\delta^2$*, où δ est une constante strictement positive. Alors la variéte M est compacte et de diamètre inférieure à $\frac{\pi}{\delta}$.*

Preuve. d'après le théorème de Hopf-Rinow il suffit de démontrer l'inégalité sur le diamètre. Or, en reprennant les notations de la preuve précédente en coordonnées polaires exponentielles autour de n'importe quel point x, on obtient que, le long de toute géodésique minimisante $c_v : r \mapsto exp_x(r.v)$, on a $\theta^+(r,v) \leq \frac{sin(\delta.r)}{\delta}$; donc $\theta^+(\cdot,v)$ s'annule sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{\delta}]$ (au point où c_v rencontre le cut-locus de x). On en déduit que toute géodésique minimisante est de longueur au plus $\frac{\pi}{\delta}$.

En dernier lieu, nous donnons une autre application de la formule de Böchner :

Théorème 3.4 (Lichnerowicz) *Soit (M^n,g) une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure ou égale à (n-1) et f une fontion propre de M ($\triangle f = \lambda \cdot f$), alors on a $\lambda = 0$ ou $\lambda \geq n$.*

Preuve. Puisque le spectre d'une variété riemannienne compacte est positif, on peut supposer que $\lambda > 0$.

En remarquant que $|Ddf|^2 = \frac{\lambda^2}{n} f^2 + |Ddf + \frac{\lambda}{n} fg|^2$ et en intégrant la formule de Böchner sur M, on obtient $\lambda \geq n$.

References

[1] U. Abresch, D. Gromoll, *On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature*, Journ. A.M.S. V.3 (1990), 355-374.

[2] M. Anderson,*Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math. 68 (1990) 405-415.

[3] I. Chavel, *Riemannian geometry : a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge university press, 1993.

[4] J. Cheeger, T. Colding, *On the stucture of space with Ricci curvature bounded below*, J. Diff. Geom 46 (1997), 404.

[5] J. Cheeger, T. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. 144 (1996), 189-237.

[6] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric application*,Math. Z. 143 (1975), 289-297.

[7] S. Cheng, S. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math 28 (1975), 333-354.

[8] T. Colding, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. 124 (1996), 175.

[9] T. Colding, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. 124 (1996), 193.

[10] T. Colding, *Ricci curvature and volume convergence*, Annals of Maths 145 (1997), 477.

[11] S. Gallot, *Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés*, Sém. Bourbaki 835 (1997-1998)

[12] S. Gallot, *Variété dont le spectre ressemble à celui de la sphère*, Astrérisque 80 (1980), 33.

[13] M. Gromov, *(rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu); Structures métriques sur les variétés riemanniennes*, Textes Math. $n^o 1$, 1981.

[14] S. Ilias, *Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du laplacien et preuve de la conjecture du diamètre pincé,* Annales Institut Fourier 43 (1993), 843.

[15] Obata, *Certain condition for a riemannian manifold to be isometric to a sphere*, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 333-340.

[16] P. Petersen, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Preprint.

[17] K. Shiohama, *Recent developments in sphere theorems*, Proc. of Symp. in Pure Math. 54 (1993), Part 3.