Exercice 1 *Soient A et B deux matrices. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?*

1. *Si la matrice produit AB existe, alors la matrice BA existe aussi.*
2. *Si les matrices AB et BA existent, elles ont le même type (le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes).*
3. *Si les matrices AB et BA sont du même type, alors $AB = BA$ (voir Exercice 11).*
4. *Si la matrice A est non nulle et $AB = 0$, la matrice B peut être non nulle.*
5. *Il existe une matrice C non nulle telle que $CA = CB$ alors que $A \neq B$.*
6. *On a $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.*
7. *Si A est une matrice 2×2 qui vérifie $A^2 = \mathbb{I}_2$ (la matrice identité), alors $A = \mathbb{I}_2$ ou $A = -\mathbb{I}_2$.*

Exercice 2 *La famille $\{(1, 0, 2, 1), (0, 3, -1, 2), (3, -3, 7, 1)\}$ est-elle libre ?*

Exercice 3 *Soit* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *En utilisant la méthode de Gauss, montrer que C est inversible et calculer son inverse.*

Exercice 4 *Soit* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *En utilisant la méthode de Gauss, calculer le rang de D.*

Exercice 5 *Il y a sur un parking 66 véhicules (des vélos, des motos, des voitures et des camions ayant $2, 2, 4$ et 4 roues, respectivement).*

1. *Sachant que le nombre total de roues est 252 et qu'il y a quatre fois plus de voitures que de camions, écrire le système concernant le nombre de roues de ces véhicules.*
2. *Avant de résoudre ce système, l'ensemble des solutions peut-il être infini ?*
3. *Combien y'a-t-il de vélos, de motos, de voitures et de camions sur le parking ?*

Exercice 6 *Soient* $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *Sans résoudre $Mx = b$, existe-t-il une valeur de α pour laquelle ce système n'admet pas de solution ?*
2. *Sans résoudre, existe-t-il une valeur de α pour laquelle $Mx = b$ admet au moins une solution ?*
3. *Résoudre le système linéaire $Mx = b$.*

Exercice 7 *Soient* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 3 & \alpha & 18 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Résoudre le système linéaire* $Mx = b$.

Exercice 8 *Soient* a, b, c, d *des nombres réels. On considère la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. *Rappeler* **la définition** *d'une matrice inversible.*
2. *Monter que si* M *est inversible alors son inverse est unique.*
3. *Calculer* $(a + d)M - M^2$.
4. *En déduire que* M *est inversible si, et seulement si,* $ad - bc \neq 0$.
5. *Lorsque la matrice* M *est inversible, déterminer (en justifiant votre réponse) son inverse* M^{-1}.

Exercice 9 *Les ensembles suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si oui, donner une base.*

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z + 3t - 1 = 0\}$.
2. $\{(2x + y, x - y, x + 2y - 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y + 2z = 0\}$.
4. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, x + 2y - 3t = 0\}$.
5. $\{(x + y, x - 2y, x + 2y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. *L'ensemble des solutions de Exercice 6.*

Exercice 10 *On désigne par* $\mathcal{F}$ *l'espace vectoriel des fonctions sur* $\mathbb{R}$.

1. *Rappeler la structure d'espace vectoriel de* $\mathcal{F}$.
2. $\forall i \in \mathbb{N}, f_i$ *désigne la fonction caractéristique de* $\{i\}$: $f_i(i) = 1$ *et si* $j \neq i, f_i(j) = 0$. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la famille* $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ *est libre.*
3. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel* $\mathcal{F}$ *?*

Exercices d'entrainement

Exercice 11 *Soit* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *A-t-on* $AB = BA$ *?*

Exercice 12 *Soit* $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* N^p *pour* $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 *Soient* D *la droite passant par le point* $(0, 3, -1)$ *et de vecteur directeur* $(-1, 1, -1)$ *et* Δ *passant par le point* $(3, 1, 2)$ *et de vecteur* $(2, -3, 2)$. *Quelle est l'interesection de ces deux droites ?*

Exercice 14 *Résoudre*

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x-14y+7z-7t+11u & = & -1 \\ 4x-10y+5z-5t+7u & = & 1 \\ x+2y-z+t-2u & = & 1 \\ 2x-2y+z-t+u & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 15 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Résoudre le système linéaire en* (x, y, z, t) *:*

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+z+2t & = & 1 \\ 2x+\alpha y+z+t & = & 2 \\ 3y+z+2t & = & 3 \\ x+y+t & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 16 *Soit* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. *Est-il possible que le graphe de la fonction* $x \mapsto \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ *passent par les points* $(1,-1),(2,1),(-1,3),(-2,5)$ *?*

Exercice 17

1. *Montrer que l'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel de dimension infinie.*
2. *On considère* $E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0\}$.
   - (a) *Montrer que* E *est un espace vectoriel.*
   - (b) *Montrer que* E *est isomorphe à* $\mathbb{R}^2$.
   - (c) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Quand est-ce que* $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ *? Puis, en déduire une base de* E.
   - (d) *Exprimer un vecteur de* E *dans cette base.*