Exercice 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $\det(A), \det(2A), \det(A^2)$.
2. *Montrer de deux manières (déterminant et Gauss) que cette matrice est inversible.*
3. *Calculer son inverse de deux manières différentes.*

Exercice 2 *Calculer l'inverse de la matrice C de l'Exercice 3 de la série 2 avec la méthode des cofacteurs.*

Exercice 3

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres α et β pour que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ *soit inversible.*
2. *Soient α, β, γ des réels. Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ *est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$.*

Exercice 4 *Les applications suivantes sont-elles linéaires ?*

1.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y - 2z, x - y + z - 1) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x - |y| \end{aligned}$$

Exercice 5 *Soit f l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, 3x + y, x - y) \end{aligned}$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.*

Exercice 6 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y + 5z, x + 2y - 4z, 2x + 3y - 5z). \end{aligned}$$

1. *L'application f est-elle linéaire ?*

2. *Est-ce que l'application f est injective ?*

3. *Est-ce que l'application f est surjective ?*

Exercice 7 *Soit A une matrice $m \times n$. On définit l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & f(x) = Ax \end{array}$$

1. *Montrer que f est linéaire.*

2. *Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.*

Exercice 8 *On considère la base canonique $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ et on définit $u_1 = e_1 + 5e_3, u_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3, u_3 = 3e_2 - e_3$.*

1. *Montrer que $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Exprimer les coordonnées d'un vecteur v dans la base $\mathcal{U}$ en fonction de ses coordonnées dans $\mathcal{C}$.*

3. *Exprimer les coordonnées d'un vecteur w dans la base $\mathcal{C}$ en fonction de ses coordonnées dans $\mathcal{U}$.*

4. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{U}$ de 2 manières différentes (définition et formule de changement de base).*