Exercice 1 *Est-ce que les intégrales impropres suivantes convergent* $\int_0^1 \ln x\, dx, \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx, \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ *?*

Exercice 2 *Soit* X *une variable aléatoire (par exemple la durée de vie d'un ordinateur portable). On dit que* X *suit une loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ *si la probabilité pour que* $(X \leq a)$ *est* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}dx$ *(dans la cas de la durée de vie d'un ordinateur* $\lambda = 0,125$*).*

1. *Calculer* $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx$.
2. *Calculer* $P(X \leq a)$ *en fonction de* λ *et* a.
3. *Calculer* $P(a \leq X \leq b)$ *en fonction de* λ, a *et* b.
4. *Quelle est la valeur moyenne (l'esperance) de* X *? Et dans le cas de l'ordinateur ?*
5. *Quelle est la probabilité pour que la durée de vie de l'ordinateur dépasse* 5 *ans ? dépasse* 10 *ans ? ne dépasse pas* 2 *ans ?*

Exercice 3 *Si* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f(t) = e^{-t^2}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$, *on définit* $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$.

1. *Montrer que pour tout* $(x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$.
2. *Montrer que* $S_n(f) - \int_0^1 e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \big(f(t) - f(\frac{k}{n})\big)dt$.
3. *Montrer que* $|S_n(f) - \int_0^1 e^{-t^2}dt| \leq \frac{1}{n}$.
4. *En déduire une valeur de* $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ *à* 10^{-2} *près.*

Plus généralement, si f *est une fonction* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$, *on peut calculer une valeur approchée de* $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose pour* $i = 0 \ldots n, a_i = a + i\frac{b-a}{n}$, *et* $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$.

1. *Montrer que* $I(f) - S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \big(f(x) - f(a_i)\big)dx$.
2. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que* $|I(f)-S_n(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sup_{[a,b]} |f'(x)|$.
3. *Expliquer comment peut-on obtenir une valeur approchée de* $I(f)$.

On peut calculer une valeur approchée de $I(f)$ *plus rapidement pour une fonction* $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. *Pour cela, on pose pour* $i = 0 \ldots n - 1, m_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$, *et* $M_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$. *On montre que* $|I(f) - M_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{[a,b]} |f''(x)|$ *en utilisant la formule de Taylor à l'ordre* 2.
Donner une valeur approchèe à 10^{-2} *près de* $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ *en utilisant cette dernière méthode.*

Exercice 4 *Soit* $N(t)$ *le nombre de personnes dont les foyers sont connectés à internet. Supposons que le taux de nouveaux abonnés est proportionnel au nombre de personnes qui ne sont pas encore connectés à internet.*

1. *Quelle est l'équation différentielle satisfaite par* $N(t)$ *?*
2. *Déterminer* $N(t)$ *sachant que* $N(0) = 0$.

3. *Calculer* $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

Exercice 5 *Soit* P *le prix d'un bien. Si* $O(P) = a + bP$ *est l'offre de ce bien et* $D(P) = c - dP$ *est la demande, avec* a, b, c, d *des constantes strictement positives. Supposons que le prix varie avec le temps et que le taux de variation est proportionnel à la demande excédentaire* $D(P) - O(P)$.

1. *Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le prix* P *?*

2. *Résoudre cette équation.*