Feuilletages de 2-complexes

François Gautero
e-mail : Francois.Gautero@math.unige.ch
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre, cp 240, 1211 Genève, Suisse

Résumé : *On étudie l'existence de feuilletages transversalement orientés en graphes compacts sur des polyèdres spéciaux, et ses implications sur le groupe fondamental du complexe. Le critère que l'on donne ici permet de détecter les suspensions d'applications continues de graphes compacts, qui induisent des endomorphismes injectifs, non nécessairement surjectifs, sur le groupe fondamental du graphe. On établit ensuite un lien entre les 2-complexes "annulaires" et les variétés de Seifert à bord.*

Introduction

En topologie de basse dimension, on a porté une grande attention à l'étude des feuilletages transversalement orientés de codimension 1 sur des 3-variétés (voir [2] par exemple, parmi beaucoup d'autres). Un objectif de cet article est de commencer une étude similaire dans le cas des 2-complexes, et plus précisément des 2-*polyèdres spéciaux* [6]. Ce sont des 2-complexes linéaires par morceaux dont chaque point admet un voisinage de l'un des trois types illustrés dans la figure 1. Ce type combinatoire de 2-complexes fut d'abord introduit par Casler [1], sous le nom de 2-*complexe standard*, pour l'étude des 3-variétés compactes. Casler démontre que toute telle variété à bord est l'épaississement d'un 2-complexe standard. Plus tard Wright [11] démontra que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un 2-complexe standard.
Suivant la terminologie de [3], on appellera 2-*complexe dynamique plat* un 2-polyèdre spécial dont les composantes connexes de l'ensemble des "points singuliers" sont des anneaux ou des bandes de Moebius, et muni de deux propriétés combinatoires sur l'orientation des branches de l'ensemble singulier (c'est un graphe). Un "point singulier" est un point dont aucun voisinage dans le complexe n'est homéomorphe à un disque. On prouve dans [3] que ces conditions d'orientation des branches du graphe singulier sont suffisantes pour définir des *semi-flots non-singuliers* sur le 2-complexe, c'est à dire des semi-groupes d'applications continues du complexe sans points fixes. Par l'étude de l'existence de certains *feuilletages en graphes compacts transversalement orientés*, on a pu exhibé une classe particulière de 1-cocycles, nommés *cocycles positifs*, représentant des automorphismes de groupe libre. En d'autres mots, on a donné un critère suffisant d'existence de section globale à un semi-flot sur un 2-complexe dynamique, où par "section globale" on entend un graphe plongé transverse au semi-flot et intersectant toutes ses orbites en temps fini. L'application

de retour du semi-flot sur n'importe laquelle de ses sections globales données par ce critère induit un automorphisme sur le groupe fondamental de la section. Cependant on construit facilement des semi-flots non-singuliers sur des 2-complexes, qui admettent une section globale et tels que l'application de retour correspondante n'induise pas un automorphisme sur le groupe fondamental de la section. Il suffit pour cela de considérer n'importe quel endomorphisme de groupe libre, puis de le réaliser par une application continue $f\colon \Gamma \to \Gamma$ sur un graphe Γ qui induit l'endomorphisme en question sur $\pi_1(\Gamma)$. Alors la suspension $(\Gamma \times [0,1])/((x,1) \sim (f(x),0))$ satisfait les propriétés désirées.
Dans cet article, on ne restreint pas notre attention à un type particulier de feuilletages comme dans [3], en particulier on autorise l'existence de points de tangence des feuilletages avec l'ensemble singulier du complexe. Comme dans [3], on donne dans ce contexte plus général un critère d'existence de feuilletages transversalement orientés en graphes compacts, qui fait référence à l'existence d'un certain type de cocycles de $C^1(K;\mathbf{Z})$, appelés *jolis cocycles non-négatifs*. Nommant *annulaires* les 2-complexes, pas nécessairement plats, qui sont l'union d'anneaux et de bandes de Moebius, on écrit notre théorème dans le cas des 2-complexes plats non-annulaires. Les 2-complexes annulaires font l'object de la section 3, où l'on prouve en particulier qu'ils permettent de reconstruire la plupart des 3-variétés de Seifert compactes à bord, et où l'on donne une nouvelle preuve très simple que ces 3-variétés fibrent sur le cercle.

Théorème 0.1 *Un 2-complexe plat non-annulaire K admet un feuilletage en graphes compacts transversalement orienté par le graphe singulier si et seulement s'il existe un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Si un tel cocycle existe, alors K est homotopiquement équivalent à la suspension d'une application continue $f\colon \Gamma \to \Gamma$ d'un graphe Γ qui induit un endomorphisme injectif sur le groupe fondamental de Γ. Cet endomorphisme est un automorphisme si et seulement si le cocycle est positif.*

En particulier, si l'hypothèse du théorème est vérifiée, alors le groupe fondamental de K admet une présentation de la forme $< x_1, \cdots, x_n, t \,;\, t^{-1}x_i t = f_\#(x_i) >$ où $f_\#\colon \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma)$ est un endomorphisme induit par f sur $\pi_1(\Gamma)$. Dans le cas où $f_\#$ est un automorphisme, $\pi_1(K)$ est le produit semi-direct de $F_n =< x_1, \cdots, x_n >$ avec $\mathbf{Z}$ over $f_\#$.

1 Préliminaires

Une grande partie de cette section vient de [3] avec quelques changements mineurs. Les nouvelles définitions concernent essentiellement les feuilletages (section 1.2) et les jolis cocycles non-négatifs *(définition 1.9 et lemme 1.10).*

1.1 2-complexes dynamiques ([3])

Un 2-*polyèdre spécial* K est un 2-complexe compact, linéaire par morceaux, dont tout point admet un voisinage de l'un des trois types illustrés dans la figure 1. Le *graphe singulier* $K^{(1)}_{sing}$ est l'ensemble des points dont le voisinage est de type II ou III, les *croisements* sont les points singuliers de type III (les types sont numérotés de gauche à droite dans la figure).

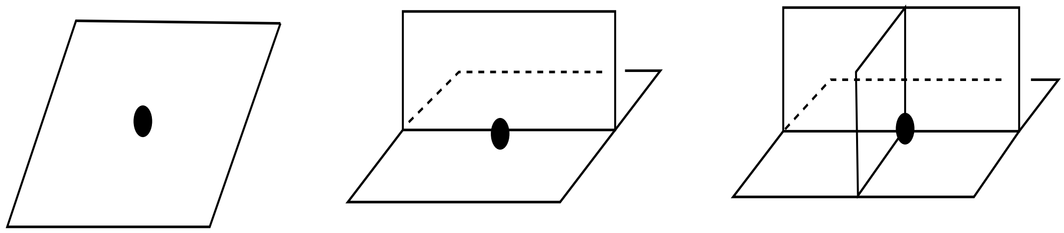

Figure 1: Types de voisinages dans un polyèdre spécial

On appelle 2-*composantes* les composantes connexes du complémentaire du graphe singulier dans le 2-complexe, 1-*composantes* les composantes connexes du complémentaire des croisements dans le graphe singulier. On appelle *plat* tout 2-polyèdre spécial dont les 2-composantes sont des 2-cellules, des anneaux ou des bandes de Moebius. S'il n'y a que des 2-cellules, le 2-complexe est un 2-*complexe standard* [1]. Tout 2-complexe linéaire par morceaux qui est une union d'anneaux ou de bandes de Moebius collés le long de leurs bords sera dit *annulaire*.
Tout 2-complexe plat K admet une structure canonique de CW-complexe définie de la façon suivante : Les sommets sont les croisements du complexe, avec un ensemble de sommets de valence 2, un pour chaque composante connexe de $K^{(1)}_{sing}$ qui est une boucle sans croisement. Les branches sont les 1-composantes du complexe, avec un ensemble de branches de valence 2, une dans chaque 2-composante qui n'est pas un disque. On supposera toujours nos 2-complexes plats munis de cette structure de CW-complexe.

On appelle *boucle* l dans le 1-squelette $K^{(1)}$ du 2-complexe K une application continue localement injective du cercle $\mathbf{S}^1$ dans $K^{(1)}$. Orienter une boucle revient à orienter le cercle $\mathbf{S}^1$. Une boucle orientée l dans $K^{(1)}$ définit, et est définie par, un mot $w(l) = e_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots e_{i_k}^{\epsilon_k}$, $\epsilon_i = \pm 1$, dans les branches de $K^{(1)}$ (qui est un graphe). Ce mot est unique, à permutation cyclique près. La boucle est *positive* (resp. *négative*) si tous les exposants d'un tel mot sont positifs (resp. négatifs). On a des définitions similaires pour les chemins dans des graphes.

Définition 1.1 Soit K un 2-complexe plat muni d'une orientation sur les branches de son graphe singulier.
Si C est une 2-composante de K, et l_C une courbe de bord orientée de C, avec $w(l_C) = e_{i_0}^{\pm 1} \cdots e_{i_{k-1}}^{\pm 1}$, alors le croisement entre deux branches consécutives $e_{i_j}^{-1} e_{i_{j+1}}$ (resp. $e_{i_j} e_{i_{j+1}}^{-1}$) de $w(l_C)$, $j \in \frac{\mathbf{Z}}{k\mathbf{Z}}$, est appelé *répulseur* (resp. *attracteur*) *dans le bord de* C.

Définition 1.2 Un 2-*complexe dynamique plat* est un 2-complexe plat K muni d'une orientation sur les branches de son graphe singulier $K^{(1)}_{sing}$ qui satisfait les deux propriétés suivantes :

1. Chaque croisement de K est le croisement initial d'exactement deux branches de $K^{(1)}_{sing}$.

2. Toute 2-composante C a $\chi(C)$ attracteurs et $\chi(C)$ répulseurs dans son bord, où $\chi(C)$ est la caractéristique d'Euler de la compactification de C.

1.2 Plongements, Feuilletages

Si Γ est un graphe plongé dans un 2-complexe plat K, et x un point d'intersection de Γ avec le graphe singulier $K^{(1)}_{sing}$, Γ et $K^{(1)}_{sing}$ sont *c-tangents* en x si on peut supprimer ce point d'intersection par une isotopie à support compact dans un petit voisinage de x. Autrement ils sont *c-transverses* en x. On appellera *dégénéré* tout plongement d'un graphe Γ dans un 2-complexe plat K qui contient dans son image un croisement de K.

Remarque 1.3 Si Γ est un graphe et x un point quelconque de Γ, on appelle *germe de* Γ *en* x la fermeture de toute composante connexe de $(\Gamma \cap V) - \{x\}$, où V est un voisinage suffisamment petit de x dans Γ.
Un graphe Γ plongé dans un 2-complexe plat K et le graphe singulier $K^{(1)}_{sing}$ sont c-tangents en x si et seulement si tous les germes de Γ en x sont contenus dans exactement un germe de 2-composante de K en x.

Définition 1.4 Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ d'un 2-complexe plat K est une décomposition de K en une union de graphe connexes plongés de façon disjointe, appelés *feuilles*, non réduits à un point, dont l'intersection avec toute 2-composante de K est un feuilletage de cette 2-composante en intervalles, certains d'entre eux possiblement réduits à des points isolés dans le bord de la composante.

Les notions d'orientabilité transverse et d'être à deux cotés pour les plongements de graphes dans des 2-complexes plats sont adaptés de manière évidente des notions similaires usuelles pour les hypersurfaces dans les variétés. Il en de même pour la notion d'orientation transverse à un feuilletage.
Dans ce qui suit, lorsqu'il sera écrit que *l'orientation transverse d'un feuilletage coincide avec l'orientation des branches du graphe singuliers* ou que le *feuilletage est transversalement orienté par les branches du graphe singulier*, le lecteur entendra *aux points où le feuilletage est c-transverse à ces branches.* De plus on abrègera *orientation des branches du graphe singulier* en *orientation du graphe singulier.*
Les *r-plongements* de graphes sont définis dans [3]. Un feuilletage régulier de [3] est un feuilletage en graphes r-plongés.

Définition 1.5 ([3])
Un graphe Γ est *r-plongé dans un 2-complexe plat* K s'il est plongé dans K c-transversalement au graphe singulier $K^{(1)}_{sing}$ et satisfait les propriétés suivantes :

- Les sommets de Γ sont dans $K^{(1)}_{sing}$, ses branches sont plongées de façon disjointe dans les 2-composantes de K.
- Si un sommet v de Γ est intèrieur à une 1-composante $e \in K^{(1)}_{sing}$ (resp. est un croisement de K), alors il y a exactement (resp. au plus) un germe de branche de Γ en v plongé dans chaque germe de 2-cellule de K en v.

Voir la figure 2.

Remarque 1.6 Tout feuilletage en graphes compacts transversalement orienté par les branches du graphe singulier d'un 2-complexe plat a au moins une feuille r-plongée de façon non dégénérée.

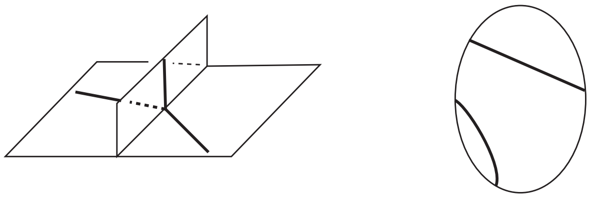

Figure 2: Un r-plongement

1.3 Cocycles

Soi K un 2-complexe plat. Un *cocycle entier de* K est un 1-cocycle $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Il est *non-négatif* s'il prend une valeur non-négative sur les 1-composantes de K et il est strictement positif sur au moins l'une d'entre elles. Il est dit *positif* s'il est non-négatif, et $u(l) > 0$ pour toute boucle positive l plongée dans le graphe singulier.

Lemme 1.7 *([3])*
Soit K un 2-complexe plat. Tout cocycle entier $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$ définitun graphe Γ_u r-plongé dans K de façon non dégénérée, et transversalement orienté. Réciproquement tout graphe r-plongé dans K de façon non dégénérée et transversalement orienté dans K définit un cocycle entier, c'est son nombre algébrique d'intersection avec chaque branche du 1-squelette de K.

Soit K un 2-complexe plat. Soit $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$ un cocycle entier de K et soit v un croisement de K. Un *δ_v-mouvement* sur u consiste à enlever 1 de la valeur de u sur toute branche rentrante à v, et ajouter 1 à sa valeur sur toute branche sortante à v. La valeur de u sur les autres branches reste inchangée. Par définition, cette valeur est aussi inchangée sur les branches qui sont à la fois rentrantes et sortantes à v. L'image de u par un δ_v-mouvement, dénotée par $\delta_v(u)$, est un cocycle entier dans la même classe de cohomologie que u. Si u est un cocycle non-négatif, on dira que le δ_v-mouvement est *non-négatif* si $\delta_v(u)$ est non-négatif.

Lemme 1.8 *([3])*
Soit K un 2-complexe dynamique plat. Soient $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$ un cocycle non-négatif de K et v un croisement de K tels que $u' = \delta_v(u)$ est non-négatif. Alors :

1. *Si $\Gamma_{u'}$ (resp. Γ_u) est un graphe r-plongé associé à u' (resp. à u) par le lemme 1.7, $\Gamma_{u'}$ s'obtient de Γ_u par un* mouvement de Whitehead.
2. *Il existe un feuilletage régulier en graphes compacts, transversalement orienté par le graphe singulier, d'un sous-complexe K_v de K. Le seul croisement de K dans K_v est le croisement v. Toutes les feuilles non dégénérées de ce feuilletage sont homéomorphes soit à Γ_u soit à $\Gamma_{u'}$. La seule feuille dégénérée contient le croisement v de K_v, et s'obtient de Γ_u par l'écrasement associé au mouvement de Whitehead donné par (1).*

Rappelons qu'un mouvement de Whitehead sur un graphe consiste à écraser une branche puis à exploser le sommet résultant de cet écrasement, les deux mouvement n'étant pas inverses homotopiques l'un de l'autre.
La définition 1.9 et le lemme 1.10 ci-dessous sont nouveaux par rapport à [3].

Définition 1.9 Soit K un 2-complexe dynamique plat. Un *joli* cocycle non-négatif $u \in C^1(K; \mathbf{Z})$ est un cocycle non-négatif tel que l'ensemble de toutes les boucles positives l dans le graphe singulier pour lesquelles $u(l) = 0$ satisfont les propriétés suivantes :

1. Ce sont des boucles à deux cotés, plongées de façon disjointe dans K, pour lesquelles une orientation transverse coincide avec l'orientation du graphe singulier.

2. Aucune de ces boucles n'est dans le bord d'une 2-composante de K.

Un cocycle positif u est en particulier un joli cocycle non-négatif. En effet l'ensemble des boucles positives dans le graphe singulier pour lesquelles $u(l) = 0$ est vide et donc satisfait aux propriétés demandées.

Par *branche rentrante* (resp. *branche sortante*) *à une boucle* l_i, on entend les branches du graphe singulier qui sont rentrantes (resp. sortantes) à un croisement de l_i et qui ne sont pas contenues dans l_i.

Lemme 1.10 *Soit K un 2-complexe dynamique plat, qui admet un joli cocycle non-négatif u. Soit l toute boucle positive dans le graphe singulier telle que $u(l) = 0$. Alors :*

1. *L'union de tous les germes de 2-cellules contenant des germes de branches de l se décompose comme l'union de deux sous-ensembles d'intérieurs disjoints :*

   - *L'un est un anneau qui contient excatement une fois chaque branche et chaque croisement de l, et qui contient aussi les germes des branches sortantes à l.*

     C'est le coté $+$ de l.

   - *L'autre consiste en un ou deux anneaux, également d'intérieurs disjoints. Il contient exactement deux fois chaque branche et croisement de l et il contient aussi les germes de branches rentrantes à l.*

     C'est le coté $-$ de l.

2. *Une même branche ne peut être à la fois sortante et rentrante à l.*

3. *La boucle l contient au moins un croisement, et donc admet au moins une branche rentrante et une branche sortante.*

Ce lemme est essentiellement une conséquence du fait que l est à deux cotés et transversalement orientée par le graphe singulier. L'assertion (3) vient du fait que l ne peut se trouver dans le bord d'une 2-composante. $\diamondsuit$

2 Feuilletages en graphes compacts

Théorème 2.1 *Un 2-complexe plat non-annulaire K admet un feuilletage transversalement orientable en graphes compacts, dont une orientation transverse coincide avec l'orientation du graphe singulier, si et seulement s'il existe un joli cocycle non négatif.*

2.1 Du feuilletage au cocycle

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage en graphes compacts d'un 2-complexe dynamique plat K, transversalement orienté par le graphe singulier de K. Soit $\mathcal{T}$ la fermeture dans K de l'ensemble des points $x \in K^{(1)}_{sing}$ tels que $\mathcal{F}$ est c-tangent à $K^{(1)}_{sing}$ en x. Les boucles positives contenues dans $\mathcal{T}$ sont transversalement orientées par le graphe singulier. De plus elles sont plongées de façon disjointe.*

Preuve du lemme 2.2 : L'existence de l'orientation transverse à une boucle positive l vient du fait qu'elle est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$, qui est par hypothèse transversalement orientée par le graphe singulier.
La seconde assertion est plus délicate. Notons tout d'abord que si deux boucles positives distinctes dans le graphe singulier s'intersectent, leur concaténation est aussi une boucle positive, et non plongée. Pour démontrer le lemme il suffit donc de démontrer que toute boucle positive l dans $\mathcal{T}$ est plongée. Supposons que l contient les quatre germes de branches de $K^{(1)}_{sing}$ à un certain croisement v. Puisqu'il y a six germes de 2-composantes incidents à chaque croisement, un petit voisinage U de v dans K est tel que $U - (\Gamma \cap U)$ se décompose en au moins six composantes connexes, où Γ est la feuille de $\mathcal{F}$ contenant l. Par définition d'un plongement à deux cotés, exactement l'une de ces composantes connexes doit être un coté $+$ tandis que les autres seront des cotés $-$. Ceci implique qu'un point dans un germe de branche de Γ à v a ses trois germes de 2-composantes incidents sur le coté $-$. Ceci est une contradiction avec le fait que Γ a deux cotés. Donc l contient au plus 3 germes de branches de $K^{(1)}_{sing}$ à chaque croisement v. Puisque l est une boucle, si l contient 3 germes de branches de $K^{(1)}_{sing}$ à v, alors il existe $w \neq v$ tel que l contient 3 germes de branches à w. De plus, puisque l est positive, l contient les deux germes sortant à l'un de ces deux croisements et les deux germes rentrant à l'autre. La feuille Γ de $\mathcal{F}$ contenant l étant transversalement orientée par le graphe singulier, il est impossible qu'elle contienne les deux germes sortant à un croisement. On aboutit ainsi à une contradiction. D'où le lemme. $\diamondsuit$

Lemme 2.3 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.2, supposons de plus que le 2-complexe K est non-annulaire. Alors aucune des boucles positives dans $\mathcal{T}$ n'est dans le bord d'une 2-composante de K.*

Preuve du lemme 2.3 : Soit l une boucle positive dans $\mathcal{T}$. Soit C une 2-composante qui contient l dans son bord. Par définition d'un complexe dynamique, C est soit un anneau, soit une bande de Moebius. Si c'est une bande de Moebius alors $\mathcal{F}$ admet comme feuille le coeur de C, ce qui est une contradiction avec l'orientabilité transverse de $\mathcal{F}$. Donc C est un anneau. S'il est sur le coté $+$ de l, alors l ne contient aucun croisement. La propriété (2) de la définition 1.2 implique alors que les 2-composantes dans le coté $-$ de l sont soit des anneaux, soit des bandes de Moebius, donc d'après ce qui précède des anneaux. Puisque $\mathcal{F}$ est transversalement orienté, cet anneau est sur le coté $+$ de son autre bord. Par induction, puisque K est connexe, on obtient que K est un 2-complexe annulaire, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse. On aurait bien sur obtenu la même conclusion en supposant que C était sur le coté $-$ de l. $\diamondsuit$

Lemme 2.4 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.3,*
La somme de tous les différents cocycles associés aux feuilles r-plongées de façon non dégénérée définit un cocycle non-négatif u_{sum}. Il est positif sur toutes les boucles positives du graphe singulier non contenues dans $\mathcal{T}$, et il est nul sur les boucles positives de $\mathcal{T}$.

Preuve du lemme 2.4 : Il n'y a clairement qu'un nombre fini de cocycles distincts associés aux feuilles r-plongées de façon non dégénérée et donc u_{sum} est bien défini. D'après la remarque 1.6, il existe une feuille r-plongée de façon non-dégénérée. Puisque K est non-annulaire, toute telle feuille intersecte le graphe singulier et définit ainsi un cocycle non-négatif par l'hypothèse sur l'orientation transverse de $\mathcal{F}$. Donc u_{sum} est un cocycle non-négatif. La suite du lemme est claire par définition de $\mathcal{T}$. $\diamondsuit$

Les lemmes 2.4, 2.2 et 2.3 donnent l'implication désirée du théorème 2.12.

2.2 D'un joli cocycle à un feuilletage

Théorème 2.5 *Soit K un 2-complexe dynamique plat qui admet un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Alors u définit un feuilletage $\mathcal{F}_u$ de K en graphes compacts transversalement orienté par le graphe singulier et tel que :*

1. *Toutes les feuilles sont homotopiquement équivalentes.*
2. *Toutes les feuilles à l'exception d'un nombre fini $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ sont r-plongées. N'importe laquelle de ces feuilles r-plongée qui contient un croisement de K en contient exaxtement un.*
3. *Chaque feuille Γ_i donné par (2) contient exactement une boucle positive l_i du graphe singulier avec $u(l_i) = 0$ et a un sommet trivalent à chaque croisement de K dans cette boucle l_i. La fermeture du complémentaire de l_i dans Γ_i est l'image dans K d'un r-plongement et ne contient pas d'autres croisements de K que les croisements dans l_i.*

*Un tel feuilletage sera appelé u-*feuilletage.

Au cours de la preuve du théorème 2.5, on ommettra de considérer explicitement le cas des 2-complexes annulaires, bien que le théorème ci-dessus l'englobe. C'est que d'une part ce cas, particulièrement facile, est traité en détail dans le lemme 3.1. D'autre part ce lemme dit qu'un cocycle non-négatif d'un tel 2-complexe est en fait positif. Et le cas des cocycles positifs est traité en détail dans [3].

`Procédé inductif :`

On considère un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. On applique des δ_v-mouvements non-négatifs, tant que cela peut être fait, en respectant la règle que chaque δ_v-mouvement est appliqué au plus une fois.

`Fin du procédé inductif`

Lemme 2.6 *Soit K un 2-complexe dynamique plat qui admet un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$, qui ne soit pas un cocycle positif.*
Soit $\{l_1, \cdots, l_n\}$ l'ensemble des boucles positives du graphe singulier avec $u(l_i) = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Soit u_- le cocycle obtenu à la fin du procédé inductif ci-dessus.
Alors il existe une boucle l_- dans $\{l_1, \cdots, l_n\}$ telle que u_- est positif sur toutes les branches rentrantes à l_-.

Preuve du lemme 2.6 : D'après le lemme 1.10, assertion (3), toute boucle l_i contient au moins un croisement. On considère la boucle l_1. Supposons qu'il existe une branche rentrante e à l_1 telle que $u_-(e) = 0$.
Puisque $t(e)$ appartient à l_1, qui satisfait $u(l_1) = u_-(l_1) = 0$, aucun $\delta_{t(e)}$-mouvement non-négatif n'a pu être appliqué à u ni à n'importe quel cocycle obtenu de u au cours du processus inductif. L'hypothèse $u_-(e) = 0$ implique donc qu'aucun $\delta_{i(e)}$-mouvement non-négatif n'a non plus été appliqué durant ce processus. Donc il existe une branche rentrante à $i(e)$ sur laquelle u_- s'annule. Par induction, on construit un chemin positif p_1 d'une autre boucle positive dans $\{l_1, \cdots, l_n\}$, disons l_2 après une éventuelle renumérotation, jusqu'à la boucle l_1, avec $u_-(p_1) = 0$. En itérant on obtient soit une boucle positive l_k comme souhaitée soit une suite de chemins positifs $p_1, \cdots, p_n$, avec p_i allant de l_{i+1} à l_i, $i = 1, \cdots, n$, $l_{n+1} = l_1$, et $u_-(p_i) = 0$. Mais alors u_- est nul sur la boucle positive $L = \gamma_1 p_n \gamma_n p_{n-1} \cdots \gamma_2 p_1$ qui intersecte les l_i, où γ_j est un chemin positif dans l_j. C'est une contradiction avec u joli cocycle non-négatif. $\diamondsuit$

Lemme 2.7 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.6, on pose $l_- = e_1 \cdots e_r$ et $v_i = t(e_i)$, $i = 1, \cdots, r$.*
Alors $u_+ = (\delta_{v_1} \circ \delta_{v_2} \circ \cdots \circ \delta_{v_r})(u_-)$ est un joli cocycle non-négatif dans la même classe de cohomologie que u_-. En particulier $u_+(e_i) = 0$ pour toute branche e_i,$i = 1, \cdots, r$, dans l_-. De plus :

- *Pour toute branche e rentrante (resp. sortante) à l_-, $u_+(e) = u_-(e) - 1$((resp. $u_+(e) = u_-(e) + 1$). En particulier u_+ est positif sur toutes les branches sortantes à l_-.*
- *Pour toute branche $e \in K^{(1)}_{sing}$ qui n'est ni rentrante, ni sortante à l_-, $u_+(e) = u_-(e)$.*

On posera $u_+ = \delta_{l_-}(u_-)$ et l'on dira que u_+ s'obtient de u_- par un *δ_{l_-}-mouvement non-négatif.*

Preuve du lemme 2.7 : Puisque les δ_v-mouvements préservent les classes de cohomologie u_+ est un cocycle cohomologue à u_-.
Puisque l_- est plongée, tous les croisements $v_1, \cdots, v_r$ sont distinct. Donc les deux branches sortantes (resp. rentrantes) à v_i sont différentes des deux branches sortantes (resp. rentrantes) à v_j si $i \neq j$. D'autre part à chaque croisement v_i, $i = 1, \cdots, r$, il y a exactement une branche sortante dans l_-, elle est rentrante à v_{i+1} (on pose $v_{r+1} = v_1$). Enfin d'après le lemme 1.10, assertion (2), une branche rentrante (resp. sortante) à l_- ne peut être sortante (resp. rentrante) à cette même boucle l_-. Le lemme se déduit de ces observations par de simples calculs à partir de la définition d'un δ_v-mouvement. $\diamondsuit$

Lemme 2.8 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.6,*
Il existe une suite ordonnée (non unique) de jolis cocycles non-négatifs $u = u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_N$ *telle que :*

1. *Chaque cocycle* u_i, $i = 1, \cdots, N$, *s'obtient de* u_{i-1} *soit par un* δ_v*-mouvement non-négatif,* $v \in K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$, *soit par un* δ_l*-mouvement non-négatif,* $l \in \{l_1, \cdots, l_n\}$.

2. *Il y a exactement un* δ_l*-mouvement (resp.* δ_v*-mouvement) pour chaque boucle* $l \in \{l_1, \cdots, l_n\}$ *(resp. pour chaque croisement* $v \in K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$*). En particulier,* $u_N = u$ *et la somme des cocycles* u_i, $i = 1, \cdots, N$ *est positive sur les branches de* $K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$.

Preuve du lemme 2.8 : Le processus inductif, avec les lemmes 2.6 et 2.7 permet d'obtenir une suite ordonnée de jolis cocycles non-négatifs satisfaisant le point (1) du lemma 2.8 et telle qu'il n'est plus possible d'appliquer un δ_v-mouvement non-négatif, $v \in K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$, ou un δ_l-mouvement, $l \in \{l_1, \cdots, l_n\}$, à un croisement v ou une boucle l pour lesquels un tel mouvement n'a pas déjà été appliqué. Ainsi chaque croisement $v \in K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$ ou boucle $l \in \{l_1, \cdots, l_n\}$ apparait au plus une fois dans la suite de δ_v- et δ_l-mouvements associée. On pose u_{sum} égal à la somme de tous les cocycles obtenus durant le processus.
Si un δ_l-mouvement n'a pas encore été appliqué, u_{sum} est nul sur une branche rentrante à l. Par induction, on construit une boucle positive L qui intersecte certaines des l_i, $i = 1, \cdots, n$ et telle que $u_{sum}(L) = 0$. Or u_{sum} qui est une somme de jolis cocycles non-négatifs est aussi un joli cocycle non-négatif. D'où contradiction. De même si un δ_v-mouvement, $v \in K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$, n'a pas été appliqué, on construit par induction une boucle positive l distincte des l_i telle que $u(l) = 0$, ce qui est impossible. Un simple calcul prouve les deux dernières affirmations du lemme. $\diamondsuit$

Lemme 2.9 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.7,*
Il existe deux graphes r-plongés Γ_{u_-} *et* Γ_{u_+} *associés aux cocycles* u_- *et* u_+ *tels que, si* $K_- = \Gamma_{u_-} \times [-1, 0[$ *et* $K_+ = \Gamma_{u_+} \times]0, 1]$, *alors :*

1. $\Gamma = \overline{K_-} - K_- = \overline{K_+} - K_+$ *est un graphe plongé dans* K *qui contient la boucle* l_-.

2. *Les seuls croisements de* K *contenus dans* Γ *sont les croisements de* l_-.

3. *Soit* e *une branche de* Γ_{u_-} *(resp.* Γ_{u_+}*). La fermeture dans* K *de* $e \times [-1, 0[$ *(resp.* $e \times]0, 1]$*) est un chemin non-vide dans* Γ *entre deux croisements de* Γ *(resp. une branche de* Γ*). Ce chemin (resp. cette branche) appartient à la fermeture dans* K *de la 2-composante contenant* e.

4. *Chaque croisement de* Γ *appartient à la fermeture dans* K *d'exactement un intervalle* $\{v\} \times [-1, 0[$ *(resp.* $\{v\} \times]0, 1]$*),* $v \in \Gamma_{u_-} \cap K^{(1)}_{sing}$ *(resp.* $v \in \Gamma_{u_+} \cap K^{(1)}_{sing}$*). De plus* Γ *est un graphe trivalent.*

Voir les figures 3 et 4.

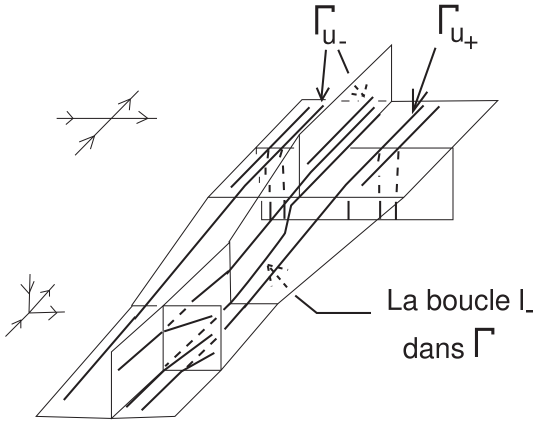

Figure 3: Construction d'un u-feuilletage

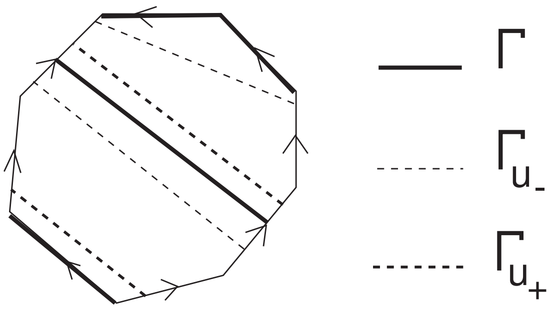

Figure 4: Les graphes Γ, Γ_{u_-} et Γ_{u_+} dans une 2-composante cellulaire

Preuve du lemme 2.9 : D'après le lemme 2.7, $u_+(e) = u_-(e) + 1$ (resp. $u_-(e) = u_+(e) + 1$) si e est une branche sortante (resp. rentrante) à l_- et pour toute autre branche e, $u_+(e) = u_-(e)$. Rappelons que le nombre de sommets d'un graphe r-plongé Γ_u le long d'une branche e est égal à $|u(e)|$. On choisit deux graphes r-plongés Γ_{u_-} et Γ_{u_+} disjoints, les sommets de ces deux graphes alternent le long des branches du graphe singulier. Rappelons aussi que ces graphes sont à deux cotés dans K d'après le lemme 1.7. L'observation précédente sur les valeurs respectives des cocycles u_+ et u_- permet d'affirmer que dans chaque 2-composante dont le répulseur appartient à l_- une branche de Γ_{u_+} connecte la branche sortante à l_- à ce croisement et la branche sortante à l_- au croisement suivant ou précédent dans l_-. Elle borde avec la branche dans l_- joignant ces deux croisements, ainsi qu'avec deux segments dans les branches sortantes indiquées auparavant, un rectangle d'intérieur disjoint de $\Gamma_{u_+} \cup \Gamma_{u_-}$. De façon similaire, dans chaque 2-composante dont l'attracteur appartient à l_-, une branche de Γ_{u_-} connecte la branche rentrante à l_- à ce croisement et la branche rentrante à l_- à un autre croisement, *pas nécessairement consécutif le long de l_- avec le précédent.* Cette branche de Γ_{u_-} borde, avec le chemin correspondant dans l_- entre ces deux croisements, qui est dans le bord de la 2-composante considérée, ainsi qu'avec deux segments dans les branches rentrantes indiquées, un rectangle d'intérieur disjoint de $\Gamma_{u_+} \cup \Gamma_{u_-}$. Notons enfin que les sommets de Γ_{u_+} et Γ_{u_-} étant trivalents, il reste, à chaque sommet de Γ_{u_+} (resp. Γ_{u_-}) qui est le premier (resp. dernier) le long d'une branche sortante (resp. rentrante) à l_-, une branche qui n'est pas "parallèle" à une branche de l_-.
A partir de ces quelques remarques on vérifie aisément le lemme. Les détails sont laissés au lecteur, que l'on réfère d'autre part aux figures 3 et 4. $\diamondsuit$

Corollaire 2.10 *Avec les hypothèses et notations du lemme 2.9,*
Le sous-complexe $K_s = \overline{K_-} \cup \overline{K_+}$ de K admet un feuilletage en feuilles compactes transversalement orienté par le graphe singulier. De plus toutes les feuilles de K_s sont homotopiquement équivalentes.

Preuve du corollaire 2.10 : C'est une conséquence directe du lemme 2.9. Vérifions simplement que les feuilles, qui sont homéomorphes à Γ_{u_+}, Γ_{u_-} ou Γ sont homotopiquement équivalentes. D'après le lemme 2.9, Γ est un graphe trivalent qui a le même nombre de sommets que Γ_{u_-} ou Γ_{u_+}. Comme les graphes Γ_{u_-} et Γ_{u_+} sont aussi trivalents, la conclusion est immédiate. $\diamondsuit$

Concluons maintenant la preuve du théorème 2.1. On suppose donné un joli cocycle non-négatif u d'un 2-complexe dynamique plat K. On dénote par $\{l_1, \cdots, l_n\}$ les boucles de $K^{(1)}_{sing}$ avec $u(l_i) = 0$.
Dans [3], on a montré comment associer, à tout δ_v-mouvement non-négatif, un feuilletage régulier en graphes compacts, transverselement orienté par le graphe singulier, d'un sous-complexe K_v de K où v est un croisement quelconque de K. Ce sous-complexe K_v en particulier ne contient pas d'autre croisement que v (voir le lemme 1.8). Associé à ce résultat, le lemme 2.8 permet de construire un feuilletage $\mathcal{F}_r$ en graphes compacts transversalement orienté par le graphe singulier d'un sous-complexe de K. Les feuilles de $\mathcal{F}_r$ intersectent toutes les branches de $K^{(1)}_{sing} - \{l_1, \cdots, l_n\}$.
Le lemme 2.8 avec le corollaire 2.10 permettent de compléter ce feuilletage en un feuilletage en graphes compacts, transversalement orienté par le graphe singulier qui

contient tous les croisements de K. Puisqu'aucune boucle l_i n'est dans le bord d'une 2-composante non cellulaire, ce feuilletage est un feuilletage de K. $\diamondsuit$

Observons que nous avons également démontré les points (2) et (3) du théorème 2.5. Le point (1), donné par le lemme ci-dessous, est de plus maintenant immédiat :

Lemme 2.11 *Soit K un 2-complexe dynamique plat qui admet un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Toutes les feuilles de tout u-feuilletage $\mathcal{F}_u$ sont homotopiquement équivalentes.*

Ceci conclut la preuve du théorème 2.5. $\diamondsuit$

2.3 Conclusion

Corollaire 2.12 *Soit K un 2-complexe dynamique plat qui admet un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Si $\mathcal{F}_u$ est un u-feuilletage (voir le théorème 2.5) alors :*

1. *Si Γ est une feuille quelconque de $\mathcal{F}_u$, K est homotopiquement équivalent à la suspension de Γ par une application continue $\psi : \Gamma \to \Gamma$, qui induit un endomorphisme injectif sur le groupe fondamental de Γ.*

2. *L'endomorphisme ci-dessus est surjectif si et seulement si u est un cocycle positif.*

Définition 2.13 Une application continue ψ d'un graphe Γ vers un graphe Γ' est *immersive* si elle est surjective et localement injective.

Lemme 2.14 *Soit K un 2-complexe dynamique plat qui admet un joli cocycle non-négatif $u \in C^1(K;\mathbf{Z})$. Soit Γ une feuille d'un u-feuilletage $\mathcal{F}_u$.*
Alors K est homotopiquement équivalent à la suspension de Γ par une application continue ψ qui est une composition de mouvements de Whitehead, d'homéomorphismes et d'un ensemble $\mathcal{I}$, possiblement vide, d'applications immersives, non injectives. De plus cet ensemble $\mathcal{I}$ est vide si et seulement si le cocycle u est un cocycle positif.

Preuve du lemme 2.14 : Par définition d'un u-feuilletage, si $\{l_1, \cdots, l_n\}$ sont les boucles positives de $K^{(1)}_{sing}$ satisfaisant $u(l_i) = 0$, alors $\mathcal{F}_u$ a exactement n feuilles $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ qui ne sont pas r-plongées. Chaque Γ_i contient la boucle l_i, $i = 1, \cdots, n$. Le lemme 2.8 permet de trouver un nombre fini de feuilles r-plongées de façon non dégénérée $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_r$ telles que deux feuilles consécutives $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_{i+1}$ (en posant $r + 1 \equiv 1$) bordent un sous-complexe de K qui soit contient un seul croisement et est feuilleté en feuilles r-plongées non dégénérées homéomorphes à $\mathcal{L}_i$ ou $\mathcal{L}_{i+1}$ (avec une feuille dégénérée contenant le croisement), soit contient exactement l'une des boucles l_j et alors admet aussi une feuille non r-plongée, la feuille Γ_j de $\mathcal{F}_u$ contenant la boucle l_j. Dans le premier type de sous-complexe on passe de $\mathcal{L}_i$ à $\mathcal{L}_{i+1}$ par un mouvement de Whitehead, c'est le lemme 1.8. Dans le deuxième type de sous-complexe on passe d'abord de $\mathcal{L}_i$ à Γ_j par une application immersive de degré 2, puis de Γ_j à $\mathcal{L}_{i+1}$ par un homéomorphisme, c'est le lemme 2.9. De plus, par définition, la collection de boucles l_i est vide si et seulement si le cocycle u est positif. Le lemme se déduit aisément de ces quelques observations. $\diamondsuit$

Le lemme 2.15 ci-dessous est une conséquence triviale de [8], et un analogue, dans le contexte des graphes, d'un vieux résultat de Whitehead ou Nielsen sur les groupes libres (voir [9, 10, 7]).

Lemme 2.15 *Une application continue immersive f d'un graphe Γ induit un endomorphisme injectif sur le groupe fondamental de Γ. Cet endomorphisme est surjectif si et seulement si f est un homéomorphisme.*

Les lemmes 2.14 et 2.15 entrainent de façon claire le corollaire 2.12. $\diamondsuit$

Remarque 2.16 Du fait de la restriction sur le nombre de germes de 2-composantes incidents à chaque branche, les 2-complexes dynamiques plats ne permettent pas d'obtenir, via leur groupe fondamental, tous les groupes suspension d'endormorphismes injectifs du groupe libre (la situation est différente si l'on ne considère que les *automorphismes* - voir [3]). Il semble cependant à peu près clair qu'il suffit d'autoriser une valence quelconque le long des boucles l_i où le cocycle s'annule pour récupérer l'ensemble de tous les endomorphismes injectifs.

3 2-complexes annulaires

Dans cette section les 2-complexes ne sont pas nécessairement des polyèdres spéciaux, il peut y avoir plus de trois 2-composantes incidentes à une branche du graphe singulier.

Par définition, le graphe singulier d'un 2-complexe annulaire est une union de boucles plongées disjointes. Ces 2-complexes annulaires sont des 2-complexes dynamiques dans le sens que toute orientation de leurs boucles du graphe singulier satisfait la définition 1.2. Tout 2-complexe annulaire porte un flot non-singulier. Il suffit dans un premier temps de choisir les boucles orientées du graphe singulier comme orbites périodiques du flot. Dans les anneaux dont les orientations des deux boucles de bord coincident, ainsi que dans les bandes de Moebius, le flot est construit périodique, et parallèle au coeur de ces 2-composantes. Dans les autres 2-composantes annulaires on met des composantes de Reeb.

Le lemme ci-dessous est facile et laissé au lecteur, il complète le théorème 2.1 dans le cas des 2-complexes annulaires.

Lemme 3.1 *Soit K un 2-complexe annulaire, muni d'une orientation sur les branches de son graphe singulier.*

1. *Soit K admet un cocycle positif soit K n'admet aucun cocycle non-négatif.*
2. *Si K admet un feuilletage en feuilles compactes, transversalement orienté par le graphe singulier et K n'admet pas de cocycle positif, alors ce feuilletage est un feuilletage en cercles. Le complexe K est alors homotopiquement équivalent à la suspension d'une application continue du cercle (de degré 2^j si K est plat et j est le nombre de boucles du graphe singulier).*

Théorème 3.2 *Tout 2-complexe annulaire qui admet un plongement dans une 3-variété compacte orientable admet un cocycle positif pour une certaine orientation de son graphe singulier.*

Preuve du théorème 3.2 : Il suffit de prouver que l'on peut orienter les boucles l_i, $i = 1, \cdots, p$, du graphe singulier de telle façon que chaque anneau ait ses deux bords orientés dans le même sens. En effet la recherche de cocycles positifs revient alors à la recherche de solutions non-négatives à un ensemble d'équations de la forme $mX_i = nX_j$, où X_i et X_j sont les inconnues duales aux boucles l_i et l_j, m et n sont non-négatifs (voir [3]pour plus de détails). Si $i \neq j$, les entiers $X_i = n$, $X_j = m$ sont des solutions. Du fait que K admet un plongement dans une 3-variété compacte orientable, si une application de collage du bord d'une 2-composante le long d'une boucle l_i est de degré m, alors toutes les applications de collage des bords de 2-composantes le long de l_i sont de degré m. Ainsi le système d'équations considéré ne mène jamais à une égalité de la forme $mX_i = nX_i$, $m \neq n$, donc admet toujours une solution. En multipliant si nécessaire par 2 cette solution (du fait de l'existence possible de bandes de Moebius) on obtient un cocycle positif.
Le fait que l'on puisse orienter les boucles l_i comme souhaité vient du fait que sinon on aurait au niveau du groupe fondamental une équation de la forme $l_i^m = l^{-n_i}$, d'où l_i homotopiquement triviale, ce qui est impossible. $\diamondsuit$

Un *écrasement élémentaire* sur une n-variété à bord triangulée consiste à écraser un $(n-1)$-simplexe τ^{n-1} *libre*, c'est à dire dans le bord de la variété puis à écraser l'intérieur du n-simplexe τ^n incident à τ^{n-1}. Une suite finie d'écrasements élémentaires est un *écrasement polyédral.*
Un $(n-1)$-complexe K sur lequel une n-variété M s'écrase polyédralement est un *squelette* de cette variété (voir [1] par exemple).

Le lecteur trouvera tout ce qu'il désire savoir sur les variétés de Seifert dans [5] par exemple, parmi beaucoup d'autres.

Théorème 3.3 *Toute variété de Seifert orientable dont la base est une surface à bord de caractéristique d'Euler non-positive admet un 2-complexe annulaire comme squelette. Réciproquement toute 3-variété compacte qui admet un tel 2-complexe comme squelette est une variété de Seifert.*

Preuve du théorème 3.3 : La réciproque est claire, il suffit d'exploiter le fait que les 2-complexes annulaires se décomposent en une union de cercles disjoints.
Nommons B la base de notre variété de Seifert M^3. A partir d'une triangulation quelconque de B on contruit, par subdivisions et isotopies, une nouvelle triangulation $\mathcal{T}_B$ qui satisfait les propriétés suivantes : Tous les points exceptionnels sont à des sommets de $\mathcal{T}_B$, leurs links forment une collection de cercles plongés disjoints dans B.

Affirmation : Soit $\Delta = a \cup b \cup c$ un triangle de $\mathcal{T}_B$. Si Δ ne contient pas de point exceptionnel, ou bien si Δ contient un point exceptionnel sur le sommet opposé au coté c, alors pour une certaine triangulation $\mathcal{T}_{M^3}$ de M^3, si $c_\Delta : \Delta \to a \cup b$ est un écrasement élémentaire de $\mathcal{T}_B$ sur $\mathcal{T}'_B$, alors $\mathcal{T}_{M^3}$ s'écrase polyédralement sur $p^{-1}(\mathcal{T}'_B)$.

Il suffit de considérer une triangulation bien choisie du tore solide. Notons que cette Affirmation reste vrai pour tout complexe simplicial obtenu de $\mathcal{T}_B$ aprés un écrasement polyédral.

Par définition de $\mathcal{T}_B$, s'il y a k points exceptionnels, l'union de tous les triangles contenant un point exceptionnel a k composantes connexes cellulaires $E_1, \cdots, E_k$. On passe par un écrasement polyédral de B à un 2-complexe B' dont les seules 2-cellules sont les disques E_i, $i = 1, \cdots, k$, les seuls 1-simplexes libres étant ceux dans le bord des E_i. Dans une seconde étape on applique des écrasements élémentaires à tous les 1-simplexes libres de B'. D'après l'Affirmation ci-dessus, $M^3 = p^{-1}(B)$ s'écrase polyédralement sur un 2-complexe $K = p^{-1}(\Gamma)$, où Γ est le graphe obtenu de $\mathcal{T}_B$ par la suite d'écrasements polyédraux décrite auparavant. Il est clair que K est un 2-complexe sans croisement dans le graphe singulier, dont les seules 2-composantes sont des anneaux et des bandes de Moebius. Si K a du bord, venant de sommets de valence 1 de Γ on l'écrase. On obtient ainsi un 2-complexe annulaire sur lequel M^3 s'écrase polyédralement. $\diamondsuit$

Le corollaire suivant est un résultat très classique, mais la preuve que l'on obtient ici est nouvelle.

Corollaire 3.4 *Toute variété de Seifert orientable dont la base est une surface à bord de caractéristique d'Euler non-positive fibre sur le cercle.*

Par le théorème 3.3, toute telle variété de Seifert admet comme squelette un 2-complexe annulaire. Par le théorème 3.2, ce 2-complexe admet un cocycle positif pour une certaine orientation des boucles de son graphe singulier. Ce cocycle positif définit un cocycle de la variété associé à une fibration sur le cercle (voir [3]). $\diamondsuit$

References

[1] B.G. CASLER 'An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary', *Proceedings of the American Mathematical Society* 16 (1965) 559-566.

[2] D. GABAI 'Foliations and the topology of 3-manifolds I,II,III', *Journal of differential Geometry* 18 (1983) 445-503, 26 (1987) 461-478, 26 (1987) 479-536.

[3] F. GAUTERO 'Dynamical 2-complexes', à paraitre dans *Geometriae Dedicata.*

[4] H. IKEDA 'Acyclic fake surfaces', *Topology* 10 (1971) 9-36.

[5] W.H. JACO and P.B. SHALEN 'Seifert fibered spaces in 3-manifolds' *Memoirs of the American Mathematical Society* (220) 21 (1979).

[6] S.V. MATVEEV 'Special spines of piecewise linear manifolds', *Math. USSR Sbornik* (2) 21 (1973).

[7] J. NIELSEN 'Uber die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation', *Mathematische Annalen* 79 (1919) 269-272.

[8] J. STALLINGS 'Topology of finite graphs', *Inventiones Mathematicae* (3) 71 (1983) 551-565.

[9] J.H.C. WHITEHEAD 'On certain sets of elements in a free group', *Proc. London Math. Soc.* 41 (1936) 48-56.

[10] J.H.C. WHITEHEAD 'On equivalent sets of elements in a free group', *Annals of Math.* 37 (1936) 782-800.

[11] P. WRIGHT 'Formal 3-deformations of 2-polyhedra', *Proceedings of the American Mathematical Society* 37 (1973) 305-308.