C. R. Acad. Sci. Paris, t. ???, Série I, p. 1–4, 2001 – PXMA????.TEX –
Systèmes dynamiques (22)/*Dynamical Systems (22)*

Types d'orbites et dynamique minimale pour les applications continues de graphes

Ll. Alsedà[1], F. Gautero[2], J. Guaschi[3], J. Los[4], F. Mañosas[1] et P. Mumbrú[5]

[1] **Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Matemàtiques, Edifici Cc, 08913 Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Espagne**
[2] **Université Lille I, Laboratoire AGAT (Bât. M2), 59655 Villeneuve d'Ascq, France**
adresse actuelle : Université de Genève, Section de Mathématiques, CP 240, 2-4 rue du Lièvre, 1211 Genève, Suisse
[3] **Université Toulouse III, Laboratoire de Mathématiques E. Picard, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France**
[4] **Université Aix-Marseille I, Centre de Mathématiques et Informatique, 39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France**
[5] **Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Gran Via 585, 08071 Barcelona, Espagne**
Courriel : alseda@mat.uab.es, Francois.Gautero@math.unige.ch, guaschi@picard.ups-tlse.fr, los@cmi.univ-mrs.fr, manyosas@mat.uab.es, mumbru@mat.ub.es

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. On définit une notion de *type* d'orbite pour les applications continues sur les graphes. Parmi elles, on considère la classe des *représentants efficaces*. Ce sont des applications continues de graphe minimisant l'entropie topologique parmi l'ensemble des paires (f, G) représentant le même endomorphisme de groupe libre. On démontre que tout type d'orbite périodique présent dans un représentant efficace existe dans tout autre représentant de cet endomorphisme. De plus, le nombre d'orbites périodiques d'un type donné dans un représentant efficace est minimal. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Orbit types and minimal dynamics for graph maps

Abstract. *We define the* type *of a periodic orbit of a graph map. We consider the class of* 'train-track' representatives*, that is, those graph maps which minimize the topological entropy of the topological representatives of a given free group endomorphism. We prove that each type of periodic orbit realized by an efficient representative is also realised by any representative of the same free group endomorphism. Moreover, the number of periodic orbits of a given type is minimized by the efficient representatives.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

1. Introduction

Dans l'esprit du théorème de Sharkovskii [14] pour les applications continues de l'intervalle, et suivant une idée de Bowen [6], Boyland [7] a introduit la notion de *type* d'une orbite périodique pour les homéomorphismes de surfaces compactes. Le type d'une orbite périodique d'une application continue de l'intervalle étant simplement sa période (dans la version Sharkovskii) ou la permutation induite sur les points de l'intervalle, tandis que le type d'une orbite périodique d'un homéomorphisme de surface compacte est la classe de conjugaison de sa classe d'isotopie relative aux points de l'orbite. Dans un cas comme dans l'autre, il existe des modèles (applications monotones linéaires par morceaux entre les points de l'orbite périodique, homéomorphismes pseudo-Anosov) dans la classe d'homotopie relative à une orbite périodique donnée, qui ont la propriété de ne présenter que les types d'orbite nécessaires, et aucun autre (voir [2], [3], [5], [7] ou [9] par exemple). C'est-à-dire que tout type d'orbite périodique (à un nombre fini près) d'un tel modèle existe dans toute autre application de la classe d'homotopie.

L'objectif de cette Note est de généraliser la notion de type d'une orbite périodique aux applications continues de graphes, puis de démontrer que les *représentants efficaces*, ou *'train-track'*, de [4] ou [13] (voir la Définition 1) satisfont les propriétés ci-dessus. Plus précisément, appelons *représentant* d'un endomorphisme $\mathcal{O}$ du groupe libre F_n toute paire (f, G) où G est un graphe avec $\pi_1(G) \cong F_n$ et $f\colon\ G \to G$ une application continue de G telle que la classe de $f_\#\colon\ \pi_1(G, x) \to \pi_1(G, f(x))$ dans $\mathrm{End}(F_n)/\mathrm{Inn}(F_n)$ est conjuguée à celle de $\mathcal{O}$. Nous montrons que tout type d'orbite périodique (à un nombre fini près) d'un représentant efficace de $\mathcal{O}$ existe pour tout autre représentant de $\mathcal{O}$. De plus, le nombre d'orbites périodiques d'un type donné est minimal dans les représentants efficaces. Ces résultats sont une continuation naturelle des travaux actuels qui concernent d'une part les applications continues des arbres ([1] par exemple), d'autre part les homéomorphismes de surfaces compactes ([9], [10], [13] par exemple). Nous présentons ici seulement une esquisse des résultats et preuves, une version complète apparaîtra dans un article à venir.

2. Énoncé du théorème

DÉFINITION 1. – *([4, 13]) Un* représentant efficace *d'un endomorphisme de groupe libre $\mathcal{O}$ est un représentant (ψ, Γ) de $\mathcal{O}$ tel que pour toute branche e de Γ :*

1. *Pour tout entier naturel $k \geq 1$, la restriction de ψ^k à l'intérieur de e est localement injective.*
2. *Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\psi^n(e)$ recouvre Γ.*

Tout endomorphisme (ou même tout automorphisme) de groupe libre n'admet pas nécessairement un représentant efficace. Par contre, c'est vrai pour tout automorphisme irréductible de groupe libre (voir [4]). La condition *2* (transitivité) ci-dessus n'est pas absolument nécessaire ; nous l'utilisons pour simplifier les énoncés et les démonstrations.

Si $f\colon\ G \to G$ est une application continue d'un graphe G, on dénotera par $\mathcal{P}(f, G)$ l'ensemble des orbites périodiques de l'application f.

DÉFINITION 2. – *Soit Σ l'ensemble de tous les triplets (G, P, f), où G est un graphe, $f\colon\ G \to G$ une application continue de G et $P \in \mathcal{P}(f, G)$.*

1. *On note $\sim$ la relation d'équivalence sur Σ définie par $(G, P, f) \sim (G', P', f')$ s'il existe une équivalence d'homotopie $r\colon\ G \to G'$ telle que :*

1. *La restriction $r_{|P}\colon\ P \to P'$ est une bijection de P sur P'.*
2. *Le diagramme suivant : $\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{r} & G' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ G & \xrightarrow{r} & G' \end{array}$ est commutatif, à homotopie près respectant P, c'est-à-dire qu'il existe une homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $h_0 = f' \circ r$, $h_1 = r \circ f$ et $h_{t|P} \equiv h_{0|P}$.*

2. *On appelle* type *de l'orbite périodique P la classe d'équivalence de (G, P, f) pour la relation $\sim$.*

THÉORÈME 1. – *Soit (ψ,Γ) un représentant efficace d'un endomorphisme de groupe libre $\mathcal{O}$. Il existe un sous-ensemble fini S de $\mathcal{P}(\psi,\Gamma)$ et, pour tout représentant (f,G) de $\mathcal{O}$ une application injective $i_{f,G}\colon\ \mathcal{P}(\psi,\Gamma)-S\to\mathcal{P}(f,G)$ telle que $i_{f,G}(P)$ et P ont même type.*

3. Stratégie de la preuve

Notons que dans la Définition 2 ci-dessus, on peut prendre $P=\varnothing$, et en particulier on écrira alors $(f,G)\sim(f',G')$. Il est important de remarquer que $(f,G)\sim(f',G')$ est équivalent à ce que (f,G) et (f',G') soient les représentants d'un même endomorphisme de groupe libre (à conjugaison près).

Toujours dans la Définition 2, si l'on demande seulement que la restriction $r_{|P}$ soit surjective, alors on dira que (G',P',f') est une *réduction de* (G,P,f), et on notera $(G',P',f')\preceq(G,P,f)$. Si $r_{|P}$ n'est pas injective, on note $(G',P',f')\prec(G,P,f)$. Si (G,P,f) n'admet pas de réduction (G',P',f') avec $(G',P',f')\prec(G,P,f)$, alors (G,P,f) est dit *irréductible*.

DÉFINITION 3. – *([11]) Soit $f\colon\ G\to G$ une application continue d'un graphe G. Deux points n-périodiques x et y de f sont dans une même* classe de Nielsen *s'il existe un chemin c dans G d'extrémités x et y tel que $f^n(c)$ est homotope à c par une homotopie qui fixe les extrémités x et y. Un tel chemin localement injectif s'appelle* un chemin de Nielsen.

Pour la notion d'*indice de classe de Nielsen*, nous renvoyons le lecteur à [11] ou [8]. Si x est un point d'une orbite périodique P de période n, l'*indice de Nielsen de P*, dénoté par $\mathcal{N}(\overline{P})$, est l'indice de la classe de Nielsen de x pour f^n. Cet indice est bien défini car les indices des classes de Nielsen de tous les points de l'orbite sont égaux. De plus, si P et Q sont deux orbites périodiques, alors soit chaque point de P est dans la même classe de Nielsen qu'un point de Q, soit aucun ne l'est. Dans le premier cas on dira que *P et Q sont Nielsen-équivalentes*. On montre facilement que si P et Q sont Nielsen-équivalentes et de même période, alors elles sont de même type, la réciproque étant fausse.

PROPOSITION 2. – *Soient $(f,G)\sim(f',G')$ deux représentants d'un même endomorphisme de groupe libre. Il existe une application $j\colon\ \{P\in\mathcal{P}(f,G)\mid\mathcal{N}(\overline{P})\neq0\}\to\{P'\in\mathcal{P}(f',G')\mid\mathcal{N}(\overline{P'})\neq0\}$ telle que :*

1. *Pour tout $P\in\mathcal{P}(f,G)$ avec $\mathcal{N}(\overline{P})\neq0$, $(G',j(P),f')\preceq(G,P,f)$.*
2. *Si $P,Q\in\mathcal{P}(f,G)$ satisfont $\mathcal{N}(\overline{P})\neq0$, $\mathcal{N}(\overline{Q})\neq0$ et ne sont pas Nielsen-équivalentes, alors $j(P)$ et $j(Q)$ ne sont pas Nielsen-équivalentes.*

Cette proposition implique la perpétuation des types d'orbites périodiques d'indice de Nielsen non nul (éventuellement à réduction près) à travers l'ensemble des représentants d'un endomorphisme de groupe libre.

PROPOSITION 3. – *Soit (ψ,Γ) un représentant efficace. À un nombre fini près, tout point périodique de ψ est seul dans sa classe de Nielsen, et d'indice non nul.*

Preuve de la Proposition 3 : On ne considèrera pas les points périodiques situés aux sommets de Γ, il n'y en a qu'un nombre fini. Par définition d'un représentant efficace, tous les itérés de l'application ψ sont localement injectifs en restriction aux branches de Γ. Si un point périodique distinct d'un sommet est seul dans sa classe de Nielsen, alors son indice est non nul. Considrons donc les points périodiques distincts d'un sommet qui ne sont pas seuls dans leur classe de Nielsen. Comme ψ est transitive, tout chemin de Nielsen c pour un itéré quelconque ψ^k contient au moins un point de non locale injectivité de $\psi^k_{|\mathrm{Int}(c)}$. S'il en contient plus, il admet un sous-chemin qui est *indivisible*. C'est-à-dire que ce sous-chemin joint deux points fixes de ψ^k, et contient un seul point de non locale injectivité de $\psi^k_{|c}$. Puisque (ψ,Γ), et donc (ψ^k,Γ), est un représentant efficace, si deux points fixes de ψ^k sont joints par un chemin de Nielsen indivisible, il suit de [4] que leurs indices sont inférieurs ou égaux à -1. L'indice de leur classe est donc inférieur ou égal à -2. Le Théorème 1 de [12] assure que le nombre de telles classes est fini. On en déduit la finitude du nombre de chemins de Nielsen indivisibles pour l'ensemble de tous les itérés de ψ. Ce qui implique la finitude des points périodiques qui ne sont pas seuls dans leurs classes de Nielsen, d'où la Proposition 3. □

COROLLAIRE 4. – *Soit (ψ,Γ) un représentant efficace. À un nombre fini près, toute orbite périodique de (ψ,Γ) est de type irréductible.*

Preuve du Corollaire 4 : Si une orbite périodique d'un représentant efficace est de type réductible, on prouve que plusieurs points de cette orbite sont dans une même classe de Nielsen. À un nombre fini près, d'après la Proposition 3, les classes de Nielsen d'un représentant efficace ne contiennent qu'un point. Ceci prouve le corollaire. □

Preuve du Théorème 1 : Soit P une orbite périodique d'un représentant efficace (ψ,Γ). Par le Corollaire 4, si P est choisie en dehors d'un ensemble fini $S_1 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$, son type est irréductible. De plus, par la Proposition 3, si P est choisie en dehors d'un ensemble fini $S_2 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$, son indice de Nielsen est non nul. Donc, par la Proposition 2, si P est choisie en dehors de $S_1 \cup S_2 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$, tout autre représentant (f,G) du même endomorphisme de groupe libre a une orbite périodique Q du même type que P. On obtient ainsi un ensemble fini $S = S_1 \cup S_2 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$ et une application $i_{f,G}\colon\ \mathcal{P}(\psi,\Gamma) - S \to \mathcal{P}(f,G)$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}(\psi,\Gamma) - S$, $i_{f,G}(P)$ a même type que P.

Si P est choisie en dehors de l'ensemble fini $S_2 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$ donné par la Proposition 3, alors tout point de P est seul dans sa classe de Nielsen. Ceci implique que si P' est une autre orbite périodique de (ψ,Γ) du même type que P, alors les classes de Nielsen des points de P' sont distinctes de celles des points de P. Or, l'application $j\colon\ \mathcal{P}(\psi,\Gamma) \to \mathcal{P}(f,G)$ donnée par la Proposition 2, si P est choisie en dehors de l'ensemble fini $S_1 \subset \mathcal{P}(\psi,\Gamma)$ donnée par cette proposition, n'identifie pas des orbites périodiques dont les points appartiennent à des classes de Nielsen différentes. Donc $j(P')$ est une orbite périodique de (f,G) du même type que P, distincte de $j(P)$. Ceci prouve l'injectivité de l'application $i_{f,G}\colon\ \mathcal{P}(\psi,\Gamma) - S \to \mathcal{P}(f,G)$. □

Remerciements. Cette collaboration a été soutenue par l'Action Integrée franco-espagnole n° HF 1999-0046, le DGES n° PB96-1153, le projet 'Analyse complexe et dynamique' dans le cadre de la 'Communauté de Travail des Pyrénées', et le projet PICS 'Analyse complexe : théorie des fonctions et dynamique'. Ll. Alsedà et F. Mañosas ont aussi reçu le soutien du CONACIT n° 1999SGR-00349, et P. Mumbrú celui du CIRIT n° 2000SGR-00027. François Gautero remercie le Centre de Recerca Matemàtica et l'Universitat Autònoma de Barcelona pour leur accueil pendant le développement de ce travail, accueil soutenu par une Bourse Européenne Marie Curie.

Références bibliographiques

[1] Ll. Alsedà, J. Guaschi, J. Los, F. Mañosas et P. Mumbrú *Canonical representatives for patterns of tree maps*, Topology **36**, 1123–1153 (1997).

[2] Ll. Alsedà, J. Llibre et M. Misiurewicz *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, World Scientific, Advanced series in non linear dynamics vol. 5 (1993).

[3] D. Asimov et J. Franks *Unremovable closed orbits*, pré-publication. (Ceci est une version révisée d'un article qui est paru dans Springer Lecture Notes in Mathematics **1007**, Springer-Verlag, Berlin, 1983).

[4] M. Bestvina et M. Handel *Train-tracks and automorphisms of free groups*, Annals of Math. **135**, 1–51 (1992).

[5] J. Birman et M. Kidwell *Fixed points of pseudo-Anosov diffeomorphisms of surfaces*, Advances in Math. **46**, 217–220 (1982).

[6] R. Bowen, *Entropy and the fundamental group*, Springer Lecture Notes in Mathematics **668**, Springer-Verlag, Berlin, 21–29 (1978).

[7] P. Boyland *Topological methods in surface dynamics*, Topology and its Applications **58**, 223–298 (1994).

[8] R. F. Brown *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott-Foresman, Chicago (1971).

[9] T. Hall *Unremovable periodic orbits of homeomorphisms*, Math. Proc. Phil. Soc. **110**, 523–531 (1991).

[10] M. Handel *The forcing partial order on the three times punctured disk*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **17**, 593–610 (1997).

[11] B. Jiang *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemporary Math. **14** (1983).

[12] B. Jiang *Bounds for fixed points on surfaces*, Mathematische Annalen **311**, 467–479 (1998).

[13] J. Los *On the forcing relation for surface homeomorphisms*, Publ. Math. IHES **85**, 5–61 (1997).

[14] A. N. Sharkovskii *On the coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Ukr. Math. Z. **16**, 61–71 (1964).