C. R. Acad. Sci. Paris, t. ???, Série I, p. 1–4, 2003 **– PXMA????.TEX –**
Théorie des groupes/*Group theory*

Hyperbolicité relative des suspensions de groupes hyperboliques

François Gautero

Université de Genève, Section de Mathématiques, 2-4 rue du Lièvre, CP 240, 1211 Genève, Suisse.
Courriel: Francois.Gautero@math.unige.ch

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Une fois introduite, pour un automorphisme de groupe, la notion d'être hyperbolique relativement à une famille de sous-groupes, on établit un analogue "relatif" du "Combination Theorem" de Bestvina - Feighn pour les groupes suspensions $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ où G est un groupe hyperbolique et α un automorphisme relativement hyperbolique de G. Les deux types d'hyperbolicité relative, à la Farb et à la Gromov, sont traités. © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Relative hyperbolicity of mapping-tori of hyperbolic groups

Abstract. *After introducing the notion of group automorphism hyperbolic relative to a family of subgroups, we establish an analog of the Bestvina - Feighn's Combination Theorem for mapping-tori groups $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ of relatively hyperbolic automorphisms α of hyperbolic groups G. Both Farb's and Gromov's relative hyperbolicity are considered.* © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

La version anglaise abrégée.

An important particular case of the Bestvina - Feighn's "Combination Theorem" [2] is the case of mapping-tori groups $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ of hyperbolic groups G: G_α is hyperbolic if and only if $\alpha \in \text{Aut}(G)$ is hyperbolic, that is: $\exists \lambda > 1, N \geq 1$; $\forall w \in G, \lambda |w| \leq \max(|\alpha^N(w)|, |\alpha^{-N}(w)|)$, where $|.|$ is the usual word metric. In [1] appears a question of Swarup, who asks for a generalization of this kind of theorem in the relatively hyperbolic context, see [4] for a first answer in a different setting. Two notions of relative hyperbolicity exist, one is due to Gromov [8] whereas the other one has been elaborated on by Farb [5]. Bowditch [3] allows us to present both of them with Farb's terminology.

Let G be a group with a finite set of generators and with associated Cayley graph Γ. Let $\mathcal{H}$ be a finite collection of subgroups H_i of G. For each left coset gH_i, we add a vertex $v(gH_i)$. Each such vertex is joined to all the vertices of Γ associated to elements of G in the same left coset gH_i by edges of length $\frac{1}{2}$. This is the Farb's graph $\Gamma_{\mathcal{H}}$. A Γ-path γ is a Γ-*trace* of a (u, v)-*quasi geodesic* [8] $\tilde{\gamma}$ of $\Gamma_{\mathcal{H}}$ if γ can be obtained from $\tilde{\gamma}$ by susbstituting each passage through a $\mathcal{H}$-class by a Γ-geodesic with same endpoints.

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

The graph $\Gamma_{\mathcal{H}}$ satisfies the *Bounded Coset Penetration property (BCP)*, with a constant $C(u,v) \geq 0$, if any pair γ, γ' of Γ-paths with same initial point, the terminal points of which are at Γ-distance at most 1, and which are Γ-traces of (u,v)-quasi $\Gamma_{\mathcal{H}}$-geodesics, satisfies the following properties: *1.* If γ and γ' go through a same $\mathcal{H}$-class then their entrance points in this class are at Γ-distance at most $C(u,v)$ one from the other. *2.* If γ goes through a $\mathcal{H}$-class into which γ' does not enter then the Γ-length of the subpath of γ corresponding to the passage through this $\mathcal{H}$-class is less or equal to $C(u,v)$.

DEFINITION 0.1. – *[5, 3] The group G is* hyperbolic Farb-relatively to $\mathcal{H}$ *if the graph $\Gamma_{\mathcal{H}}$ is hyperbolic. If moreover $\Gamma_{\mathcal{H}}$ satisfies the BCP, then G is* hyperbolic Gromov-relatively to $\mathcal{H}$.

Let $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. A collection $\mathcal{H}$ of subgroups of G is *α-invariant up to conjugacy* if : $\forall H \in \mathcal{H}\ \exists\ H' \in \mathcal{H}, w \in G\,; \alpha(H) = w^{-1}H'w$. For any H, there exists a minimal integer n_H and $w_H \in G$ such that $\alpha^{n_H}(H) = w_H^{-1}Hw_H$. If $H =< S_H, R_H >$, the *mapping-torus* of $\mathcal{H}$ is the collection $\mathcal{H}_\alpha = \{H_\alpha\}_{H\in\mathcal{H}}$ of subgroups of $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ where $H_\alpha =< S_H, t\,; t^{n_H}w_H\alpha^{n_H}(S_H) = S_H t^{n_H}w_H >$.

DEFINITION 0.2. – *An automorphism α of a group G with system of generators S is hyperbolic relatively to a collection of subgroups $\mathcal{H}$ which is α-invariant up to conjugacy if there exist $N \geq 1$, $\lambda > 1$ such that: $\forall w \in F_n - \mathcal{H}, \lambda|w|_{\mathcal{H}} \leq max(|\alpha^N(w)|_{\mathcal{H}}, |\alpha^{-N}(w)|_{\mathcal{H}})$, where $|.|_{\mathcal{H}}$ is the word metric for G equipped with the system of generators which is the union of S with the set of all elements of the subgroups in $\mathcal{H}$.*

THEOREM 0.3. – *Let G be a hyperbolic group and let $\alpha \in Aut(G)$ be hyperbolic relatively to a finite collection $\mathcal{H}$ of finitely generated subgroups of G. If G is hyperbolic Farb-relatively (resp. Gromov-relatively) to $\mathcal{H}$ then $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ is hyperbolic Farb-relatively (resp. Gromov-relatively) to $\mathcal{H}$ (resp. to $\mathcal{H}_\alpha$).*

We will only give a sketch of the proof, details will be found in a paper to come. As G is hyperbolic, it is hyperbolic Farb-relatively to a finite family $\mathcal{H}$ of finitely generated subgroups if and only if $\mathcal{H}$ is quasi convex in G. If G is without torsion, it is hyperbolic Gromov-relatively to $\mathcal{H}$ if and only if $\mathcal{H}$ is quasi convex and malnormal in G. *Using the theory developped in [9], we show that for any automorphism of such a group G there exists an optimal collection of subgroups satisfying the hypothesis of Theorem 0.3: it suffices to take a maximal collection of maximal subgroups with polynomial growth.* In a way similar to [7], we are able to reduce the proof to the case of the mapping-torus of a tree-map. Thus, in this Note, we only elucidate the free group case. The proof then amounts to approximating the geodesics in the Cayley complex of the mapping-torus group G_α equipped with its standard presentation. The basis observation [6] is that this Cayley complex carries a non singular semi-flow with a transverse foliation by trees and with a particular dynamical behaviour. The geodesics are concatenations of subpaths of the orbits with subpaths in the trees of this foliation, these are copies of the Cayley graph of the free group.

1. Introduction

Un cas particulier important du “Combination Theorem” [2] concerne les suspensions $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ de groupes hyperboliques G : G_α est hyperbolique si et seulement si $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ est hyperbolique [8, 2], c'est à dire : $\exists \lambda > 1, N \geq 1\,; \forall w \in G, \lambda|w| \leq \max(|\alpha^N(w)|, |\alpha^{-N}(w)|)$, où $|.|$ désigne la métrique du mot usuelle. Dans [1] apparaît la question, posée par Swarup, d'avoir une version “relative” de ce type de théorème, [4] donne une première réponse dans un cadre différent. L'hyperbolicité relative a été introduite par Gromov [8] afin notamment de pouvoir traiter les groupes fondamentaux de 3-variétés compactes à bord d'intérieur hyperbolique. Deux notions d'hyperbolicité relative co-existent, celle de Gromov et une due à Farb [5]. Bowditch [3] nous permet de les énoncer dans un cadre unique, celui de Farb [5].

2. Énoncé du théorème

Soit G un groupe muni d'un système fini de générateurs, avec graphe de Cayley Γ. Soit $\mathcal{H}$ une collection finie de sous-groupes H_i de G. Pour chaque classe à gauche xH_i, on ajoute un sommet $v(xH_i)$ que l'on joint aux sommets de Γ correspondant aux éléments de cette classe par une arête de longueur $\frac{1}{2}$: c'est le *graphe de Farb* $\Gamma_{\mathcal{H}}$. Un Γ-chemin γ est une Γ-*trace* d'une (u,v)-*quasi géodésique* [8] $\tilde{\gamma}$ de $\Gamma_{\mathcal{H}}$ si γ s'obtient de $\tilde{\gamma}$ en susbstituant chaque passage à travers une $\mathcal{H}$-classe par une Γ-géodésique de mêmes extrémités. Le graphe $\Gamma_{\mathcal{H}}$ satisfait la *Bounded Coset Penetration property (BCP)*, avec une constante $C(u,v) \geq 0$, si toute paire γ, γ' de Γ-chemins qui ont même point initial, dont les points terminaux sont à Γ-distance au plus 1, et qui sont des Γ-traces de (u,v)-quasi $\Gamma_{\mathcal{H}}$-géodésiques, satisfait les deux propriétés suivantes : *1.* Si γ et γ' traversent une même $\mathcal{H}$-classe alors leurs points d'entrée sont à Γ-distance au plus $C(u,v)$. *2.* Si γ traverse une $\mathcal{H}$-classe que γ' ne traverse pas alors la Γ-longueur du sous-chemin de γ correspondant au passage à travers cette $\mathcal{H}$-classe est inférieure ou égale à $C(u,v)$.

DÉFINITION 1. – *[5, 3] Le groupe G est* hyperbolique Farb-relativement à $\mathcal{H}$ *si le graphe $\Gamma_{\mathcal{H}}$ est hyperbolique. Si de plus $\Gamma_{\mathcal{H}}$ satisfait la BCP, alors G est* hyperbolique Gromov-relativement à $\mathcal{H}$.

Soit $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. Une collection $\mathcal{H}$ de sous-groupes de G est *α-invariante à conjugaison près* si : $\forall H \in \mathcal{H}\ \exists\ H' \in \mathcal{H}, w \in G\ ; \alpha(H) = w^{-1}H'w$. Pour tout H, il existe un entier minimal n_H et $w_H \in G$ tels que $\alpha^{n_H}(H) = w_H^{-1} H w_H$. Si $H =< S_H, R_H >$, la *suspension* de $\mathcal{H}$ est la collection $\mathcal{H}_\alpha = \{H_\alpha\}_{H \in \mathcal{H}}$ de sous-groupes de $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ où $H_\alpha =< S_H, t\ ; t^{n_H} w_H \alpha^{n_H}(S_H) = S_H t^{n_H} w_H >$. Les éléments w_H sont nommés *éléments α-caractéristiques de $\mathcal{H}$.*

DÉFINITION 2. – *Un automorphisme α d'un groupe G de système générateur S est hyperbolique relativement à une collection de sous-groupes $\mathcal{H}$ α-invariante à conjugaison près s'il existe $N \geq 1$, $\lambda > 1$ tels que : $\forall w \in F_n - \mathcal{H}, \lambda |w|_{\mathcal{H}} \leq max(|\alpha^N(w)|_{\mathcal{H}}, |\alpha^{-N}(w)|_{\mathcal{H}})$, où $|.|_{\mathcal{H}}$ est la métrique du mot sur G muni du système générateur qui est l'union de S avec l'ensemble des éléments des sous-groupes de $\mathcal{H}$.*

THÉORÈME 1. – *Soient G un groupe hyperbolique et $\alpha \in Aut(G)$ hyperbolique relativement à une collection finie $\mathcal{H}$ de sous-groupes finiment engendrés. Si G est hyperbolique Farb-relativement (resp. Gromov-relativement) à $\mathcal{H}$ alors $G_\alpha = G \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ est hyperbolique Farb-relativement (resp. Gromov-relativement) à $\mathcal{H}$ (resp. à $\mathcal{H}_\alpha$).*

On ne donnera qu'un aperçu de la preuve, les détails apparaitront dans l'article à venir. Comme le groupe G est hyperbolique, il est hyperbolique Farb-relativement à une famille finie $\mathcal{H}$ de sous-groupes finiment engendrés si et seulement si $\mathcal{H}$ est quasi convexe dans G. Si G est sans torsion, il est hyperbolique Gromov-relativement à $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{H}$ est quasi convexe et malnormale dans G. *En utilisant la théorie développée dans [9], on montre que pour tout automorphisme d'un tel groupe G il existe une collection (optimale) de sous-groupes satisfaisant les hypothèses du théorème : il suffit de prendre une collection maximale de sous-groupes maximaux à croissance polynômiale au sens de [9].* À titres divers, mes remerciements vont à P. de la Harpe, M. Lustig, L. Potyagailo et T. Vust, ainsi qu'aux rapporteurs de [6] et de cette note.

3. Preuve du théorème

Le groupe hyperbolique G est un produit libre de groupes hyperboliques librement indécomposables avec un groupe libre. La théorie de Bass-Serre et la JSJ-décomposition de [10] nous ramènent à l'étude de la suspension d'une application simpliciale d'un arbre d'espaces T. Des arguments similaires à ceux de [7] nous ramènent au cas où T est n'est qu'un arbre. On se contente donc d'expliciter le cas où G est un groupe libre. L'arbre T n'est alors rien d'autre que le graphe de Cayley Γ de G et $\mathcal{H}$ désigne donc une collection finie de sous-groupes finiment engendrés du groupe libre. On note $\mathcal{W}$ le maximum des Γ-longueurs des générateurs de ces sous-groupes, et des éléments α-caractéristiques de $\mathcal{H}$. Pour chaque $\Gamma_{\mathcal{H}}$-chemin, il existe une unique Γ-géodésique de mêmes extrémités, c'est la Γ*-trace réduite* du $\Gamma_{\mathcal{H}}$-chemin. Le lemme suivant permet d'utiliser, avec des adaptations mineures, les arguments de [6].

LEMME 2. – *Il existe une constante $C_0(u,v)$ telle que toute (u,v)-quasi $\Gamma_{\mathcal{H}}$-géodésique est $C_0(u,v)$-proche dans $\Gamma_{\mathcal{H}}$ de sa trace réduite, et réciproquement. D'autre part toute Γ-géodésique est $\mathcal{W}$-proche dans Γ d'une $(\mathcal{W},\mathcal{W})$-quasi $\Gamma_{\mathcal{H}}$-géodésique de mêmes extrémités.*

Le complexe de Cayley $\mathcal{C}^\alpha$ pour $G_\alpha =< x_1, \cdots, x_r, t\ ; t^{-1}x_i t = \alpha(x_i) >$ admet un semi-flot non-singulier $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tel que $\sigma_1 \colon \Gamma \times \{n\} \to \Gamma \times \{n+1\}$ représente l'automorphisme α, ainsi qu'une fonction hauteur $v \colon \mathcal{C}^\alpha \to \mathbb{R}$ continue surjective telle que $v^{-1}(n) = \Gamma \times \{n\}$, n entier quelconque ($v^{-1}(n)$

est une *strate*). On note $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$ les versions relatives de $\mathcal{C}^\alpha$, v est aussi définie sur $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$, une strate est alors un $\Gamma_\mathcal{H} \times \{n\}$. Un *chemin* dans $\mathcal{C}^\alpha$ ou $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$ est une concaténation de segments d'orbites du semi-flot, c'est à dire d'intervalles joignant x et $\sigma_t(x)$, et de chemins dans les strates, dits *horizontaux*. Si $x \neq y$ satisfont $v(x) = v(y)$ et $\sigma_t(x) = \sigma_t(y)$, l'unique géodésique horizontale entre x et y est une t*-annulation*.

LEMME 3. – *Avec les notations introduites précédemment, il existe $t_0, M, K > 0$ et $\lambda, \lambda_+ > 1$ tels que, si $x, y \in \mathcal{C}^\alpha$ satisfont $v(x) = v(y)$ alors :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{\lambda_+^t} d_\mathcal{H}(x,y) - K \leq d_\mathcal{H}(\sigma_t(x), \sigma_t(y)) \leq \lambda_+^t d_\mathcal{H}(x,y)$.*

2. *Si $d_\mathcal{H}(x,y) \geq M$ alors soit $d_\mathcal{H}(x,y)$ est* dilatée dans le passé*, i.e. pour tout $n \geq 1$, $d_\mathcal{H}(x_{nt_0}, y_{nt_0}) \geq \lambda^n d_\mathcal{H}(x,y)$, où $\sigma_{nt_0}(a_{nt_0}) = a$, soit $d_\mathcal{H}(x,y)$ est* dilatée dans le futur*, i.e. pour tout $n \geq 1$, $d_\mathcal{H}(\sigma_{nt_0}(x), \sigma_n(y)) \geq \lambda^n d_\mathcal{H}(x,y)$.*

3. *Si x, y sont dans une t-annulation et $d_\mathcal{H}(x,y) \geq M$ alors $d_\mathcal{H}(x,y)$ est dilatée dans le passé.*

Les fonctions ou constantes données plus bas dépendent à priori des paramètres $\lambda, \lambda_+, K, t_0, M, \mathcal{W}$. La $\mathcal{C}^\alpha$-trace réduite d'un $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-chemin s'obtient en substituant chaque $\Gamma_\mathcal{H}$-sous chemin par sa Γ-trace réduite.

DÉFINITION 3. – *Une Γ-géodésique h et un $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-chemin γ sont en* bonne position *si tout point de la $\mathcal{C}^\alpha$-trace réduite de γ appartenant à l'orbite d'un point de h est dans l'orbite future ou passée de ce point.*

LEMME 4. – *Soient x, y avec $v(x) = v(y)$ et γ une (u,v)-quasi $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-géodésique connectant les orbites de x et y, en bonne position par rapport à la Γ-géodésique h entre x et y. Alors il existe une constante $C_* > 0$ et une fonction $C_1(u, v, d_\mathcal{H}(x,y))$, avec $C_1(u, v, .)$ décroissante pour $0 < d_\mathcal{H}(x,y) \leq C_*$ puis croissante avec $d_\mathcal{H}(x,y) \geq C_*$, telle que γ est dans un $C_1(u, v, d_\mathcal{H}(x,y))$-voisinage dans $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$ de la concaténation de h avec les segments d'orbite joignant x, y aux extrémités de γ.*

PROPOSITION 5. – *Soit h une Γ-géodésique dans $\mathcal{C}^\alpha$ et γ une (u,v)-quasi $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-géodésique entre les orbites futures ou passées des extrémités de h. Il existe $C_2(u,v)$ telle qu'un $C_2(u,v)$-voisinage de γ contienne une $(C_2(u,v), C_2(u,v))$-quasi $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-géodésique en bonne position par rapport à h.*

Si γ et h ne sont pas en bonne position, la trace réduite de γ contient des sous-chemins dont tous les points sont dans des t-annulations. Par les lemmes 3.3 et 4, ils sont proches horizontalement d'orbites futures ou passées de points de h. □

DÉFINITION 4. – *Une* diagonale *est une $\Gamma_\mathcal{H}$-géodésique horizontale qui minimise la $\Gamma_\mathcal{H}$-distance entre les orbites futures et passées de ses extrémités.*

LEMME 6. – *Toute diagonale D avec $|D|_\mathcal{H} \geq 2$ est dilatée dans le futur et le passé après $2t_0$. Si D' est une autre diagonale, dont les extrémités sont dans le futur des extrémités de D, alors il existe $C_3(|D|_\mathcal{H})$ telle que D et D' sont $C_3(|D|_\mathcal{H})$-proches dans $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$.*

3.1. Hyperbolicité Farb-relative

Soit $\mathcal{B}$ un $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-bigone (u,v)-quasi géodésique. On choisit une constante L suffisamment grande (en particulier $L > \max(2, C_*)$). On choisit une Γ-géodésique horizontale h entre les orbites passées des sommets de $\mathcal{B}$ avec $v(h) < \min_{x \in \mathcal{B}} v(x) - C_2(u,v)$. La proposition 5 donne un $\mathcal{C}^\alpha_\mathcal{H}$-bigone $(C_2(u,v), C_2(u,v))$-quasi géodésique, de cotés γ, γ', $C_2(u,v)$-proche de $\mathcal{B}$ et en bonne position par rapport à h. Puisque γ et γ' sont en bonne position par rapport à h, on peut toujours considérer des diagonales qui joignent à la fois orbites futures ou passées de points de γ ou γ', et orbites futures ou passées de points de h. De telles diagonales sont alors en bonne position à la fois par rapport à γ et à γ'. Supposons l'existence d'une diagonale de $\Gamma_\mathcal{H}$-longueur supérieure à $\max(2, C_*)$ entre les orbites futures et passées des sommets du bigone. Si $P \in \gamma$ est suffisamment loin horizontalement des orbites des extrémités, L ayant été choisi suffisamment grand au début, on peut trouver une diagonale D comme ci-dessus, avec $\max(2, C_*) < |D|_\mathcal{H} < L$, telle que le lemme 4 implique que P soit $C_1(C_2(u,v), C_2(u,v), L)$-proche de D. Puisque γ' est aussi en bonne position par rapport à D, et $|D|_\mathcal{H} > \max(2, C_*)$, les lemmes 6 et 4 donnent $P' \in \gamma'$ proche de D donc de P. Des arguments similaires prouvent que γ et γ' coincident presque dans un voisinage horizontal des orbites des extrémités, ou s'il n'existe pas de diagonale suffisamment longue entre les orbites futures et passées des sommets du bigone. D'où la finesse des bigones quasi géodésiques. Tout triangle géodésique se décompose en deux bigones $(3, 0)$-quasi géodésiques, remarque due au rapporteur de [6]. On a l'hyperbolicité désirée.

3.2. Hyperbolicité Gromov-relative

DÉFINITION 5. – *Un* X-escalier E *est un* $\mathcal{C}^\alpha$- *ou* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$*-chemin tel que* $v_{|E}$ *est monotone et si* x, y *sont les extrémités d'une* marche *(i.e. chemin horizontal maximal dans l'escalier), alors* $d_{\mathcal{H}}(x, y) \leq X$.

Un $\mathcal{C}^\alpha$-chemin horizontal γ joignant deux sommets définit un élément de G; de même si γ est un $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$-chemin horizontal, en considérant sa $\mathcal{C}^\alpha$-trace réduite. On dit que γ *représente* cet élément.

LEMME 7. – *Tout passage à travers une* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$*-classe est* $\mathcal{W}$*-proche dans* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$ *d'un* $\mathcal{W}$*-escalier de* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$ *dont les marches représentent un élément d'un sous-groupe de* $\mathcal{H}$ *ou un élément* α*-caractéristique de* $\mathcal{H}$.

LEMME 8. – *Si* E *est un* X*-escalier, il existe* $C_4(|D|_{\mathcal{H}}, X)$ *telle que, pour une certaine diagonale* D *entre les orbites futures ou passées des extrémités de* E*,* E *est contenu dans un* $\Gamma_{\mathcal{H}}$*-voisinage de taille* $C_4(|D|_{\mathcal{H}}, X)$ *de la concaténation de* D *avec les segments d'orbite joignant ses extrémités à celles de* D.

Deux escaliers E_1, E_2 de $\mathcal{C}^\alpha$ se *chevauchent* s'il existe $w_i \subset E_i$ tels que w_1 et w_2 joignent les mêmes orbites du semi-flot.

LEMME 9. – *Il existe* $\mathcal{W}'$ *telle que si* γ_1, γ_2 *sont deux passages à travers des* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$*-classes et* E_1, E_2 *sont les* $\mathcal{C}^\alpha$*-traces des* $\mathcal{W}$*-escaliers de* $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$ *associés à* γ_1, γ_2 *par le lemme 7, alors* E_1 *et* E_2 *se chevauchent sur une* $\mathcal{C}^\alpha$*-longueur d'au plus* $\mathcal{W}'$.

Un chevauchement de deux escaliers, long dans $\mathcal{C}^\alpha$, contredit soit la BCP, c'est à dire le fait que G est hyperbolique Gromov-relativement à $\mathcal{H}$, soit l'hyperbolicité relative de l'automorphisme. □

Démonstration de l'hyp. Gromov-relative. – Par le lemme 7, une (u, v)-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$-géodésique $\tilde{\gamma}$ est $\mathcal{W}$-proche dans $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$ d'une concaténation $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$ de $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$-chemins γ_i telle que, si γ n'est pas une $(u'(u,v), v'(u,v))$-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$-géodésique, alors certains des γ_i, notés γ_i^b satisfont : *1.* leurs points initiaux et terminaux sont dans une même orbite O_i; *2.* les substituer par la géodésique verticale joignant leurs extrémités donne une $(u'(u,v), v'(u,v))$-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$-géodésique. Après une éventuelle mise en bonne position (proposition 5), par les lemmes 4 et 7, ces γ_i^b ont des sous-chemins initiaux c_i^d et terminaux c_i^t proches soit d'une diagonale, soit d'un $\mathcal{W}$-escalier associé à un passage à travers une $\mathcal{H}$-classe. Ces diagonales et escaliers joignent deux mêmes orbites et ont une extrémité dans O_i. Les lemmes 6, 8 et 9 donnent $A(u, v) > 0$, $x \in c_i^d$ et $y \in c_i^t$ tels que $d_{\mathcal{H}_\alpha}(x, y) \leq A(u, v)$. Puisque $\tilde{\gamma}$ est une (u, v)-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$-géodésique, la $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$-longueur du sous-chemin de $\tilde{\gamma}$ joignant c_d à c_t est alors bornée par $uA(u, v) + v$. Il existe donc $L(u, v) > 0$ telle que toute (u, v)-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$-géodésique est $L(u, v)$-proche dans $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$ d'une $(u'(u,v), v'(u,v))$-quasi $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$-géodésique. L'hyperbolicité de $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}}$ implique alors l'hyperbolicité de $\mathcal{C}^\alpha_{\mathcal{H}_\alpha}$. Les lemmes 6 et 8, après une éventuelle mise en bonne position (proposition 5), donnent le point (1) de la BCP. Le point (2) est donné par le lemme 9. □

Références bibliographiques

[1] M. Bestvina, Questions in Geometric Group Theory, Page web : www.math.utah.edu / ∼bestvina.

[2] M. Bestvina et M. Feighn, A combination theorem for negatively curved groups, Journ. of Diff. Geom. 35 (1992) 85-101 et Journ. of Diff. Geom. 43 (1996) 783-788.

[3] B.H. Bowditch, Relatively hyperbolic groups, preprint Southampton (1999).

[4] F. Dahmani, Combination theorem for convergence groups, preprint X-archiv GR 0203258.

[5] B. Farb, Relatively hyperbolic groups, Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 810–840.

[6] F. Gautero, Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces, accepté pour publication à l'Ens. Math. (2003).

[7] F. Gautero et M. Lustig, Relative hyperbolicity of (one-ended hyperbolic)-by-cyclic groups, soumis (2003).

[8] M. Gromov, Hyperbolic groups, Essays in Group Theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer 1987, 75–263.

[9] M. Lustig, Structure and conjugacy for automorphisms of free groups I,II, Max-Planck-Insitut für Mathematik, Preprint Series 2000 (130) et 2001 (4).

[10] Z. Sela, Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II, Geom. Funct. Anal. 7 (1997) 561–593.