

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

**Quatre problèmes géométriques, dynamiques ou algébriques
autour de la suspension**

Habilitation à Diriger des Recherches

en

Mathématiques

présentée par

François Gautero

au vu des rapports de

Pierre de la Harpe	Université de Genève (Suisse)
Ursula Hamenstädt	Universität Bonn (Allemagne)
Richard Weidmann	Heriot-Watt University, Edimbourg (Écosse)
Michael Heusener	Rapporteur interne

soutenance le **4 décembre 2006 à 14h30** en salle 9111 du Pôle Physique

devant le jury composé de :

Marc Bourdon	Université de Lille I
Gilles Courtois	CNRS, École Polytechnique, Paris
Jean-Marc Gambaudo	CNRS, Université de Nice
Michael Heusener	Université de Clermont-Ferrand II
Hamish Short	Université d'Aix-Marseille I
Jean-Claude Sikorav (Président)	École Normale Supérieure de Lyon

Remerciements

Pierre de la Harpe, Ursula Hamenstädt et Richard Weidmann m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur les travaux présentés dans ce mémoire. Qu'ils en soient ici sincèrement remerciés.

Marc Bourdon, Gilles Courtois, Jean-Marc Gambaudo, Hamish Short et Jean-Claude Sikorav sont parvenus à se libérer de leurs obligations pour prendre part au jury de cette habilitation. C'est d'autant plus méritoire que les liaisons tant ferroviaires qu'aériennes de et vers Clermont-Ferrand sont rares et difficiles. Je souhaiterais leur adresser mes plus vifs remerciements, et leur signifier combien je suis heureux de les voir ici aujourd'hui.

Je remercie tout particulièrement *Jean-Claude Sikorav* pour avoir accepté la responsabilité de présider le jury.

Je voudrais aussi remercier mes collègues de Clermont-Ferrand, en particulier les membres de l'équipe G.A.A.O., pour leur accueil au sein du département. *Michael Heusener* et *Jean-Yves Ledimet* m'ont intégré avec beaucoup de gentillesse dans la composante Géométrie et Topologie de l'équipe. *Michael Heusener* n'a pas hésité à s'éloigner un peu de ses préoccupations mathématiques habituelles pour se pencher de plus près sur mon travail. Il a aussi accepté sans rechigner le rôle ingrat de responsable tuteur et de rapporteur interne de cette habilitation. Je voudrais aujourd'hui lui témoigner toute ma reconnaissance.

Toujours à Clermont-Ferrand, les secrétaires du Laboratoire et du Département de Mathématiques m'ont très gentiment apporté leur aide pour la préparation de cette journée, je les en remercie vivement.

J'ai fait la connaissance de *Pierre de la Harpe* lors de mon arrivée à Genève en septembre 2001. Il s'est tout de suite intéressé à mon travail, et ne m'a jamais compté son temps. J'ai plaisir à l'en remercier ici.

Je suis redevable à *Leonid Potyagailo* pour m'avoir parlé, le premier, d'hyperbolicité relative, alors que cette notion ne connaissait pas l'engouement qu'elle suscite aujourd'hui.

Plus généralement, je voudrais adresser mes remerciements, et toute ma reconnaissance, à celles et ceux qui, depuis la fin de ma thèse, se sont intéressés à mes résultats, m'ont accueilli dans leur institution ou m'ont apporté leur aide, d'une manière ou d'une autre. L'un d'entre eux, co-auteur de l'un des articles présentés dans ce mémoire, se nommait *Pere Mumbrú*. Pere nous a quittés le 28 Juillet 2005. J'ai aujourd'hui une pensée toute particulière pour lui.

Je remercie les membres de l'A.C.I. Jeunes Chercheurs "Structures géométriques en théorie des groupes et topologie" pour l'excellente ambiance qui y règne, et pour les réunions stimulantes et enrichissantes organisées dans son cadre.

Depuis le début, *Jean-Marc Gambaudo* et *Martin Lustig* ont suivi l'évolution de mon travail. Leur soutien ne m'a jamais fait défaut. Merci.

Résumé - Abstract

Résumé

Les trois chapitres de ce texte traitent quatre problèmes de nature géométrique, dynamique ou algébrique, ayant un lien avec le procédé de suspension (ou “mapping-torus”). Le premier chapitre présente un théorème de combinaison général pour les graphes de groupes relativement hyperboliques (Gromov, Farb). Le deuxième chapitre aborde deux questions de dynamique topologique : d’une part la généralisation, aux applications continues de graphes, de la notion de type d’orbite (Sharkovskii, Boyland) ; d’autre part la caractérisation de l’existence d’une structure de suspension pour certaines surfaces branchées (Williams). Le troisième chapitre traite de la recherche de caractérisations, combinatoires ou dynamiques, des automorphismes géométriques parmi les automorphismes du groupe libre.

Abstract

The three chapters of this text present four distinct problems, of geometrical, dynamical or algebraical nature, around the mapping-torus construction. The first chapter is about a general combination theorem for graphs of relatively hyperbolic groups (Gromov, Farb). The second chapter deals with two questions of topological dynamics : a generalization, to graph-maps, of the type of a periodic orbit (Sharkovskii, Boyland) ; a characterization of the existence of a mapping-torus structure for certain branched surfaces (Williams). The third chapter presents some combinatorial and dynamical characterizations of geometric automorphisms among the automorphisms of the free group.

Liste des travaux

Travaux présentés pour l'HDR

- [G6] *Geodesics in trees of hyperbolic and relatively hyperbolic groups*, F. Gautero. Preprint.
- [G5] *Relative hyperbolicity of (one ended hyperbolic)-by-cyclic groups*, F. Gautero et M. Lustig. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **137** (3) p. 595-611 (2004).
- [G4] *Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces*, F. Gautero. *L'Enseignement Mathématique* **49** (2) p. 263-305 (2003).
- [G3] *Patterns and minimal dynamics for graph-maps*, Ll. Alsedà, F. Gautero, J. Guaschi, J. Los, F. Mañosas, P. Mumbrú. *Proceedings of the London Mathematical Society* **91** (3) p. 414-442 (2005).
- [G2] *Cross-sections to semi-flows on 2-complexes*, F. Gautero. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **23** (1) p. 143-174 (2003).
- [G1] *Combinatorial mapping-tori, branched surfaces and free group automorphisms*, F. Gautero. Preprint.

Autres travaux

Articles

- [G9] *Fewilletages de 2-complexes*, F. Gautero. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* **10** (4) p. 619-638 (2001).
- [G8] *Dynamical 2-complexes*, F. Gautero. *Geometriae Dedicata* **88** p. 282-319 (2001).
- [G7] *Combinatorial suspension for disc-homeomorphisms*, F. Gautero et J. Los. *Journal of Knot Theory and its Ramification* **7** (6) p. 747-795 (1998).

Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences

- [G12] *Hyperbolicité relative des suspensions de groupes hyperboliques*, F. Gautero, **t. 336** (11) p. 883-888 (2003).
- [G11] *Types d'orbites et dynamique minimale pour les applications continues de graphes*, Ll. Alsedà, F. Gautero, J. Guaschi, J. Los, F. Mañosas, P. Mumbrú, **t. 334** (6) p. 479-482 (2002).
- [G10] *Dynamical n -complexes*, F. Gautero, **t. 330** (6) p. 489-494 (2000).

Table des matières

Introduction	1
1. Préambule	1
2. Un peu de dynamique	1
3. La suspension : un “cas d’étude”	2
Rappels sur les surfaces et groupes libres	7
4. Surfaces, groupes modulaires et réseaux ferroviaires	7
5. Géométricit�, irréductibilité, hyperbolicité et automorphismes de groupes libres	12
Chapitre I. Hyperbolicité, hyperbolicité relative et théorèmes de combinaison	21
I.1. Préliminaires	21
I.2. Suspensions de groupes libres et hyperbolicité	27
I.3. Hyperbolicité relative des suspensions d’homéomorphismes de surfaces	29
I.4. Hyperbolicité relative des suspensions d’automorphismes de groupes hyperboliques	32
I.5. Hyperbolicité relative des suspensions d’automorphismes de groupes relativement hyperboliques	34
I.6. Vers un théorème de combinaison général	35
I.7. Dans la continuation des travaux précédents ...	39
Chapitre II. Deux problèmes de dynamique topologique	41
II.1. Types d’orbites	41
II.2. Suspensions et sections globales	44
Chapitre III. G�om�tricit� d’un automorphisme de groupe libre	53
III.1. Introduction au problème de g�om�tricit�	53
III.2. Bons réseaux ferroviaires invariants	54
III.3. Premier résultat	55
III.4. G�om�tricit� et surfaces branchées	55
III.5. Commentaires sur la preuve	56
Bibliographie	59
Annexe A. Géométrie des groupes	65
Geodesics in trees of hyperbolic and relatively hyperbolic groups	67
Relative hyperbolization of (one ended hyperbolic)-by-cyclic groups	69
Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces	71

Annexe B. Dynamique topologique	73
Patterns and minimal dynamics for graph-maps	75
Cross-sections to semi-flows on 2-complexes	77
Annexe C. Automorphismes du groupe libre	79
Combinatorial mapping-tori, branched surfaces and free group automorphisms	81

Introduction

1. Préambule

Le titre de ce mémoire “Quatre problèmes géométriques, dynamiques ou algébriques autour de la suspension” reflète assez fidèlement son contenu. Le chapitre I traite d’un problème de géométrie des groupes, plus précisément de l’hyperbolisation relative de graphes de groupes. Le chapitre II présente deux problèmes de dynamique topologique. Le chapitre III traite essentiellement d’automorphismes de groupes libres et de 2-complexes. La suspension (au sens des dynamiciens) est un fil conducteur aisé auquel le lecteur pourra se raccrocher à tout moment. Il y a pourtant un aspect du mémoire que le titre choisi n’illustre pas de façon convenable. C’est la présence, dans chacun des articles présentés, d’une notion de dynamique. C’est la raison pour laquelle nous revenons un bref moment, après ce petit préambule, sur la théorie des systèmes dynamiques.

Le lecteur trouvera dans chacun des chapitres le rappel des notions nécessaires pour en appréhender le contenu spécifique. Le résultat le plus important aux yeux de l’auteur est le théorème d’hyperbolisation relative des graphes de groupes du chapitre I (article [G6]), on y résout en effet l’un des problèmes ouverts (Q. 1.13 page 3) de la liste de M. Bestvina [6]. Il ne s’agit cependant là que d’une opinion très subjective. Par ailleurs, nous avons inclus, dans un petit chapitre suivant cette introduction, quelques rappels sur les surfaces et groupes libres. Chacun des objets, ou presque, qui y apparaît refait surface dans plusieurs des chapitres suivants.

2. Un peu de dynamique

Vers la fin du XIX^e siècle, H. Poincaré introduit l’étude qualitative des équations différentielles dans [77], publication que l’on peut considérer comme l’acte de naissance de la théorie des systèmes dynamiques. Étudier un système dynamique n’est plus alors tenter de trouver des solutions analytiques les plus exactes possibles, mais plutôt s’intéresser aux propriétés asymptotiques ou globales du système (par exemple, pour les premières, son entropie ou bien, pour les secondes, l’ensemble de toutes ses orbites périodiques).

La théorie des systèmes dynamiques connut de nouveaux et importants développements dans les années soixante, sous l’influence de Lorenz, Ruelle et Takens [55, 54, 80] d’une part et de Smale [85] (voir aussi [90]) d’autre part. Les premiers furent à l’origine des “attracteurs chaotiques” (et des premières “surfaces branchées” que l’on retrouvera, sous une autre forme, dans les chapitres II et III). La définition, par Smale, de l’*hyperbolicité* (voir [84] par exemple)

se révéla tout aussi essentielle : un difféomorphisme f d'une variété métrique M est hyperbolique sur un ensemble invariant S si le fibré tangent TM_x en chaque point x de S se décompose en deux sous-espaces invariants par Tf_x , dilatés d'un facteur $\lambda > 1$, l'un pour les itérations négatives et l'autre pour les itérations positives. La décomposition en tels fibrés, nommés respectivement *stables* et *instables*, dépend continûment du point considéré. Pour un flot apparaît un troisième facteur, de dimension 1 : l'espace tangent au flot. On traduit schématiquement l'hyperbolicité par l'existence de variétés stables et instables "feuilletant" l'espace et s'intersectant transversalement. Une caractéristique importante d'un système hyperbolique, aussi bien pour les mathématiciens que pour les physiciens, est d'être structurellement stable, c'est à dire insensible aux petites perturbations ou, en termes plus mathématiques : "si $f \in \text{Diff}^k(M)$ est hyperbolique, il existe un ouvert de $\text{Diff}^k(M)$ autour de f dont les éléments sont topologiquement conjugués à f ". C'est par ailleurs un principe que l'hyperbolicité entraîne le chaos, où le chaos dans un système dynamique peut se traduire par une *entropie* strictement positive. Selon le contexte, on dispose de différentes notions d'entropie (topologique, métrique, mesurable), qui peuvent coïncider sous certaines conditions [15, 29]. L'entropie n'apparaîtra cependant dans les résultats présentés (par exemple en liaison avec le problème algébrique de caractérisation des automorphismes "géométriques" du groupe libre - voir le chapitre III) que sous une forme simple, i.e. comme le rayon spectral d'une matrice (voir le chapitre de rappels). Nous nous abstenons donc ici de plus de précision.

Ces travaux ont eu une grande influence en dehors du domaine strict des systèmes dynamiques. Pour ne citer qu'un ou deux exemples (parmi de nombreux autres) d'interactions avec topologie, algèbre et géométrie : le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes d'une 3-variété hyperbolique compacte, sans bord, est fini (c'est une conséquence de [35] et du fait que le groupe d'automorphismes externes d'une variété hyperbolique sans bord est fini [4] - une *métrique hyperbolique* est une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante strictement négative, définie sur M si M est fermée et sur l'intérieur de M si M a du bord); et la version algébrique de ce résultat : il n'y a d'automorphismes hyperboliques sur un groupe hyperbolique sans torsion que si ce groupe est un produit libre de groupes libres et de groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques fermées (conséquence de la JSJ-décomposition de [13] - voir aussi [79]).

Dans ce mémoire, on retrouvera l'hyperbolicité dynamique, ou des analogues algébriques de cette hyperbolicité, à de nombreuses reprises. Notamment en liaison avec une hyperbolicité géométrique, ou plutôt une version algébrique de l'hyperbolicité géométrique.

3. La suspension : un "cas d'étude"

Il s'agit ici de la suspension du dynamique, dite aussi *mapping-torus*, ou bien encore *tore d'application*, et non de la suspension du topologue algébriste [86].

DÉFINITION. *Soit X un espace et $f: X \rightarrow X$ une application de X dans lui-même. La suspension de X par f , notée X_f , est le produit cartésien $X \times [0, 1]$ quotienté par la relation d'équivalence $(x, 1) \sim (f(x), 0)$.*

Supposons que X soit un espace topologique dont le groupe fondamental G est bien défini et admet une présentation finie : $G = \langle x_1, \dots, x_n; R_1, \dots, R_k \rangle$. Supposons alors que f est une application continue sur X , et notons $f_\#$ un endomorphisme induit par f sur G . Le groupe fondamental de la suspension X_f de X par f admet alors une présentation de la forme $\langle x_1, \dots, x_n, t; t^{-1}x_i t = f_\#(x_i), i = 1, \dots, n, R_1, \dots, R_k \rangle$. C'est une *HNN-extension ascendante* si $f_\#$ est injectif et un *produit semi-direct* de G par \mathbb{Z} si $f_\#$ est un automorphisme. Dans ces deux derniers cas, on dira que c'est un *groupe suspension*.

On sera principalement intéressé au cas où X est un graphe et f une application continue (disons linéaire par morceaux) de ce graphe, et au cas où X est une surface compacte et f un homéomorphisme de cette surface. Dans le premier cas, la suspension est un 2-complexe cellulaire muni d'un *semi-flot non singulier*, c'est à dire une action libre du semi-groupe des réels additifs. Dans le second cas, la suspension est une variété compacte de dimension 3 (à bord si la surface a du bord et fermée sinon) munie d'un flot non singulier (tangent au bord s'il y en a). Topologiquement, dans le second cas, on a une fibration localement triviale sur le cercle, dont la fibre est la surface et dont la monodromie est la classe d'isotopie de l'homéomorphisme. Tandis que dans le premier cas, on a seulement une fibration au sens de Serre [86]. Dans les deux cas, le système dynamique admet, par construction, une *section globale* : un graphe dans le premier cas, une surface dans le second cas, qui intersecte toutes les orbites du système en temps fini, transversalement et dans le même sens. Dans les deux cas, cela se traduit algébriquement par l'existence d'une classe de cohomologie dans $H^1(X_f, \mathbb{Z})$ dont le noyau est égal au groupe fondamental de la section et qui est strictement positive sur tout cycle (courbe fermée) obtenu en fermant un segment d'orbite, dont les extrémités sont dans la section, par un chemin quelconque contenu dans cette section.

3.1. Géométrie des suspensions. Soit S une surface compacte et soit h un homéomorphisme de S . La suspension S_h de S par h est une variété compacte de dimension 3. Depuis la conjecture de géométrisation de Thurston, on sait l'importance de la géométrie dans l'étude de ces variétés. Parmi les huit possibles [83], la géométrie hyperbolique est certainement la plus importante. Parmi les variétés hyperboliques, une autre conjecture de Thurston assure une place de première importance aux suspensions : toute 3-variété hyperbolique, compacte et sans bord est, à revêtement fini près, une suspension. À quelle condition alors la suspension S_h sera-t-elle une variété hyperbolique ? Pour simplifier la discussion, la surface S est orientée et l'homéomorphisme h préserve l'orientation. Un théorème de Thurston, voir [73] pour une preuve complète, apporte la réponse : la suspension S_h d'un homéomorphisme h d'une surface compacte S est une variété hyperbolique si et seulement si la classe d'isotopie de h est *pseudo-Anosov*. Le lecteur se rapportera au chapitre suivant pour la définition de pseudo-Anosov, la conséquence la plus significative étant qu'il existe, dans la classe d'isotopie de h , un homéomorphisme qui est un difféomorphisme hyperbolique en dehors d'un nombre fini, non nul, d'orbites périodiques.

D'un point de vue algébrique, que peut-on dire du groupe fondamental de la variété suspension S_h ? Si S n'a pas de bord, et si la classe d'isotopie de h est pseudo-Anosov, alors c'est un *groupe hyperbolique* à la Gromov [43]. Réciproquement, si S_h n'a pas de bord et si son groupe fondamental est un groupe hyperbolique non élémentaire (le groupe fondamental de la

suspension d'une sphère est, en effet, toujours hyperbolique, de façon triviale), alors la classe d'isotopie de h est pseudo-Anosov. Bestvina-Feighn ont fourni pour les suspensions d'automorphismes de groupes hyperboliques un analogue du théorème de Thurston pour les suspensions d'homéomorphismes de surfaces [7, 8]. En fait leur théorème s'énonce pour des graphes de groupes hyperboliques. On a ici un cas particulier où le graphe est un cercle, le groupe de sommet est le groupe fondamental d'une surface fermée hyperbolique et l'endomorphisme de recollement est un automorphisme. On nomme communément de tels théorèmes *théorèmes de combinaison*. Que se passe-t-il si la surface S a du bord? alors seul l'intérieur de la variété suspension S_h porte une métrique hyperbolique et son groupe fondamental n'est pas hyperbolique du fait des sous-groupes associés aux tores de bord. Un tel exemple indique la nécessité de disposer d'une classe plus large que les groupes hyperboliques. Gromov a ainsi introduit une notion d'*hyperbolicité relative* dans [43], notion qui ne s'est véritablement développée que suite à sa reformulation par d'autres [31, 14, 72]. Qu'en est-il alors d'un théorème de combinaison pour l'hyperbolicité relative?

Problème 1, théorèmes I.2.1, I.3.4, I.4.3, I.5.3, I.6.1, I.6.3 aux pages 27, 30, 33, 34, 35, 36, articles [G6, G5, G4] : énoncer un critère de préservation de l'hyperbolicité relative par HNN-extension et produit amalgamé. Plus généralement, donner un critère d'hyperbolicité relative pour des graphes de groupes relativement hyperboliques (théorème de combinaison).

C'était une question ouverte (Q 1.13 page 3) dans [6]. Le point de départ est une nouvelle preuve, dans le cadre des suspensions de groupes libres, du théorème de Bestvina-Feighn cité plus haut. Notons que, si de nombreuses autres preuves ont été publiées, qui couvrent des cas particuliers dits *acylindriques*, la preuve proposée ici est la seule distincte de celle de Bestvina-Feighn dans le cadre *non acylindrique*. Et c'est aussi seulement dans un tel cadre qu'intervient la dynamique de l'application de recollement.

3.2. Types d'orbites. Un thème classique en systèmes dynamiques, voir par exemple [81, 28, 17] du côté des mathématiciens et [41] pour les physiciens, est de chercher à caractériser un système, et sa complexité, via les *types* d'orbites périodiques qu'on y trouve. C'est à dire que l'on va définir des classes d'orbites périodiques puis tenter de répondre à des questions de la forme : si tel système présente tel type x d'orbite périodique, peut-il, ou doit-il, présenter le type y ? un système de telle ou telle forme peut-il présenter tous les types d'orbites périodiques? Mais les systèmes provenant du monde physique ne sont souvent définis qu'à de petites perturbations près, ce qui a amené à la question suivante : les classes d'orbites périodiques que je définis vont-elles persister si je modifie l'application ou le flot tout en restant dans une certaine classe, par exemple classe d'homotopie, d'isotopie, ...? Ce genre de questions a mené à l'introduction des "représentants minimaux", c'est à dire des applications, dans une classe donnée, qui ont la propriété de voir leurs types d'orbites périodiques persister à travers toute la classe.

Le système dynamique défini par la donnée d'un homéomorphisme h d'une surface à bord S est *semi-conjugué* à un système dynamique défini par la donnée d'une application continue surjective ψ d'un graphe Γ dans lui-même. Où, par semi-conjugaison, on entend une application continue $r: S \rightarrow \Gamma$ telle que $r \circ h = \psi \circ r$. Cette application est une équivalence d'homotopie entre S et Γ . Dans le cas où h est pseudo-Anosov, la semi-conjugaison peut être choisie pour induire une bijection, à ensembles finis près, entre l'ensemble des orbites périodiques de h et l'ensemble des orbites périodiques de ψ . C'est une conséquence du fait que h est hyperbolique sur le complémentaire, dans l'intérieur de S , d'un nombre fini de points. Cependant, a priori, rien n'assure l'unicité du couple (ψ, Γ) , qui dépendra de la rétraction considérée. Le graphe Γ notamment n'est défini qu'à équivalence d'homotopie près. Si l'on s'intéresse aux questions de type d'orbite, on est ainsi invité à considérer le problème suivant :

Problème 2, théorème II.1.4 à la page 43, article [G3] : comparer les ensembles d'orbites périodiques de deux applications ψ, ϕ quelconques définies sur deux graphes distincts. Plus précisément, définir une notion adaptée de type d'orbite et de représentant minimal.

La suspension, par l'intermédiaire de laquelle peuvent être définies diverses notions de classes d'orbites périodiques [51], fournit un outil a priori séduisant pour aborder cette question. En effet, si l'on considère deux graphes distincts, de même groupe fondamental, et deux applications continues sur ces graphes induisant le même endomorphisme, à changement de base près, sur ce groupe fondamental, alors les groupes fondamentaux des suspensions sont isomorphes. La suspension d'une orbite périodique définit une classe de conjugaison dans ce groupe. Une possibilité évidente est donc de définir la classe d'une orbite périodique comme étant cette classe de conjugaison. Mais cette définition, trop grossière, nécessite d'être raffinée et on lui a préféré une approche plus algébrique.

3.3. Recherche de sections globales. Un autre thème classique en dynamique topologique est la recherche de sections globales à des flots sur des variétés [82, 33]. En d'autres termes, étant donné un flot sur une variété M^n de dimension $n \geq 2$, ce flot est-il le flot suspension d'un homéomorphisme d'une variété M^{n-1} ? Moins classique et moins étudiée (voir cependant [34]) dans le cadre de semi-flots sur des 2-complexes, cette question y est pourtant tout aussi naturelle. Par exemple, si (ϕ_t) est hyperbolique sur l'intérieur de M^3 et rentrant le long du bord pour les t positifs (en termes plus techniques, M^3 est le voisinage isolant d'un *attracteur hyperbolique*), il existe toujours une semi-conjugaison entre le système $(M^3, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$ et un système $(\mathcal{W}, (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$, où \mathcal{W} est une *surface branchée* (un 2-complexe muni d'une structure différentiable) et $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-flot non singulier sur \mathcal{W} [23]. Conséquence de l'hyperbolicité du système, la semi-conjugaison réalise une bijection entre l'ensemble des orbites périodiques du flot et l'ensemble des orbites périodiques du semi-flot.

Problème 3, théorèmes II.2.10 et II.2.16 aux pages 49 et 51, article [G2] : donner un critère effectif d’existence de sections globales à des semi-flots sur des 2-complexes. Caractériser les suspensions d’applications continues de graphes parmi ces 2-complexes.

3.4. Sur les automorphismes de groupes libres. On a toujours une semi-conjugaison entre une suspension d’homéomorphisme de surface à bord et une suspension d’application continue de graphe. Un système de ce dernier type provient-il toujours d’un système du premier type? Posée comme cela, la réponse est évidemment non, car la plongeabilité d’un 2-complexe dans une 3-variété est une propriété très forte, pouvant se briser par de simples homotopies locales. Que se passe-t-il au niveau algébrique? Le groupe fondamental de la suspension d’une application continue de graphe est-il alors toujours celui d’une suspension d’homéomorphisme de surface? Il faut bien évidemment demander que l’application par laquelle on fait la suspension du graphe induise un automorphisme sur son groupe fondamental. Supposons cette condition satisfaite. Les groupes fondamentaux d’une suspension d’homéomorphisme de surface à bord et d’une suspension d’application continue de graphe sont alors tous deux des produits semi-directs d’un groupe libre par \mathbb{Z} . Si le groupe fondamental du graphe, un groupe libre donc, est de rang 2, en d’autres termes si la caractéristique d’Euler du graphe est égale à -1 , la réponse à notre question est “oui”. En effet, tout automorphisme du groupe libre de rang 2, noté \mathbb{F}_2 , est *géométrique*, c’est à dire induit par un homéomorphisme d’une surface compacte à bord de groupe fondamental \mathbb{F}_2 . Ce n’est cependant plus vrai lorsque le rang du groupe libre est supérieur ou égal à 3. La question générale est la suivante :

Problème 4, théorèmes III.3.1 et III.4.3 aux pages 55 et 56, article [G1] : énoncer des propriétés permettant de distinguer automorphismes géométriques et automorphismes non géométriques parmi les automorphismes de groupes libres \mathbb{F}_n , $n \geq 3$.

On a abordé le problème ci-dessus en définissant une classe d’automorphismes combinatoirement semblables aux pseudo-Anosov de surface sans singularités intérieures. Les résultats obtenus sont proches dans leur formulation de résultats récents de Handel-Mosher [50] (et relié [49]) et Guirardel [46], mais ils concernent une classe d’automorphismes distincte de la leur (sans en être disjointe cependant). Notre approche, totalement différente de celle adoptée par les auteurs cités, passe par une désingularisation combinatoire de la suspension d’une application continue de graphe. On prouve notamment qu’un automorphisme α dans la classe considérée est géométrique si et seulement si l’entropie de α est égale à celle de son inverse.

Rappels sur les surfaces et groupes libres

Surfaces et groupes libres reviendront dans chacun des trois chapitres suivants. C'est pourquoi, plutôt que de disséminer des rappels à travers tout le document, on a préféré les réunir à un même endroit.

4. Surfaces, groupes modulaires et réseaux ferroviaires

Sauf mention explicite du contraire, une surface est toujours connexe.

4.1. Classification de Nielsen-Thurston. La référence en français est le livre de Fathi-Laudenbach-Poenaru [32].

DÉFINITION 4.1. [32] *Soit S une surface compacte. Un homéomorphisme h de S est pseudo-Anosov s'il existe $\lambda > 1$ et une paire de feuilletages singuliers $(\mathcal{F}_u, \mu_s), (\mathcal{F}_s, \mu_u)$ de S , transverses l'un à l'autre, transversalement mesurés, tels que :*

$$(a) \quad h(\mathcal{F}_u, \mu_s) = (\mathcal{F}_u, \frac{1}{\lambda}\mu_s) \text{ et } h(\mathcal{F}_s, \mu_u) = (\mathcal{F}_s, \lambda\mu_u),$$

(b) *les singularités, en nombre non nul, sont du type de la quadratique différentielle $z^{n-2}dz^2$ (selles avec $n \geq 3$ séparatrices).*

La convention adoptée ici pour les mesures transverses aux feuilletages n'est pas celle de [32]. Notre choix permet d'avoir la mesure instable (resp. stable) dilatée par les itérations positives (resp. négatives) de l'homéomorphisme.

Lorsque la surface a du bord, on sera parfois amené à distinguer *singularités intérieures* et *singularités de bord*, c'est à dire sur le bord de la surface. Lorsque l'on a un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord, toute composante de bord de la surface contient au moins une singularité de bord. Par ailleurs, chaque feuille régulière d'un feuilletage invariant de pseudo-Anosov est dense dans la surface. Ces feuilles sont homéomorphes à \mathbb{R} .

Le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes d'une surface S est nommé *groupe modulaire* et noté, selon la terminologie anglaise, $MCG(S)$. Lorsque la surface a du bord, les isotopies préservent le bord, mais on ne demande pas qu'elles le fixent point par point.

DÉFINITION 4.2. *Soit S une surface compacte.*

Une classe d'isotopie $[h] \in MCG(S)$ est d'ordre fini s'il existe $n \geq 1$ tel que h^n est isotope à l'identité.

Une classe d'isotopie dans $MCG(S)$ est d'ordre infini si elle n'est pas d'ordre fini.

Rappelons qu'une *courbe essentielle* dans une surface compacte est une courbe qui est homotopiquement non triviale et qui n'est pas homotope à une composante de bord de la surface.

DÉFINITION 4.3. *Soit S une surface compacte.*

Une classe d'isotopie dans le groupe modulaire de S est une classe pseudo-Anosov si un homéomorphisme dans la classe est un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Une classe d'isotopie $[h] \in MCG(S)$ est une classe réductible si elle est d'ordre infini et s'il existe une collection finie, non vide, de courbes simples, fermées et essentielles, invariante à isotopie près sous l'action de h .

Le théorème ci-dessous motive ces définitions.

THÉORÈME 4.4. *(Nielsen-Thurston [32]) Soit S une surface compacte. Toute classe d'isotopie dans le groupe modulaire de S est soit d'ordre fini, soit pseudo-Anosov, soit réductible.*

Même si ce ne sera jamais essentiel, notons qu'un homéomorphisme pseudo-Anosov est unique, à conjugaison près, dans sa classe d'isotopie.

4.2. Réseaux ferroviaires. L'opuscule [22] présente la théorie des *réseaux ferroviaires invariants* associés aux pseudo-Anosov de surfaces. On pourra aussi se référer à [74] pour tout savoir sur ces objets. Ces deux ouvrages sont loin de constituer les seules références disponibles. On expose ici les rudiments de cette théorie, la classique proposition 4.7 établissant le lien entre homéomorphismes pseudo-Anosov et réseaux ferroviaires.

Sauf mention explicite du contraire, dans cette partie, les graphes sont connexes et finis. On supposera leurs arêtes orientées. Si e est une arête d'un graphe Γ , e^{-1} désigne l'arête avec l'orientation opposée. En tant que CW-complexe cependant, Γ a une unique 1-cellule pour chaque paire $\{e, e^{-1}\}$. Soit e une arête d'un graphe Γ . Soit v un sommet de Γ auquel elle est incidente. Soit $N(v)$ un voisinage compact contractible de v dans Γ , ne contenant aucun autre sommet que v . Un *germe de e en v* est la fermeture d'une composante connexe de $(e \cap N(v)) \setminus \{v\}$. Si e admet v comme sommet initial et terminal, alors, étant donné $N(v)$, e a deux germes distincts en v . C'est le seul cas.

Si v est un sommet de Γ , $St(v)$ désigne l'ensemble des arêtes orientées ayant v pour sommet initial. Si x est un point intérieur à une arête, on commence par *subdiviser Γ en x* . C'est à dire que l'on ajoute x à l'ensemble des sommets de Γ , et que l'on modifie l'ensemble des arêtes en conséquence. La notation $St(x)$ désigne alors l'ensemble des arêtes orientées de ce nouveau graphe, qui admettent x pour sommet initial. Un *tournant* à un sommet v d'un graphe Γ est une paire d'arêtes orientées dans $St(v)$. Un chemin p dans Γ *emprunte un tournant* (e, e') à un sommet v si p contient consécutivement un germe de e en v et un germe de e' en v .

On dira qu'un graphe Γ est *muni d'une structure lisse* si un espace tangent $T_x\Gamma$ de dimension 1 est défini en tout point x de Γ , de telle façon que les $T_x\Gamma$ varient continûment en fonction de x . Ceci permet de distinguer deux classes d'arêtes dans $St(v)$, v un sommet quelconque de Γ : celles qui ont leurs germes, au sommet initial v , du côté gauche de v et celles qui ont leurs germes, au sommet initial v , du côté droit de v . En fait, on peut définir ainsi, de façon plus

combinatoire, une structure lisse sur Γ : c'est la donnée, en chaque sommet de Γ , de deux classes d'équivalence sur $St(v)$, nommées "gauche" et "droite". Si x est un point intérieur à une arête, les notions de gauche et droite en x sont naturelles. On notera $St_G(x)$ (resp. $St_D(x)$) les côtés gauche et droit d'un point quelconque x de Γ .

DÉFINITION 4.5. *Un réseau ferroviaire est un graphe muni d'une structure lisse.*

Une *mesure* sur un réseau ferroviaire τ est une collection de poids positifs sur les arêtes de τ , qui satisfont les "conditions de switch" : la somme des poids sur les arêtes à gauche d'un sommet est égale à la somme des poids sur les arêtes à droite de ce sommet. Une mesure sur un réseau ferroviaire est une *mesure de support total* si tous les poids sont strictement positifs.

Un *chemin porté par un réseau ferroviaire* τ est un chemin localement injectif dans τ , tel que chaque tournant de τ qu'il emprunte est composé d'une arête à gauche et d'une arête à droite du point considéré.

Une application continue ψ d'un réseau ferroviaire τ *préserve la structure lisse de* τ si l'image par ψ de tout chemin porté est un chemin porté. C'est une notion qu'il est possible de définir combinatoirement. Demander que ψ préserve la structure lisse de τ est, en effet, équivalent à demander que, pour tout point x de τ , l'application ψ induise une bijection entre l'ensemble à deux éléments $\{St_G(x), St_D(x)\}$ et l'ensemble à deux éléments $\{St_G(\psi(x)), St_D(\psi(x))\}$. Plus précisément, si l'image sous ψ d'un germe d'arête à gauche de x est un germe d'arête à gauche (resp. à droite) de $\psi(x)$, alors :

- l'image d'un germe de chaque arête à gauche de x est un germe d'arête à gauche (resp. à droite) de $\psi(x)$,
- l'image d'un germe de chaque arête à droite de x est un germe d'arête à droite (resp. à gauche) de $\psi(x)$.

On peut finalement donner la :

DÉFINITION 4.6. *Un réseau ferroviaire invariant est une paire (ψ, τ) telle que τ est un réseau ferroviaire et ψ est une application de τ préservant la structure lisse.*

L'usage de définir un réseau ferroviaire invariant comme une paire "(application préservant une structure lisse, graphe muni d'une structure lisse)" vient plus de la communauté des mathématiciens étudiant les automorphismes de groupes libres, que de celle des spécialistes de la dynamique sur les surfaces.

Par un "plongement lisse d'un réseau ferroviaire τ dans la surface S ", on entend que S est munie d'une structure lisse, et que l'application de τ dans S considérée est un plongement de classe C^1 , dont la différentielle est injective en tout point. La proposition ci-dessous est classique, et motive toutes les définitions qui précèdent.

PROPOSITION 4.7. *Soit S une surface compacte. Soit h un homéomorphisme pseudo-Anosov de S , de feuilletages invariants (\mathcal{F}_u, μ_s) et (\mathcal{F}_s, μ_u) . Alors il existe un réseau ferroviaire invariant (ψ, τ) , une sous-surface compacte $S_\Delta \subset S$, préservée à isotopie près par h , des plongements lisses $i, \phi: \tau \rightarrow S$, dont les images sont contenues dans S_Δ et transverses à $\mathcal{F}_s \cap S_\Delta$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (a) le complémentaire de S_Δ dans S est une union de disques, contenant chacun exactement une singularité intérieure, et d'anneaux dont une composante de bord coïncide avec une composante de bord de S ;
- (b) en identifiant chaque feuille de $\mathcal{F}_s \cap S_\Delta$ à un point, S_Δ se rétrécit sur $i(\tau)$; on note r cette rétraction, qui est une équivalence d'homotopie ;
- (c) $\phi(\tau)$ est contenu dans S_Δ et coïncide avec $h(i(\tau))$; de plus, $r \circ \phi = i \circ \psi$ et r réalise une bijection entre un sous-ensemble cofini de l'ensemble des orbites périodiques de h et un sous-ensemble cofini de l'ensemble des orbites périodiques de ψ ;
- (d) si \mathcal{L} est une feuille de $\mathcal{F}_u \cap S_\Delta$, il existe un chemin c porté par τ tel que $r(\mathcal{L}) = i(c)$.

DÉFINITION 4.8. Avec les notations introduites dans la proposition 4.7, on dit que (ψ, τ) est un réseau ferroviaire invariant de l'homéomorphisme h .

Avec les notations de la proposition 4.7, si h n'a pas de singularités intérieures (la surface S a alors forcément du bord), r réalise en fait une bijection entre l'ensemble des orbites périodiques de h et l'ensemble des orbites périodiques de ψ . De plus, le groupe fondamental de S_Δ est alors isomorphe au groupe fondamental de S . Notons que, dans tous les cas, cette surface S_Δ est homéomorphe au voisinage régulier de $i(\tau)$ dans S . Par ailleurs, que S soit fermée ou pas, on peut toujours demander, en plus des propriétés énoncées, d'une part que l'application ψ envoie sommet de τ sur sommet de τ ; et, d'autre part, qu'il existe une mesure de support total sur τ . Son existence provient du fait que les feuilletages invariants du pseudo-Anosov sont transversalement mesurés et que chaque feuille régulière est dense. Nous reviendrons dans le chapitre III sur les propriétés combinatoires satisfaites par les réseaux ferroviaires invariants de pseudo-Anosov.

Dans [11], les auteurs fournissent un algorithme fini permettant, d'une part de décider si un homéomorphisme "donné" est dans une classe d'isotopie pseudo-Anosov, et d'autre part, si tel est le cas, de construire un réseau ferroviaire invariant de l'homéomorphisme pseudo-Anosov. On décrit ci-dessous, très brièvement, cet algorithme. Ce type d'algorithme a en fait d'abord été introduit pour les automorphismes de groupes libres [10], ce qui explique que certains des objets auxquels on fait allusion ci-dessous ne soient définis que dans la section suivante. Le lecteur pourra préférer d'abord lire celle-ci, avant de revenir sur la petite parenthèse ci-dessous.

Donnée de l'algorithme : Soit S une surface compacte à bord, de caractéristique d'Euler strictement négative. Une classe d'isotopie du groupe modulaire de S est définie, de façon unique, par l'automorphisme externe qu'elle induit sur le groupe fondamental, un groupe libre de rang n noté \mathbb{F}_n . Plutôt que l'homéomorphisme lui-même, on ne considère ainsi que son action sur le groupe fondamental de S , à automorphisme interne près. Plus précisément, soit i_S un isomorphisme entre le groupe fondamental de S et le groupe libre \mathbb{F}_n , et soit α l'automorphisme externe de \mathbb{F}_n défini, via cet isomorphisme, par l'action de la classe d'isotopie considérée. Soit i un plongement d'un graphe Γ dans S qui induise un isomorphisme $i_\#$ entre le groupe fondamental de Γ et le groupe fondamental de S . La donnée de l'algorithme est alors un plongement φ de Γ dans un voisinage régulier de $i(\Gamma)$ dans S tel que, si $\varphi_\#$ est l'endomorphisme induit au niveau des groupes fondamentaux, alors $\varphi_\#$ est un isomorphisme et $i_S \circ \varphi_\# \circ i_\#^{-1} \circ i_S^{-1}$ est un

automorphisme de \mathbb{F}_n dans la classe α . Le plongement φ est décrit par une collection de mots dans les arêtes du graphe Γ . Si r désigne une rétraction du voisinage régulier sur $i(\Gamma)$, alors il existe un morphisme ψ de Γ dans lui-même tel que $i \circ \psi = r \circ \phi$.

Principe de l'algorithme : L'algorithme de [11] consiste alors à modifier le quadruplet $(\Gamma, i, \varphi, \psi)$, tout en gardant le même automorphisme externe α induit sur \mathbb{F}_n , par des équivalences d'homotopie de graphes bien particulières, dont la propriété essentielle est de ne jamais faire croître l'entropie de l'application ψ (donnée comme le rayon spectral de la matrice d'incidence - voir plus bas). Parmi les transformations qui interviennent, les plus importantes sont celles dérivées des *plis*¹ de Stallings [88], dont on peut donner la formulation topologique suivante :

DÉFINITION 4.9. *Soit Γ un graphe. Soit ψ une application continue de Γ dans lui-même, localement injective en restriction aux arêtes. Soient p, p' deux chemins localement injectifs, de même sommet initial v , et autrement disjoints. Supposons que les images de p et p' sous ψ coïncident et que, de plus, les paramétrages de p et p' soient tels que $\psi(p(t)) = \psi(p'(t)) \equiv c(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, avec $p(0) = p'(0) = v$ et $p(1), p'(1)$ les points terminaux de p et p' .*

Soit alors \mathcal{R} la relation d'équivalence définie par :

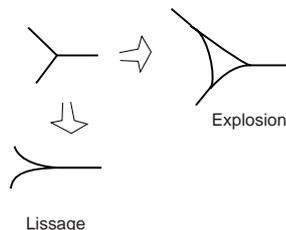
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1], x = p(t) \text{ et } y = p'(t).$$

Plier ψ le long de c signifie transformer la paire (ψ, Γ) en la paire $(\bar{\psi}, \bar{\Gamma})$, où $\bar{\Gamma}$ est le graphe quotient Γ/\mathcal{R} et $\bar{\psi}$ est l'application quotient $\bar{\psi}: \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$,

Les auteurs de [11] ont modifié la définition de pli de Stallings en considérant $\bar{\psi}: \bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Gamma}$ plutôt que l'application $\bar{\psi}$. Ainsi l'automorphisme externe induit sur le groupe fondamental ne change pas. Si le tournant auquel on plie est emprunté par l'image d'une arête sous un itéré de ψ , il apparaît un "fer à cheval", ou *annulation* $(ee^{-1})^{\pm 1}$, dans l'image de la nouvelle application. On peut supprimer cette annulation par une homotopie. Moralement parlant, on a ainsi "simplifié" le système dynamique. Le lecteur prendra garde que, tant du point de vue de l'entropie que du point de vue des orbites périodiques, cette simplification n'est, en fait, pas si évidente. L'algorithme se termine lorsqu'il n'est plus possible de faire décroître strictement l'entropie. Dans le cas où la classe d'isotopie représentée est pseudo-Anosov, on a alors obtenu un *représentant efficace*, comme défini plus bas. Ce représentant efficace est plongé, et tel que la reconstruction d'un réseau ferroviaire invariant du pseudo-Anosov est alors "canonique", par lissages et explosions de sommets. La figure 1 illustre ces transformations pour un sommet trivalent du graphe du représentant efficace. Il y a un simple lissage lorsque ce sommet correspond à une singularité de bord du pseudo-Anosov, et une explosion lorsqu'il correspond à une singularité intérieure. Tout est déterminé à partir de l'application du représentant efficace. On dit qu'on a un *représentant efficace du pseudo-Anosov*. Plus loin dans le texte, on définit les *représentants efficaces d'automorphismes externes*. Un représentant efficace de pseudo-Anosov

¹Stallings démontre dans [88] que tout morphisme de graphe est une composition de plis et d'un morphisme localement injectif. Ce morphisme est un isomorphisme si et seulement si l'endomorphisme induit sur le groupe fondamental est un automorphisme.

FIG. 1. D'un représentant efficace à un réseau ferroviaire



de surface à bord est en particulier un représentant efficace de l'automorphisme externe induit sur le groupe fondamental de la surface.

5. Géométrie, irréductibilité, hyperbolicité et automorphismes de groupes libres

Le groupe libre de rang $n \geq 2$ est noté \mathbb{F}_n . On note $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ le groupe des automorphismes de \mathbb{F}_n , $\text{Inn}(\mathbb{F}_n)$ le groupe des automorphismes internes et $\text{Out}(\mathbb{F}_n) = \text{Aut}(\mathbb{F}_n)/\text{Inn}(\mathbb{F}_n)$ le groupe des automorphismes externes.

5.1. Groupes de surfaces et géométrie. Un groupe G est un *groupe de surface* s'il existe un isomorphisme entre G et le groupe fondamental d'une surface compacte S . Soit G un *groupe de surface fermée*, c'est à dire qu'il existe un isomorphisme entre G et le groupe fondamental d'une surface compacte sans bord S . Alors G admet une présentation de la forme $\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, z_1, \dots, z_r; \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = \prod_{j=1}^r z_j^2 \rangle$ et la surface S est unique à homéomorphisme près. Elle est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 privée de $2g + r$ disques ouverts, à laquelle on a recollé, le long de leurs bords, g cylindres et r bandes de Möbius. Supposons maintenant que G soit un *groupe de surface à bord*, c'est à dire qu'il existe un isomorphisme entre G et le groupe fondamental d'une surface compacte à bord S . Puisque cette surface S se rétracte par une équivalence d'homotopie sur un graphe, son groupe fondamental, et donc aussi le groupe G , est un groupe libre \mathbb{F}_n . Dans ce cas, à homéomorphisme près, il existe un nombre fini de surfaces compactes à bord, dont le groupe fondamental est isomorphe à G .

Soit S une surface compacte. Toute classe dans le groupe modulaire de S induit un automorphisme externe sur le groupe fondamental de S . Qu'en est-il de la réciproque ?

DÉFINITION 5.1. *Soit G un groupe de surface. Un automorphisme externe de G est géométrique s'il est induit par un élément du groupe modulaire d'une surface compacte de groupe fondamental G .*

Souvent, par abus, on parle d'"automorphisme géométrique" en lieu et place d'"automorphisme externe géométrique". Dans ce cas, c'est évidemment à la classe d'automorphisme externe définie par l'automorphisme considéré que l'on pense.

Supposons que G soit un groupe de surface fermée. Alors tout automorphisme de G est géométrique (et, d'après ce qui précède, est réalisable sur une unique surface). En effet, dans le cas d'une surface fermée S , tout automorphisme externe du groupe fondamental de S est induit

par un homéomorphisme de S [70, 25, 24]. En particulier, si l'on s'intéresse à la dynamique des automorphismes de groupes de surfaces, on dispose donc, dans ce cas, de la classification de Nielsen-Thurston.

Supposons maintenant que G soit un groupe de surface à bord, c'est à dire un groupe libre \mathbb{F}_n . Les classes du groupe modulaire d'une surface à bord de groupe fondamental \mathbb{F}_n correspondent exactement aux automorphismes externes de \mathbb{F}_n préservant, à conjugaison et changement d'orientation près, les éléments associés aux courbes de bord. C'est, à nouveau, un vieux théorème de Nielsen [70] (on revient avec plus de détails sur ce résultat dans le chapitre III). Dans ce cas, il n'y a donc pas nécessairement une correspondance bijective entre les automorphismes externes de G , un groupe libre donc, et les classes du groupe modulaire d'une surface. Notons, cependant, que tout automorphisme externe de \mathbb{F}_2 est géométrique. Tous peuvent être réalisés sur le tore privé d'un disque : la courbe de bord est alors un commutateur, forcément préservé, ou envoyé sur son inverse, par l'automorphisme. Mais le cas de \mathbb{F}_2 est un cas très particulier. En effet, pour les groupes libres \mathbb{F}_n de rang $n \geq 3$, on peut affirmer que les automorphismes géométriques sont rares [38]. C'est donc bien dans le cadre des groupes libres que la question de la géométrie des automorphismes trouve tout son intérêt.

5.2. Automorphismes irréductibles. Si l'on s'intéresse à la dynamique des automorphismes de groupes libres, la situation est bien plus complexe que pour les homéomorphismes de surfaces : la trichotomie ordre fini, réductible et pseudo-Anosov donnée par le théorème de Nielsen-Thurston n'a en effet pas, en général, d'analogue clair au niveau des automorphismes (externes) du groupe libre. On distingue tout de même différentes classes :

DÉFINITION 5.2. *Soit α un automorphisme de \mathbb{F}_n .*

- α est réductible s'il existe une décomposition de \mathbb{F}_n en facteurs libres, notée $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_1 * \dots * \mathbb{F}_r * G$, telle que :
 - pour chaque i dans $\{1, \dots, r\}$ il existe $\sigma(i)$ dans $\{1, \dots, r\}$ et un élément h_i de \mathbb{F}_n avec $\alpha(F_i) = h_i^{-1} F_{\sigma(i)} h_i$,
 - l'application $i \mapsto \sigma(i)$ réalise une permutation de $\{1, \dots, r\}$.
- α est irréductible s'il n'est pas réductible.
- α est complètement irréductible (ou IWIP) si α^k est irréductible pour tout $k \geq 1$.

Les termes ci-dessus sont introduits pour les automorphismes du groupe libre. Ils auraient cependant aussi bien pu être définis pour les automorphismes externes du groupe libre. En effet, si un automorphisme appartient à l'une de ces trois catégories, alors tout automorphisme dans la même classe d'automorphisme externe appartient à cette même catégorie. On utilisera ainsi ces notions aussi bien pour les automorphismes que pour les automorphismes externes du groupe libre.

L'acronyme "IWIP" semble plus classique en langue anglaise que l'appellation "completely irreducible", qui n'apparaît essentiellement que dans [50]. Mais cette dernière a l'avantage de se traduire facilement en français.

Notons que, dans la définition d'automorphisme réductible, aucune condition n'est demandée au facteur G , excepté bien sûr d'être un facteur libre. Par exemple, l'automorphisme

α de $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ donné par $\alpha(a) = a$ et $\alpha(b) = ab$ est réductible : on prend $F_1 = \langle a \rangle$ et $G = \langle b \rangle$. Le lecteur notera également qu’une notion de réductibilité (et par conséquent d’irréductibilité) a déjà été introduite pour les homéomorphismes de surfaces. Il faut prendre garde que, dans le cas d’un automorphisme géométrique, elles ne coïncident pas forcément avec celles introduites ci-dessus pour les automorphismes de groupes libres.

Quels sont donc les liens entre les automorphismes réductibles et (complètement) irréductibles définis ci-dessus, et les automorphismes géométriques induits par des classes d’isotopie d’ordre fini, pseudo-Anosov ou réductibles (voir définitions 4.2 et 4.3) ?

Soit S une surface compacte à bord. Une classe d’isotopie d’ordre fini dans le groupe modulaire de S peut induire aussi bien un automorphisme irréductible qu’un automorphisme réductible sur le groupe fondamental de S . Il en est de même pour une classe pseudo-Anosov. Par exemple, considérons un automorphisme de tresse, c’est à dire induit par un homéomorphisme du disque \mathbf{D}^2 privé de n disques ouverts. Cet automorphisme préserve l’élément associé à la courbe de bord du disque \mathbf{D}^2 . Or cet élément appartient à une base du groupe fondamental de notre surface, le groupe libre \mathbb{F}_n . Un automorphisme de tresse est donc toujours réductible. En considérant un automorphisme de tresse induit par un pseudo-Anosov, on obtient ainsi un automorphisme de groupe libre réductible, induit par une classe d’isotopie pseudo-Anosov. Pourtant, un automorphisme de groupe libre induit par un pseudo-Anosov de surface compacte avec une seule composante de bord est irréductible. En effet, conséquence de la définition d’un pseudo-Anosov, les seuls sous-groupes libres de rang fini invariants à conjugaison près (sous une puissance de l’homéomorphisme) sont les sous-groupes cycliques définis par les courbes de bord ; or, dans notre cas, l’unique courbe de bord est un produit de commutateurs ; ce dernier ne peut engendrer un facteur libre d’une décomposition de \mathbb{F}_n comme souhaitée car il ne peut être membre d’une base de \mathbb{F}_n (son abélianisé est trivial or l’abélianisé d’une base de \mathbb{F}_n est une base de rang n de l’abélianisé). Le même raisonnement s’applique s’il y a plusieurs composantes de bord, toutes permutées en un seul cycle. Mais là l’automorphisme ne sera pas complètement irréductible alors qu’il l’est toujours dans le premier cas.

Par ailleurs, de même qu’un automorphisme d’ordre fini géométrique est forcément induit par une classe d’isotopie d’ordre fini, un automorphisme irréductible d’ordre infini, s’il est géométrique, est nécessairement induit par une classe pseudo-Anosov.

On exhibe dans le lemme suivant la seule correspondance bijective trouvée :

LEMME 5.3. *Tout automorphisme de groupe libre géométrique et complètement irréductible est induit par un pseudo-Anosov d’une surface avec une seule composante de bord. Réciproquement, tout pseudo-Anosov de surface avec une seule composante de bord induit un automorphisme complètement irréductible sur le groupe fondamental de la surface.*

Cette assertion sert sans doute de justification au fait que, souvent, on parle des automorphismes complètement irréductibles comme les “analogues” des pseudo-Anosov sur les surfaces.

5.3. Représentants efficaces. Il existe cependant un autre point commun entre homéomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes irréductibles : tous peuvent être représentés combinatoirement par des *représentants efficaces*. Ces objets ont été introduits pour la première

fois dans [10] sous le nom de *train-track map*. L'appellation "efficient representative" est beaucoup moins courante. Essentiellement, elle n'apparaît que dans [56]. Mais elle a l'avantage d'éviter des confusions avec les réseaux ferroviaires. On va rappeler brièvement la nature de ces objets. L'ensemble des sommets (resp. des arêtes) d'un graphe Γ sera noté $V(\Gamma)$ (resp. $E(\Gamma)$). Les graphes considérés sont toujours connexes et finis.

DÉFINITION 5.4. Soit $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$.

Un représentant de α est une paire (ψ, Γ) où :

- (a) Γ est un graphe de groupe fondamental \mathbb{F}_n ,
- (b) ψ est une application continue de Γ induisant α sur le groupe fondamental.

Un représentant topologique de α est un représentant (ψ, Γ) de α tel que :

- $\psi(V(\Gamma)) \subset V(\Gamma)$,
- ψ est localement injective en restriction aux arêtes.

Un représentant efficace de α est un représentant topologique (ψ, Γ) de α tel que, pour tout $k \geq 1$, (ψ^k, Γ) est un représentant topologique de α^k .

Comme pour les automorphismes géométriques, on parlera souvent, par abus de langage, de "représentant (topologique ou efficace) d'un automorphisme" en lieu et place de "représentant (topologique ou efficace) d'un automorphisme externe".

Soit (ψ, τ) un réseau ferroviaire invariant tel que ψ induise un automorphisme α sur le groupe fondamental, et tel que ψ envoie sommet sur sommet. Alors, il est facile de voir que (ψ, τ) est un représentant efficace de α . En particulier, soit (ψ, τ) un réseau ferroviaire invariant d'un pseudo-Anosov h d'une surface compacte S , tel que ψ envoie sommet sur sommet. Alors (ψ, τ) est un représentant efficace de l'automorphisme induit par h sur le groupe fondamental de la surface S_Δ de la proposition 4.7.

Mais il est faux en général qu'un représentant efficace (ψ, Γ) quelconque soit un réseau ferroviaire invariant. Supposons qu'il existe un sommet trivalent v de Γ tel que les trois tournants à v soient empruntés par les images de certaines arêtes. Alors il est impossible de lisser à v de telle façon que la structure lisse soit préservée. En effet, quelle que soit la structure lisse, il existe une arête de Γ dont l'image par ψ emprunte un tournant formé de deux arêtes du même côté de v .

Un trait marquant de ces représentants efficaces est qu'ils permettent de calculer très facilement facteur de dilatation et entropie de l'automorphisme qu'ils représentent, comme l'exprime le lemme ci-dessous :

LEMME 5.5. [10] Soit (ψ, Γ) un représentant efficace d'un automorphisme externe de groupe libre α . Soit $M(\psi, \Gamma) = (m_{ij})_{i,j=1,\dots, \text{Card}(E(\Gamma))}$ la matrice d'incidence de ψ définie par :

$$m_{ij} = \text{nombre d'occurrences de l'arête } e_j^{\pm 1} \text{ dans l'image de l'arête } e_i.$$

Alors, la plus grande valeur propre réelle positive de $M(\psi, \Gamma)$ est égale au facteur de dilatation de α (et son logarithme est donc égal à l'entropie de α).

Rappelons les définitions de ces quantités :

DÉFINITION 5.6. Le facteur de dilatation $\lambda(\alpha)$ de $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est défini par :

$$\lambda(\alpha) = \sup_{C \in \mathbb{F}_n} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|\alpha^n(C)|)}{n},$$

où $|\cdot|$ désigne la longueur du mot cycliquement réduit.

L'entropie de α , $h_{\text{top}}(\alpha)$, est le logarithme du facteur de dilatation.

Lorsque l'on dispose d'un représentant efficace d'un homéomorphisme pseudo-Anosov, on obtient ainsi à partir de la matrice d'incidence le coefficient de contraction - dilatation des feuilletages stables - instables.

5.4. Automorphismes hyperboliques. D'une toute autre nature, mais susceptibles eux aussi de présenter des similitudes avec les pseudo-Anosov :

DÉFINITION 5.7. [43] Un automorphisme α d'un groupe discret finiment engendré est hyperbolique s'il existe $\lambda > 1$ et $j \geq 1$ tel que la longueur de tout élément est dilatée d'un facteur au moins λ soit par α^j soit par α^{-j} .

Où, par longueur d'un élément γ d'un groupe discret G engendré par $\{x_i\}_{i=1\dots n}$, on entend le nombre minimal de lettres $x_i^{\pm 1}$ nécessaires pour former un mot représentant l'élément γ . Si G est le groupe libre \mathbb{F}_n , ça n'est rien d'autre que le nombre de lettres de l'unique mot réduit représentant γ . Notons que, là encore, on pourra parler d'automorphisme externe hyperbolique. Il est en effet clair que, si un automorphisme est hyperbolique, tout automorphisme dans la même classe d'automorphisme externe l'est également.

Le théorème ci-dessous donne une caractérisation des automorphismes hyperboliques des groupes libres.

THÉORÈME 5.8. [7, 19] Un automorphisme de \mathbb{F}_n est hyperbolique si et seulement s'il ne laisse invariant aucun ensemble fini, non vide, de classes de conjugaison.

Notons qu'une implication de ce théorème est triviale, et reste vraie en dehors du groupe libre : si $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ laisse invariant un ensemble fini, non vide, de classes de conjugaison, alors α n'est pas hyperbolique ².

En un certain sens, les automorphismes hyperboliques sont les analogues des pseudo-Anosov sur les surfaces fermées. Le lemme 5.9 ci-dessous précise cette analogie. Contrairement au théorème 5.8, et grâce à la classification de Nielsen-Thurston, l'équivalence entre les items (b) et (c) de ce lemme n'est pas quelque chose de très profond (celle entre les items (a) et (c) est tout au plus une observation).

² Supposons, sans perte de généralité, l'existence de $\gamma \in \mathbb{F}_n$ et $h \in \mathbb{F}_n$ tels que $\alpha(\gamma) = h^{-1}\gamma h$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(\gamma^n) = h^{-1}\gamma^n h$. Et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\alpha^j(\gamma^n) = \alpha^{j-1}(h^{-1})\alpha^{j-2}(h^{-1}) \dots h^{-1}\gamma^n h \alpha(h) \dots \alpha^{j-1}(h)$. On note $|\cdot|$ la longueur d'un élément pour une base fixée de générateurs du groupe libre. Il s'ensuit l'existence de $C(j) \geq 1$ tel que $|\alpha^j(\gamma^n)| \leq 2C(j) + |\gamma^n|$, pour tout $j \geq 1$ et tout $n \geq 1$. On a une inégalité similaire pour tout entier $j \leq -1$. On a ainsi $|\alpha^j(\gamma^n)| \leq |\gamma^n|(1 + \frac{2C(j)}{|\gamma^n|})$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 1$. La longueur de γ^n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Donc, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $\lambda > 1$, il existe $n \geq 1$ tel que $|\alpha^j(\gamma^n)| < \lambda|\gamma^n|$. D'où la non hyperbolicité de α . Cette implication reste valable si l'on substitue au groupe libre un groupe discret finiment engendré sans torsion.

LEMME 5.9. *Soit S une surface compacte fermée. Soit α un automorphisme du groupe fondamental de S . Soit $[h] \in MCG(S)$ qui induit la classe d'automorphisme externe de α sur le groupe fondamental de S . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) $[h]$ est pseudo-Anosov ;
- (b) α est hyperbolique ;
- (c) α ne laisse invariant aucun ensemble fini, non vide, de classes de conjugaison.

Indication de preuve : Si $[h]$ n'est pas pseudo-Anosov, la classification de Nielsen-Thurston nous donne immédiatement que l'automorphisme α laisse invariant un ensemble fini, non vide, de classes de conjugaison. On a ainsi (c) \Rightarrow (a). Par ailleurs, l'implication (b) \Rightarrow (c), facile, a été démontrée précédemment (voir la note du bas de la page 16).

Prouvons (a) \Rightarrow (b). On note h l'homéomorphisme pseudo-Anosov de la classe, de feuilletages invariants (\mathcal{F}_u, μ_s) et (\mathcal{F}_s, μ_u) . On munit S de la métrique $|d\mu_u| + |d\mu_s|$. C'est à dire que la longueur d'un chemin p , notée $|p|_{\mathcal{F}}$, dans S est égale à la somme de ses variations, en valeur absolue, dans les directions transverses aux feuilletages invariants du pseudo-Anosov, mesurées avec les mesures transverses de ces feuilletages. En notant ces variations $|p|_s$ et $|p|_u$, on a $|p|_{\mathcal{F}} = |p|_u + |p|_s$.

On suppose le groupe fondamental de S basé en un point x , qui est un point fixe pour h ; quitte à substituer h par l'une de ses puissances, un tel point fixe existe toujours. Chaque élément γ du groupe fondamental de S est représenté par une courbe fermée, notée $C(\gamma)$, minimisant la fonction longueur ci-dessus. On définit la longueur de γ par $|C(\gamma)|_{\mathcal{F}}$. Remarquons que $|h^j(C(\gamma))|_{\mathcal{F}} = |C(\alpha^j(\gamma))|_{\mathcal{F}}$. Par définition, le pseudo-Anosov dilate la mesure μ_u d'un facteur $\lambda > 1$ et contracte la mesure μ_s du facteur $\frac{1}{\lambda}$. En écrivant les inégalités correspondantes, on obtient un entier $N \geq 1$, indépendant de γ , tel que soit $|C(\alpha^N(\gamma))|_{\mathcal{F}} \geq \lambda |C(\gamma)|_{\mathcal{F}}$, soit $|C(\alpha^{-N}(\gamma))|_{\mathcal{F}} \geq \lambda |C(\gamma)|_{\mathcal{F}}$. Le premier cas correspond au cas où $|C(\gamma)|_u \geq |C(\gamma)|_s$, le second au cas où $|C(\gamma)|_s \geq |C(\gamma)|_u$. Remarquons que, lorsque les variations stables et instables coïncident, on a dilatation après N itérations dans les deux directions.

D'autre part, du fait que le groupe fondamental d'une surface compacte est finiment engendré, il existe $\mu \geq 1$ tel que, pour tout élément γ de $\pi_1(S, x)$, on a $\frac{1}{\mu}|\gamma| \leq |C(\gamma)|_{\mathcal{F}} \leq \mu|\gamma|$, où $|\gamma|$ désigne la longueur de γ , pour un système fini de générateurs de $\pi_1(S, x)$. Par conséquent, quitte à passer à un itéré plus grand, la dilatation constatée pour la métrique introduite est aussi valable pour la métrique du mot, et l'automorphisme α est bien hyperbolique. \square

Si l'on regarde rapidement le théorème 5.8 et le lemme 5.9, on a envie de dire qu'il n'y a guère de différence entre les automorphismes hyperboliques de groupes libres et les homéomorphismes pseudo-Anosov de surfaces compactes. Hélas, cette analogie tombe lorsque l'on considère une surface à bord, puisqu'alors l'ensemble des classes de conjugaison associées aux courbes de bord est préservé par l'automorphisme :

LEMME 5.10. *Aucun homéomorphisme de surface compacte à bord n'induit un automorphisme hyperbolique sur le groupe fondamental de cette surface.*

C'est pourtant bien le cas où le groupe fondamental de la surface est un groupe libre et où l'on voudrait que l'analogie entre "automorphisme hyperbolique" et "automorphisme induit par un pseudo-Anosov" tienne. Une formulation équivalente pour ce lemme est : *aucun automorphisme géométrique du groupe libre n'est hyperbolique.*

Par ailleurs, quels sont les liens entre automorphismes de groupes libres (complètement) irréductibles et automorphismes hyperboliques ? aucun malheureusement : un pseudo-Anosov d'une surface avec une composante de bord induit un automorphisme complètement irréductible sur le groupe fondamental et cet automorphisme n'est pourtant pas hyperbolique. D'autre part, un automorphisme hyperbolique n'est pas nécessairement irréductible : il suffit de définir α comme un automorphisme hyperbolique de \mathbb{F}_3 , puis de construire β sur le produit libre $\mathbb{F}_3 * \mathbb{F}_3$ égal à α sur chaque facteur. On a bien que β est un automorphisme hyperbolique et, pourtant, β est réductible par construction ...

Pour ne pas quitter ce chapitre sur de telles déceptions, on terminera avec un analogue du lemme 5.9 pour les représentants efficaces d'automorphismes du groupe libre. Rappelons tout d'abord les définitions des *représentants efficaces expansifs* et des *chemins de Nielsen périodiques*. Ces termes se retrouveront dans le chapitre II.

DÉFINITION 5.11. *Un représentant efficace (ψ, Γ) est expansif s'il existe une métrique sur Γ telle que toute arête e de Γ soit dilatée d'un facteur $\lambda > 1$ par ψ .*

Un chemin p dans le graphe Γ d'un représentant topologique (ψ, Γ) est un chemin de Nielsen périodique s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

- $\psi^k(p)$ et p ont mêmes extrémités ;
- $\psi^k(p)$ est homotope à p relativement aux extrémités de p .

LEMME 5.12. *Tout automorphisme de groupe libre admettant un représentant efficace expansif n'ayant aucun chemin de Nielsen périodique est un automorphisme hyperbolique.*

Le lemme ci-dessus est immédiat en faisant appel à 5.8. On propose cependant une preuve directe. Elle est similaire à la preuve de l'implication (a) \Rightarrow (b) du lemme 5.9. On peut aussi la considérer comme une preuve, dans un cas particulier, de l'implication difficile du théorème 5.8. On introduit un découpage, en sous-chemins "stables - instables", des chemins localement injectifs dans le graphe d'un représentant efficace. Le représentant efficace expansif sans chemin de Nielsen périodique joue le rôle de l'homéomorphisme pseudo-Anosov. Cela illustre bien à la fois la similarité entre le travail sur les automorphismes de groupes libres et celui sur les homéomorphismes de surfaces, et la complexité beaucoup plus grande des techniques utilisées dans le premier cadre.

Indication de preuve : On note (ψ, Γ) le représentant efficace expansif considéré. Nommons *tournant illégal* à un sommet v de Γ un tournant (e, e') à v tel que des segments initiaux de e et e' sont identifiés sous un itéré de ψ . Nommons *chemin légal* un chemin localement injectif dans Γ n'empruntant aucun tournant illégal. On note $|p|$ la longueur d'un chemin p dans Γ . On note $[p]$ l'unique chemin localement injectif dans la classe d'homotopie de p , relative aux extrémités de p .

La définition de représentant efficace implique que l'image d'un chemin légal est un chemin légal. Par définition de l'expansivité, tout chemin légal est dilaté du facteur $\lambda_0 > 1$ par ψ . D'autre part, on a une borne supérieure sur la longueur des chemins localement injectifs dans Γ dont l'image par ψ est homotopiquement triviale. C'est une conséquence du fait que (ψ, Γ) représente un endomorphisme injectif (avec le langage du chapitre I, ψ est une quasi isométrie). Il s'ensuit l'existence de constantes $K \geq 0$ et $n \geq 1$ telles que, si p est un sous-chemin légal maximal de $c_1 p c_2$ de longueur supérieure à K , alors $[\psi^n(c_1 p c_2)]$ contient un chemin légal de longueur supérieure à $\lambda_0 |p|$. Considérons maintenant un chemin réduit c empruntant exactement un tournant illégal. L'hypothèse sur la non existence de chemins de Nielsen périodiques implique l'existence de $m \geq 1$, indépendant de c , tel que $[\psi^m(c)]$ n'a aucun tournant illégal. Considérons alors un chemin localement injectif c tel que tous les sous-chemins légaux maximaux de $[\psi^m(c)]$ sont de longueur inférieure à la constante K exhibée auparavant. Il s'ensuit de la remarque précédente que le nombre de tournants illégaux dans c est λ_1 fois le nombre de tournants illégaux dans $[\psi^m(c)]$, pour une certaine constante $\lambda_1 > 1$ indépendante de c . Mais les sous-chemins légaux maximaux de c sont eux aussi de longueur inférieure à K . Par conséquent, il existe $\lambda_2 > 1$ tel que $|c| \geq \lambda_2 |[\psi^m(c)]|$.

Considérons maintenant un chemin fermé localement injectif quelconque, noté p . On nomme *instable* l'union de tous ses sous-chemins légaux maximaux de longueur supérieure à K . On la note p_u . On nomme *stable* le complémentaire fermé de cette union dans p . On le note p_s . D'après la discussion qui précède, il existe $N \geq 1$ et $\lambda > 1$ telles que $|[\psi^N(p_u)]| \geq \lambda |p_u|$, tandis que $|p_s^N| \geq \lambda |p_s|$, où p_s^N est un chemin localement injectif satisfaisant $[\psi^N(p_s^N)] = p_s$. On est donc exactement dans la même situation que dans le cas des surfaces, et les arguments sont alors exactement les mêmes, menant à la même conclusion. \square

CHAPITRE I

Hyperbolicité, hyperbolicité relative et théorèmes de combinaison

I.1. Préliminaires

I.1.1. Groupes et géométrie. Si, pour un algébriste, un groupe est un ensemble muni d'une loi vérifiant certaines propriétés, pour un géomètre un groupe sera un espace métrique. Explicitons brièvement ce point de vue. Soit G un groupe muni d'un système de générateurs S , que l'on suppose symétrique. Tout élément γ de G est le produit d'un nombre fini d'éléments de S . On définit la *longueur de γ* dans le système de générateurs S , notée $|\cdot|_S$, comme le nombre minimal de générateurs nécessaires pour écrire un mot représentant γ . La distance entre deux éléments γ_0, γ_1 , notée $d_S(\gamma_0, \gamma_1)$, est alors $|\gamma_0^{-1}\gamma_1|_S$. Le couple (G, S) , muni de la fonction distance $d_S(\cdot, \cdot)$, devient ainsi un espace métrique. La définition faisant intervenir le système générateur choisi, l'espace métrique ainsi défini n'a, a priori, rien d'intrinsèque. Cependant, lorsque S est fini, on a la :

PROPOSITION I.1.1. [43, 40] *Soient S et S' deux systèmes de générateurs finis d'un même groupe G . Alors (G, d_S) et $(G, d_{S'})$ sont quasi isométriques.*

En géométrie des groupes, on n'étudiera ainsi pas les groupes à isomorphisme près, mais à quasi isométrie près. Rappelons-en la définition :

DÉFINITION I.1.2. [43, 40] *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, et $\lambda \geq 1, \mu \geq 0$ deux constantes réelles. L'application $f: X \rightarrow X'$ est une (λ, μ) -quasi isométrie entre (X, d) et (X', d') si :*

(a) *pour tous $x, y \in X$,*

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - \mu \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \mu;$$

(b) *pour tout $y \in X'$, il existe $x \in X$ avec*

$$d'(f(x), y) \leq \mu.$$

Si seule la propriété (a) est satisfaite, on dit que f est un (λ, μ) -plongement quasi-isométrique.

Les espaces (X, d) et (X', d') sont quasi isométriques s'il existe $\lambda \geq 1, \mu \geq 0$ et une (λ, μ) -quasi isométrie de (X, d) à (X', d') .

Notons que, dans le cadre de la proposition I.1.1, la constante additive peut être choisie nulle.

On peut faire remonter les origines de la géométrie des groupes à Max Dehn, dans les quinze premières années du XX^e siècle. Cependant, pendant la majeure partie du XX^e siècle, c'est plutôt l'approche combinatoire qui a dominé dans la théorie des groupes discrets [62, 61]. Ce n'est qu'au début des années 80 qu'a vraiment été formalisée l'approche géométrique, avec l'introduction par Gromov [43] non seulement de la notion de quasi isométrie mais aussi des maintenant classiques *groupes hyperboliques* :

DÉFINITION I.1.3. [43] *Un espace métrique (X, d) est δ -hyperbolique s'il est géodésique et satisfait la propriété des triangles δ -fins, c'est à dire :*

Pour tout triplet $x, y, z \in X$, toute géodésique de x à y , notée $[x, y]$, est contenue dans le δ -voisinage d'une concaténation $[x, z][z, y]$ de géodésiques de x à z et de z à y .

On dit que (X, d) est Gromov hyperbolique s'il existe $\delta \geq 0$ tel que (X, d) soit δ -hyperbolique.

Un groupe hyperbolique (ou Gromov hyperbolique) est un groupe discret qui agit cocompactement, proprement discontinûment et isométriquement sur un espace Gromov hyperbolique propre.

On rappelle qu'un espace métrique est *propre* si ses boules fermées sont compactes.

Notons qu'un groupe hyperbolique est ainsi finiment présenté, c'est à dire qu'il existe un nombre fini de générateurs S et de relations R tels que $G = \langle S; R \rangle$. On peut donc reformuler la définition d'hyperbolicité à la Gromov de la façon suivante : *soit G un groupe discret muni d'un système fini de générateurs S ; soit $\Gamma_S(G)$ le graphe de Cayley pour G associé à S ; G est hyperbolique si et seulement si $\Gamma_S(G)$ est Gromov hyperbolique.* On rappelle que $\Gamma_S(G)$ est le graphe dont les sommets sont en bijection avec les éléments de G et une arête joint le sommet g au sommet g' si et seulement si $g = g's$, avec $s \in S$. Une fois ces arêtes décrétées isométriques à $[0, 1]$, $\Gamma_S(G)$ devient un espace métrique géodésique propre.

On a la

PROPOSITION I.1.4. [43, 40] *Si G et G' sont deux groupes discrets quasi isométriques, G est hyperbolique si et seulement si G' l'est également.*

Les plus simples des groupes hyperboliques sont les groupes finis et les groupes virtuellement cycliques infinis. On dit que ce sont les *groupes hyperboliques élémentaires*. On n'y attache que peu d'intérêt dans le cadre de cette théorie.

Les premiers groupes hyperboliques non triviaux sont les groupes libres : le graphe de Cayley de \mathbb{F}_n , pour un système générateur à n éléments, est un arbre, espace métrique 0-hyperbolique. Les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes sans bord fournissent une autre collection d'exemples de groupes hyperboliques : ils agissent comme il le faut sur le revêtement universel de la variété, qui est l'espace hyperbolique usuel ; et cet espace hyperbolique est Gromov hyperbolique [26].

L'hyperbolicité à la Gromov entraîne bon nombre de propriétés algébriques et / ou géométriques : présentation finie, résolubilité des problèmes du mot et de conjugaison, nombre fini de classes de conjugaisons d'éléments de torsion, pas de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sous-groupes (le centralisateur d'un élément d'ordre infini est virtuellement cyclique), croissance exponentielle des boules pour les groupes hyperboliques non élémentaires, ... [40]. Leur classe est cependant très large. Dans

un certain sens, on peut même affirmer que “presque tout” groupe de présentation finie est hyperbolique [44, 71].

I.1.2. Hyperbolicité relative. Malgré cela, on rencontre très vite des groupes non hyperboliques : le groupe fondamental d’une 3-variété orientable, compacte, à bord, d’intérieur hyperbolique et de volume fini, par exemple. Il contient en effet des $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sous-groupes, correspondant aux tores de bord. Cet exemple n’a pourtant rien d’exotique : la fermeture du complémentaire d’un voisinage tubulaire du noeud de 8 dans \mathbb{S}^3 , l’un des noeuds les plus simples, rentre dans cette classe. Sans chercher beaucoup plus loin, on peut aussi citer la plupart des groupes modulaires, donc des groupes de tresses : si la surface considérée n’est ni $\mathbb{S}^2 - D(j)$, $j \leq 4$, ni $\mathbb{T} - D(1)$ avec $D(n)$ une union de n disques disjoints (pour simplifier, on ne parle ici que de surfaces orientables), les groupes modulaires ne sont pas hyperboliques. En effet, deux twists de Dehn le long de courbes simples fermées, essentielles, disjointes commutent. Si ces courbes sont, de plus, non isotopes, ceci entraîne la présence de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sous-groupes dans le groupe modulaire, d’où sa non hyperbolicité. C’est pour cette raison que, dès son article original sur les groupes hyperboliques, Gromov proposa une définition d’*hyperbolicité relative* [43]. Cette première tentative n’a tout d’abord eu qu’un écho limité, jusqu’aux travaux de Farb [31]. Ce dernier proposa une nouvelle approche, plus combinatoire, de cette notion. Bowditch [14] puis Osin [72] ont ensuite à leur tour proposé de nouvelles définitions. Puisque c’est l’approche de Farb qui a été privilégiée dans les travaux présentés ici, c’est celle qui va être exposée ci-dessous. Ensuite seront précisés les liens entre les diverses notions d’hyperbolicité relative qui coexistent actuellement.

DÉFINITION I.1.5. [31] *Soit G un groupe finiment engendré, de système générateur S , et soit $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ une famille finie de sous-groupes de G finiment engendrés.*

Si $\Gamma_S(G)$ désigne le graphe de Cayley de G associé au système générateur S , le graphe de Cayley relatif à \mathcal{H} , noté $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$, est le graphe dont :

- (a) *l’ensemble des sommets est l’union de l’ensemble des sommets de $\Gamma_S(G)$ avec un ensemble de sommets exceptionnels en bijection avec les classes à droite suivant les $H_k \in \mathcal{H}$, notés $v(gH_k)$,*
- (b) *l’ensemble des arêtes est l’union de l’ensemble des arêtes de $\Gamma_S(G)$ avec un ensemble d’arêtes, dites arêtes exceptionnelles, qui joignent chaque sommet de $\Gamma_S(G)$ aux r sommets exceptionnels associés aux classes à droite auxquelles il appartient,*
- (c) *chaque arête de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ contenue dans $\Gamma_S(G)$ est rendue isométrique à $[0, 1]$, chaque arête exceptionnelle est rendue isométrique à $[0, \frac{1}{2}]$.*

REMARQUE I.1.6. *Dans la définition ci-dessus, comme dans certains des résultats donnés dans ce chapitre, les conditions de finitude sur la famille \mathcal{H} , comme sur les systèmes générateurs de G et des $H_k \in \mathcal{H}$, ne sont pas nécessaires. Elles sont implicitement utilisées dans l’affirmation que les automorphismes relativement hyperboliques définis plus loin dans ce chapitre sont des quasi isométries.*

Avec les notations ci-dessus, soit γ une (λ, μ) -quasi géodésique de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$. Rappelons qu’une (λ, μ) -quasi géodésique est l’image d’un intervalle réel par un plongement (λ, μ) -quasi isométrique.

On dit que γ est *sans aller-retour* si γ passe au plus une fois par chaque sommet exceptionnel. Les *points d'entrée* de γ dans une classe à droite gH_k sont les sommets de $\Gamma_S(G)$ associés à cette classe, appartenant à γ et précédant immédiatement le sommet exceptionnel $v(gH_k)$ le long de γ . Si γ est sans aller-retour, il y a au plus un point d'entrée dans chaque classe.

DÉFINITION I.1.7. [31] *Avec les hypothèses et notations de la définition I.1.5, le graphe de Cayley relatif $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ satisfait la propriété de pénétration bornée s'il existe $C(\lambda, \mu)$ telle que si γ, γ' sont deux (λ, μ) -quasi géodésiques sans aller-retour, de même point initial et dont les points terminaux sont à distance inférieure ou égale à 1 dans $\Gamma_S(G)$,*

alors :

si γ et γ' pénètrent dans une même classe gH_k , leurs points d'entrée dans cette classe sont à distance inférieure ou égale à $C(\lambda, \mu)$ dans $\Gamma_S(G)$.

Ce n'est pas la formulation exacte de [31]. La définition originale de pénétration bornée demande que deux conditions distinctes soient satisfaites. Le fait que l'une de ces deux conditions implique l'autre m'a été signalé par I. Kapovich.

D'un point de vue géométrique, cette propriété implique qu'il n'y a pas de longs (au sens de la métrique absolue) chemins parallèles proches l'un de l'autre et passant à travers deux classes distinctes de la partie relative. D'un point de vue algébrique, elle entraîne facilement la *presque malnormalité* de la famille \mathcal{H} . La malnormalité d'un sous-groupe est une notion classique, exprimant l'opposé de la notion de normalité : un sous-groupe H d'un groupe G est *malnormal* dans G si pour tout $w \in G - H$, $w^{-1}Hw \cap H = \{1\}$. Pour la presque malnormalité de H , on autorise l'existence d'un nombre fini d'éléments à l'intersection de H et de ses conjugués : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $w \in G - H$, le cardinal de $w^{-1}Hw \cap H$ est inférieur à M . Évidemment, s'il n'y a pas de torsion dans le groupe, la presque malnormalité se réduit à la normalité. Pour la presque malnormalité d'une famille de sous-groupes, on a la :

DÉFINITION I.1.8. *Une famille de sous-groupe $\{H_1, \dots, H_r\}$ est presque malnormale si :*

- (a) *chaque H_k est presque malnormal,*
- (b) *il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $j \neq k$, pour tout $g \in G$, $\text{Card}(g^{-1}H_k g \cap H_j) \leq M$.*

Revenons maintenant aux définitions d'hyperbolicité relative :

DÉFINITION I.1.9. [31] *Avec les hypothèses et notations introduites dans la définition I.1.5 :*

- (a) *Le groupe G est faiblement hyperbolique relativement à \mathcal{H} si le graphe de Cayley relatif à \mathcal{H} est Gromov hyperbolique.*
- (b) *Le groupe G est fortement hyperbolique relativement à \mathcal{H} si le graphe de Cayley relatif à \mathcal{H} est Gromov hyperbolique et satisfait la propriété de pénétration bornée.*

A. Szczepański [89] a montré que les deux définitions ci-dessus ne sont pas équivalentes : $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est faiblement hyperbolique relativement à l'un des deux facteurs \mathbb{Z} mais il ne l'est pas au sens fort. En fait, Dahmani [27] puis Alibegović [1] (avec une méthode plus directe) ont montré plus tard l'équivalence entre la définition originelle de Gromov et celle de l'hyperbolicité relative

forte donnée ci-dessus. Cette équivalence avait été annoncée par Bowditch dans un article [14]. Il y proposait d’autres formulations de l’hyperbolicité relative, pour certaines équivalentes à l’hyperbolicité relative faible, pour d’autres équivalentes à l’hyperbolicité relative forte, comme définies ci-dessus.

Un intérêt majeur de l’hyperbolicité relative forte réside dans le fait que le groupe hérite des propriétés importantes des sous-groupes de la partie relative. Par exemple, si G est fortement hyperbolique relativement à un sous-groupe H , alors une inégalité isopérimétrique pour H est une inégalité isopérimétrique pour G [31]. Si H a des problèmes du mot ou de conjugaison résolubles, il en est de même pour G (voir [20, 31, 72, 78]). Ce n’est pas vérifié dans le cas de l’hyperbolicité relative faible. Celle-ci a cependant pu être parfois exploitée avec profit, par exemple pour apporter une solution au problème de conjugaison dans les groupes modulaires [66].

I.1.3. Introduction aux théorèmes de combinaison. On suppose connues les notions classiques de HNN-extensions, produits amalgamés et plus généralement de graphes de groupes, ainsi que les équivalents topologiques de ces constructions algébriques [83]. On rappelle très brièvement les bases du procédé de HNN-extension, puisque c’est sur elles (plus précisément, en fait, sur les produits semi-direct par \mathbb{Z} qui sont des cas particuliers de HNN-extension) que l’accent a été mis dans ce mémoire. Soient G et H deux groupes avec deux morphismes injectifs i_0, i_1 de H dans G . La *HNN-extension de G au dessus de (H, i_0, i_1)* est le groupe obtenu en ajoutant un générateur, noté t , à G ainsi que les relations $t^{-1}i_0(w)t = i_1(w)$ pour tout $w \in H$. Le graphe de groupes associé a un sommet de groupe G et une arête de groupe H . Topologiquement, on réalise cette HNN-extension en considérant X et Y deux espaces topologiques de groupes fondamentaux respectifs G et H , puis en recollant à X le cylindre $Y \times [0, 1]$ le long de $Y \times \{0, 1\}$, de telle façon que les applications de recollement $f_k: Y \times \{k\} \rightarrow X$, $k = 0, 1$, induisent les injections i_k au niveau des groupes fondamentaux. Les produits semi-directs $G \rtimes \mathbb{Z}$ sont des cas particulier de HNN-extension, lorsque i_0 et i_1 sont des isomorphismes. Plus généralement, lorsque le domaine de $i_1 \circ i_0^{-1}$ (i.e. l’image de i_0) est égal à G , on parle de *HNN-extension ascendante*. On retrouve alors les *groupes suspensions*, annoncés dans l’introduction. Soient X un espace topologique de groupe fondamental G , et $f: X \rightarrow X$ une application continue induisant un endomorphisme injectif $f_\#$ sur G . La suspension X_f de X par f est bien une réalisation topologique de la HNN-extension ascendante de G au dessus de $(G, Id_G, f_\#)$, où Id_G est le morphisme identité de G dans lui-même. C’est une réalisation topologique du produit semi-direct $G \rtimes_{f_\#} \mathbb{Z}$ si $f_\#$ est un automorphisme.

Refermons cette parenthèse, et revenons aux théorèmes de combinaison. Considérons un graphe de groupes dont les groupes de sommets sont des groupes hyperboliques. Une question naturelle est de savoir sous quelle(s) condition(s) son groupe fondamental sera hyperbolique. La même question se pose, bien sûr, si les groupes de sommets sont relativement hyperboliques. La réponse sera cependant nécessairement plus compliquée puisque l’on doit, dans ce cas, préciser les sous-groupes à inclure dans la partie relative. Pour que la réponse ait un intérêt, ces sous-groupes doivent être les plus “petits” possibles. En effet, tout groupe est hyperbolique relativement à lui même, mais ce n’est guère enrichissant de le savoir.

De tels résultats sont nommés *théorèmes de combinaison*. Les plus classiques de ces théorèmes concernent les groupes Kleiniens [64, 65, 63]. Plus proche de nous, comme on l’a déjà évoqué, le théorème de Bestvina-Feighn [7] traite le cas des graphes de groupes hyperboliques. Le lecteur pourra se reporter à [52] pour une exposition claire de leur théorème.

D’autres preuves, plus élémentaires, sont ensuite parues, mais traitant uniquement des cas *acylindriques* [42, 53]. Soit \mathcal{G} un groupe agissant sur un arbre T . On dit que l’action de \mathcal{G} sur T est *acylindrique* s’il existe une borne uniforme sur la longueur des géodésiques de T de stabilisateurs non triviaux sous l’action de \mathcal{G} . Lorsque l’on se donne un graphe de groupes, \mathcal{G} n’est rien d’autre que le groupe fondamental de ce graphe de groupes, tandis que T désigne son revêtement universel. Par exemple, un produit amalgamé est un cas acylindrique. Pour donner un exemple un peu plus sophistiqué, soient H_1, H_2 deux sous-groupes d’un groupe G tels que la famille $\{H_1, H_2\}$ soit malnormale dans G . Alors, une HNN-extension de G sur H_1 telle que $t^{-1}H_1t = H_2$ est aussi un cas acylindrique.

À l’opposé, l’exemple typique de cas non acylindrique est le produit semi-direct d’un groupe infini G par \mathbb{Z} , en d’autres termes le groupe suspension d’un automorphisme d’un groupe infini G . En effet, dans un tel cas, le graphe de groupes est un cercle, son groupe fondamental \mathcal{G} est le produit semi-direct $G \rtimes \mathbb{Z}$, son revêtement universel T est une droite, et cette droite est fixée point par point sous l’action du sous-groupe G de \mathcal{G} .

Une conséquence bien connue de la JSJ-décomposition pour les groupes hyperboliques, librement indécomposables et sans torsion [13], est la suivante :

PROPOSITION I.1.10. *Soit G un groupe hyperbolique infini sans torsion, tel que $G \rtimes \mathbb{Z}$ est hyperbolique. Alors G est un produit libre de groupes de surfaces hyperboliques fermées et de groupes libres.*

En reconsidérant, à la lumière de ce résultat, la problématique d’un théorème de combinaison pour les suspensions d’automorphismes de groupes hyperboliques, il apparaît que l’on a essentiellement deux cas non acylindriques à traiter : les suspensions d’automorphismes de groupes libres et les suspensions d’automorphismes de groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques fermées. Ce sont les cas traités respectivement dans [G4] et [G5]. Comme il a déjà été écrit, seul le théorème de Bestvina-Feighn les couvrait jusqu’alors. L’approche adoptée dans [G4] et [G5] diffère totalement de celle de [7]. Là où [7] fait appel à la caractérisation de l’hyperbolicité à la Gromov par l’existence d’une inégalité isopérimétrique linéaire (en fait subquadratique), on utilise la caractérisation de cette hyperbolicité par la propriété des triangles fins. Le principe général est de calculer une approximation des quasi géodésiques dans un arbre de groupes relativement hyperboliques. Si cette approche a l’inconvénient d’être apparemment plus calculatoire que l’approche de Bestvina-Feighn, elle a l’avantage de se généraliser directement au contexte de l’hyperbolicité relative.

I.2. Suspensions de groupes libres et hyperbolicité

I.2.1. Énoncé du résultat. Le théorème prouvé dans [G4] pour les groupes libres est le suivant :

THÉORÈME I.2.1. (voir [G4]) *Soit α un endomorphisme injectif du groupe libre \mathbb{F}_n . Si α est hyperbolique et d'image malnormale, alors le groupe suspension de α est hyperbolique.*

On est revenu, dans le chapitre de rappels, sur les automorphismes hyperboliques du groupe libre. Pour les endomorphismes injectifs :

DÉFINITION I.2.2. *Soit \mathbb{F}_n le groupe libre de rang n . On note $|\cdot|$ la longueur d'un élément de \mathbb{F}_n pour un système fixé de n générateurs.*

Un endomorphisme injectif de \mathbb{F}_n est hyperbolique s'il existe $\lambda > 1$ et $j \geq 1$ tels que, pour tout élément $\gamma \in \mathbb{F}_n$, parmi l'ensemble des éléments $\mu \in \mathbb{F}_n$ satisfaisant $\alpha^j(\mu) = \gamma$ ou $\alpha^j(\gamma) = \mu$, au plus un ne satisfait pas $|\mu| \geq \lambda|\gamma|$.

Comme on l'a déjà écrit, le théorème ci-dessus est implicite dans [7], mais la preuve que l'on propose ici diffère totalement de celle proposée dans [7].

I.2.2. Un (contre)-exemple instructif, les Baumslag-Solitar. Les groupes de Baumslag-Solitar, $BS(1, m) = \langle a, t; t^{-1}at = a^m \rangle$, forment une famille d'exemples très simples pour laquelle l'endomorphisme de groupe libre dont on fait la suspension a un comportement dynamique hyperbolique, sans que pourtant cette suspension le soit. Le groupe libre en question ici est le groupe $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$ et l'endomorphisme est $a \mapsto a^m$. Cet exemple va permettre de comprendre deux phénomènes clés. On prend pour simplifier $m = 2$ et on travaille dans le graphe de Cayley associé au système générateur $\{a, t\}$ introduit ci-dessus. Pour joindre l'élément 1 à l'élément a^{2^n} on peut choisir d'aller de 1 à t^{-n+1} , puis de t^{-n+1} à $t^{-n+1}a^2$, puis de revenir à $a^{2^n} = t^{-n+1}a^2t^{n-1}$ par le chemin t^{n-1} . On a ainsi réalisé un chemin c_0 de longueur $2(n-1) + 2 = 2n$. On peut aussi choisir d'aller de 1 à a , puis de a à at^{-n+1} , puis de at^{-n+1} à $at^{-n+1}a^2$, puis de là à $at^{-n+1}a^2t^{n-1} = a^{2^{n+1}}$ et enfin on termine à $a^{2^n} = a^{2^{n+1}}a^{-1}$. On a ainsi réalisé un chemin c_1 de longueur $1 + (n-1) + 2 + (n-1) + 1 = 2n + 2$. Le chemin c_0 est une géodésique tandis que c_1 est une $(1, 2)$ -quasi géodésique. Or plus n est grand, plus c_0 et c_1 s'éloignent l'un de l'autre, au sens de la distance de Hausdorff. En effet, l'élément t^{-n+1} de c_0 est à distance $n-1$ du plus proche point de c_1 . D'où la non hyperbolicité du groupe (les bigones (λ, μ) -quasi géodésiques doivent être $\delta(\lambda, \mu)$ -fins). Quels sont les phénomènes à noter ?

- (a) Un chemin le plus court pour joindre 1 à a^{2^n} , le chemin c_0 , implique une déviation dans la direction du "temps" t . C'est une conséquence de la dilatation exponentielle et cela se déduit des trivalités suivantes : l'inégalité $2t + \lambda^{-t}L < aL + b$ admet une solution en t dès que L est suffisamment grand (L représente la distance entre les deux points considérés si l'on reste au même niveau); la quantité $2t + \lambda^{-t}L$ admet un minimum en t , logarithmique en L . De tels arguments ne pourront évidemment s'appliquer directement dans le cas général : d'une part car alors on peut connaître un phénomène de re-dilatation avant d'avoir mené la contraction à son terme; mais

surtout d'autre part car on a ici une dilatation *uniforme* de facteur $\lambda > 1$ qui n'existe évidemment pas telle quelle dans le cas général (on a alors seulement une dilatation d'intervalles suffisamment grands, sans contrôle sur ceux de taille petite).

- (b) La non hyperbolicité vient d'une contraction exponentielle dans deux directions différentes : celle de la classe à droite $\text{Im}(\alpha)$, et celle de la classe à gauche $a \text{Im}(\alpha)$. Ces deux classes se chevauchent le long de longues géodésiques dans \mathbb{Z} . L'hypothèse de malnormalité, qui n'est pas satisfaite ici, interdit ces longs chevauchements.

I.2.3. La métrique télescopique. On reprend ici les notations du théorème I.2.1. Pour simplifier, on va supposer que α est un automorphisme du groupe libre \mathbb{F}_n .

Soit (ψ, Γ) un représentant topologique de α . Le revêtement cyclique de la suspension de (ψ, Γ) est l'espace obtenu à partir de \mathbb{Z} copies du cylindre $\mathcal{C}_i = \Gamma \times [0, 1]$ en recollant le $\Gamma \times \{1\}$ du cylindre \mathcal{C}_i au $\Gamma \times \{0\}$ du cylindre \mathcal{C}_{i+1} via l'application ψ . Soit T le revêtement universel de Γ et soit $\tilde{\psi}$ un relevé de ψ sur T . Le revêtement universel \tilde{X} de la suspension de (ψ, Γ) se construit en recollant \mathbb{Z} copies \mathbf{T}_i de $T \times [0, 1]$: l'arbre $T \times \{1\}$ de \mathbf{T}_i est identifié à l'arbre $T \times \{0\}$ de \mathbf{T}_{i+1} via l'application $\tilde{\psi}$.

Cet espace \tilde{X} porte donc un semi-flot non singulier $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ transverse à un feuilletage en arbres : les arbres sont des copies de T ; les orbites du semi-flot sont des recollements d'intervalles, où deux intervalles $\{x\} \times [0, 1]$, $\{y\} \times [0, 1]$, appartenant respectivement à deux copies consécutives \mathbf{T}_i et \mathbf{T}_{i+1} de $T \times [0, 1]$, sont joints par leurs extrémités $\{x\} \times \{1\}$ et $\{y\} \times \{0\}$ si $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(y)$.

On a une projection $\pi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que chaque pré-image $\pi^{-1}(t)$, une *strate*, soit un arbre $T \times \{t\}$. Si on munit Γ d'une métrique, par exemple en rendant chaque arête isométrique à $[0, 1]$, elle se relève en une métrique sur T : on nommera *distance horizontale*, et on notera d_{hor} , cette métrique sur les $T \times \{t\}$. Si deux points ne sont pas dans une même strate, leur distance horizontale est infinie. D'autre part, l'application π réalise une semi-conjugaison entre le semi-flot (σ_t) et le semi-flot sur \mathbb{R} donné par les translations de réel positif. D'où une distance naturelle sur les segments d'orbites du semi-flot, celle de \mathbb{R} . Chaque orbite du semi-flot est un arbre orienté qui se projette surjectivement sur \mathbb{R} par l'application π . Deux points quelconques dans une orbite sont joints par une concaténation finie de segments d'orbites. On définit la distance entre ces deux points comme la somme des longueurs de ces segments d'orbites : on obtient ainsi une *distance verticale*, notée d_{vert} . La distance verticale est infinie pour deux points n'appartenant pas à une même orbite.

DÉFINITION I.2.3. *Un chemin télescopique est une concaténation finie de chemins non triviaux contenus dans des orbites, dits chemins verticaux, et de chemins contenus dans des strates, dits chemins horizontaux.*

La longueur télescopique d'un chemin télescopique est la somme des longueurs horizontales et verticales de ses sous-chemins maximaux horizontaux et verticaux.

La distance télescopique $d_{tel}(x, y)$ entre deux points x, y de \tilde{X} est l'infimum des longueurs des chemins télescopiques joignant x à y .

Le groupe suspension agit isométriquement, proprement discontinûment (et cocompactement) sur \tilde{X} muni de cette métrique télescopique. Muni d'un système de générateurs fini, il est donc quasi isométrique à (\tilde{X}, d_{tel}) . Pour prouver son hyperbolicité, il suffit ainsi de prouver la Gromov hyperbolicité de (\tilde{X}, d_{tel}) lorsque l'automorphisme α est hyperbolique. Pour cela, on traduit cette condition d'hyperbolicité de l'endomorphisme au niveau du semi-flot.

Dans le cas général d'une HNN-extension ascendante, c'est à dire lorsque α est seulement un endomorphisme injectif, on a les mêmes définitions. Mais la description de l'espace est un peu plus compliquée, car on a un espace non connexe au dessus de chaque point de \mathbb{R} .

Nous détaillons plus à la section suivante le cas des suspensions de surfaces. La principale différence avec le cas considéré là-bas est qu'ici un semi-flot accompagne la suspension et non un flot. La projection sur une strate, le long du semi-flot, d'une géodésique horizontale n'est pas, en général, une géodésique horizontale. D'autre part, deux chemins horizontaux peuvent intersecter une même orbite sans que leurs points d'intersection avec cette orbite soient dans le futur ou le passé l'un de l'autre. Car, en général, l'orbite d'un point sous le semi-flot contient strictement l'union des orbites future et passée de ce point. Tout ceci se traduit par l'existence d'*annulations*, c'est à dire de géodésiques horizontales connectant deux points d'une même orbite. La principale difficulté, du moins avec l'approche de [G4] car [G6] propose une autre approche peut-être plus conceptuelle, est donc de sortir les chemins considérés des annulations. Pour résumer, on ne peut pas utiliser si facilement la 0-hyperbolicité des strates qui rend pourtant, a priori, le problème plus simple que pour les surfaces.

I.3. Hyperbolicité relative des suspensions d'homéomorphismes de surfaces

I.3.1. Énoncé du résultat.

DÉFINITION I.3.1. Soit $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ une famille de sous-groupes d'un groupe G . Soit α un endomorphisme de G .

On dit que α préserve \mathcal{H} à conjugaison près si, pour chaque $k = 1, \dots, r$, il existe $\sigma(k) \in \{1, \dots, r\}$ et $h_k \in G$ tels que :

- $\alpha(H_k) = h_k^{-1} H_{\sigma(k)} h_k$,
- l'application $k \mapsto \sigma(k)$ est une permutation de $\{1, \dots, r\}$.

On dit que α fixe \mathcal{H} à conjugaison près s'il existe pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, un élément h_k de G tels que $\alpha(H_k) = h_k^{-1} H_k h_k$.

Avec les notations ci-dessus, si α préserve \mathcal{H} à conjugaison près, il existe un entier $N \geq 1$ tel que α^N fixe \mathcal{H} à conjugaison près.

DÉFINITION I.3.2. Soit $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_r\}$ une famille de sous-groupes d'un groupe G . Soit α un endomorphisme de G qui fixe \mathcal{H} à conjugaison près.

La suspension de la famille \mathcal{H} par α est la collection de sous-groupes $H_k \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, r$.

Le théorème énoncé ci-dessous est moins général que celui réellement prouvé dans [G5]. La JSJ-décomposition [13] nous permet, en effet, d'étendre très facilement les résultats présentés ici au cas des suspensions de groupes hyperboliques librement indécomposables et sans torsion.

Le prix à payer est une formulation très lourde, inconvénient habituel de tout travail faisant appel à ces résultats de JSJ-décomposition (et plus généralement aux graphes de groupes).

DÉFINITION I.3.3. *Soit S une surface compacte et soit h un homéomorphisme de S .*

Une famille canonique invariante pour h , notée $\mathcal{F}(h)$, est une famille maximale de sous-groupes du groupe fondamental de S formée des trois types de sous-groupes suivants :

- (a) *les sous-groupes cycliques associés aux courbes de bord,*
- (b) *les sous-groupes associés aux sous-surfaces maximales sans composantes pseudo-Anosov,*
- (c) *les sous-groupes cycliques associés aux courbes de réduction, qui ne sont pas déjà contenus dans les sous-groupes du type (b).*

Une famille canonique invariante est bien définie à conjugaison près.

THÉORÈME I.3.4. *(voir [G5]) Soit S une surface compacte et soit h un homéomorphisme de S . Soit $\mathcal{F}(h)$ une famille canonique invariante pour h (voir définition I.3.3).*

Le groupe fondamental de la suspension de (h, S) est faiblement hyperbolique relativement à la famille $\mathcal{F}(h)$.

Soit $N \geq 1$ tel que $h_{\#}^N$ fixe $\mathcal{F}(h)$ à conjugaison près. Le groupe fondamental de la suspension de (h^N, S) est fortement hyperbolique relativement à la suspension de $\mathcal{F}(h)$ par $h_{\#}^N$.

Pour l’hyperbolicité relative forte, on a ici besoin de substituer h^N à h du fait de la définition donnée de “suspension d’une famille de sous-groupes”. À la différence des articles [G5] et [G6], on garde dans cette suspension des sous-groupes conjugués par h . Ceci interdit au groupe fondamental de la suspension de (h, S) d’être fortement hyperbolique relativement à la suspension de $\mathcal{F}(h)$. En effet, soit $h_{\#}$ l’automorphisme externe induit par h sur le groupe fondamental de S et soit t le générateur du sous-groupe \mathbb{Z} du groupe suspension, agissant par $h_{\#}$ sur le groupe fondamental de S . Alors le groupe suspension contient des sous-groupes $H_j, H_k, k \neq j$, avec $t^{-1}H_jt \cap H_k \neq \{1\}$. La propriété de pénétration bornée, qui requiert la malnormalité (il n’y a pas de torsion dans les groupes considérés ici), n’est donc pas satisfaite.

I.3.2. Schéma de preuve. La preuve est techniquement plus facile que dans le cas des groupes libres, ce qui permet de la généraliser immédiatement à l’hyperbolicité relative. La méthode générale est la suivante :

- (a) on traite le cas de l’hyperbolicité à la Gromov des suspensions de pseudo-Anosov de surfaces fermées ;
- (b) on étend directement le cas précédent aux surfaces à bord grâce à l’existence de la métrique horizontale associée aux mesures transverses des feuilletages invariants du pseudo-Anosov : on obtient ainsi l’hyperbolicité relative des suspensions de pseudo-Anosov de surfaces à bord.
- (c) le cas d’une suspension quelconque revient à la suspension d’un arbre de groupes telle que :
 - les groupes de sommets de l’arbre sont les groupes de (sous)-surfaces associées à la famille $\mathcal{F}(h)$,

- les groupes d'arêtes sont des groupes cycliques associés aux courbes de bord de la surface et aux courbes de réduction,
- l'application de suspension envoie sommet sur sommet et arête sur arête.

On explicite le point (a). Le revêtement universel de la suspension de (h, S) admet une structure similaire à celle apparaissant dans le cas des groupes libres, si bien que la terminologie introduite précédemment reste valable ici. Il est cependant important de noter :

- d'une part que les strates ne sont plus des arbres mais des disques de Poincaré,
- d'autre part qu'un véritable flot s'est substitué au semi-flot.

Horizontalement, c'est à dire dans les strates, on n'utilise pas la métrique hyperbolique :

DÉFINITION I.3.5. Soit \mathbb{D}^2 le disque de Poincaré équipé de deux feuilletages singuliers (\mathcal{F}_u, μ_s) et (\mathcal{F}_s, μ_u) , transverses l'un à l'autre, et transversalement mesurés. Si x, y sont deux points de \mathbb{D}^2 , on note Γ_{xy} l'ensemble des chemins de x à y dans \mathbb{D}^2 .

La distance $d_u(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} \int_{\gamma} |d\mu_u|$ (resp. $d_s(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} \int_{\gamma} |d\mu_s|$) est la distance instable (resp. distance stable) entre x et y .

La distance $d_{\mathcal{F}}(x, y) = d_u(x, y) + d_s(x, y)$ est la distance feuilletée entre x et y .

On parlera de façon similaire de longueurs feuilletées, stables et instables.

Le deuxième point du lemme ci-dessous va permettre de travailler comme si l'on était dans un arbre, et non dans un espace δ -hyperbolique quelconque. Le troisième point est la clé de la simplification de la preuve par rapport au cas des suspensions de groupes libres. Il permet d'obtenir une géodésique horizontale par projection sur une strate, le long du flot, d'une géodésique télescopique ou horizontale. Le quatrième point nous donne le phénomène de dilatation - contraction indispensable à toute la démarche.

LEMME I.3.6. Avec les notations précédentes, supposons que (\mathcal{F}_u, μ_s) et (\mathcal{F}_s, μ_u) soient les relevés des feuilletages invariants d'un pseudo-Anosov. On note h un relevé de ce pseudo-Anosov, laissant invariant (\mathcal{F}_u, μ_s) et (\mathcal{F}_s, μ_u) . Alors :

- L'espace $(\mathbb{D}^2, d_{\mathcal{F}})$ est un espace δ -hyperbolique.
- Trois points quelconques de \mathbb{D}^2 sont les sommets d'un tripode géodésique pour la distance feuilletée.
- Pour la distance feuilletée, l'image par h d'une géodésique est une géodésique.
- Il existe $\lambda > 1$ et $N \geq 1$ tels que la longueur feuilletée de tout chemin est dilatée du facteur $\lambda > 1$ soit par N itérations de h , soit par N itérations de h^{-1} .

DÉFINITION I.3.7. Avec les notations précédentes, soit w une géodésique horizontale.

Une géodésique w -relative est un chemin télescopique dans \tilde{X} minimisant la longueur télescopique parmi tous les chemins télescopiques de \tilde{X} qui se projettent sur w le long du flot.

Un bigone géodésique w -relatif est un bigone de \tilde{X} dont les côtés sont des géodésiques w -relatives.

Dans une première étape, on prouve :

PROPOSITION I.3.8. *Il existe une constante $\rho \geq 0$ telle que, pour toute géodésique horizontale w , tout bigone géodésique w -relatif est ρ -fin.*

Dans une deuxième étape :

PROPOSITION I.3.9. *Il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que tout bigone géodésique de (\tilde{X}, d_{tel}) est contenu dans le μ -voisinage télescopique d'un bigone géodésique w -relatif, quelle que soit la géodésique horizontale w considérée joignant les orbites des extrémités du bigone.*

On a vu l'existence d'un tripode géodésique horizontal, de côtés notés w_1, w_2, w_3 , entre trois orbites données. La proposition I.3.9 permet d'en déduire que tout triangle géodésique de \tilde{X} est proche d'un triangle formé de géodésiques w_i -relatives. On conclut grâce à la finesse des bigones géodésiques w_i -relatifs donnée par la proposition I.3.8.

Pour étendre cette preuve au cas des surfaces à bord, il suffit de modifier la métrique horizontale en une pseudo-métrique en déclarant les courbes de bord comme des feuilles à la fois stables et instables. Ainsi, leur diamètre est nul. Une fois cette définition établie, tous les arguments exposés ci-dessus fonctionnent de la même façon. Il est en effet clair que le groupe fondamental de la surface à bord, un groupe libre, muni de la métrique relative associée aux sous-groupes cycliques des courbes de bords, est quasi isométrique au disque muni de la pseudo-métrique indiquée.

I.4. Hyperbolicité relative des suspensions d'automorphismes de groupes hyperboliques

L'objectif de la Note [G12] était de donner une preuve courte pour l'hyperbolisation relative des suspensions de groupes hyperboliques, en utilisant la JSJ-décomposition de [13]. Celle-ci permet, en effet, de se ramener essentiellement au cas du groupe libre. On va énoncer un cas particulier de [G12]. En contrepartie de l'utilisation d'une machinerie lourde comme la JSJ-décomposition, et à la différence de [G12], la preuve du théorème donné plus bas est immédiate à partir des résultats précédents.

Le lemme préliminaire ci-dessous est classique. Si \mathcal{G} est un graphe de groupes dont les groupes d'arêtes sont triviaux, le *graphe combinatoire associé* à \mathcal{G} est le graphe Γ obtenu à partir de \mathcal{G} en substituant le groupe trivial à chaque groupe de sommet. Le groupe fondamental de Γ est un groupe libre.

LEMME I.4.1. *Soit G un groupe hyperbolique sans torsion. Alors G est le groupe fondamental d'un graphe de groupes \mathcal{G} tel que :*

- (a) *les groupes de sommets de \mathcal{G} , notés G_i , sont des groupes librement indécomposables, hyperboliques et sans torsion ;*
- (b) *les groupes d'arêtes sont triviaux ;*
- (c) *si α est un automorphisme externe de G , si Γ est le graphe combinatoire associé à \mathcal{G} , alors :*
 - *α induit une bijection sur l'ensemble des sommets de \mathcal{G} ;*

- si $n \geq 1$ est tel que l'action de α^n sur \mathcal{G} fixe chaque sommet, alors α^n induit un automorphisme, noté α_i^n , sur chaque groupe de sommet G_i ;
- α induit un automorphisme externe, noté $\alpha_{\#}^{\Gamma}$, sur le groupe fondamental de Γ (un groupe libre).

Par ailleurs, rappelons la

DÉFINITION I.4.2. Soit G un groupe muni d'une fonction longueur sur les classes de conjugaisons notée $|\cdot|$. Soit α un automorphisme de G .

Un élément $\gamma \in G$ est à croissance linéaire sous α s'il existe une fonction linéaire $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$|\alpha^n(\gamma)| \leq f(n)|\gamma|.$$

Un sous-groupe de G est un sous-groupe à croissance linéaire sous α s'il existe une fonction linéaire satisfaisant la propriété ci-dessus pour tout élément γ du sous-groupe.

Notons que, si H est un sous-groupe à croissance linéaire sous α , alors, bien sûr, H est aussi un sous-groupe à croissance linéaire sous une puissance quelconque de α , ou même de tout automorphisme dans la même classe d'automorphisme externe. On peut maintenant énoncer le résultat de cette section :

THÉORÈME I.4.3. Soit G un groupe hyperbolique sans torsion. Soit \mathcal{G} le graphe de groupes donné par le lemme I.4.1. On note G_i les groupes de sommet de \mathcal{G} .

Soit α un automorphisme de G . Soit $n \geq 1$ tel que l'action de α^n sur \mathcal{G} fixe chaque sommet. Soit α_i^n l'automorphisme induit sur le groupe de sommet G_i . On note $\mathcal{F}_i(\alpha)$ une famille maximale de sous-groupes maximaux de G_i à croissance linéaire sous α_i^n . Soit $\mathcal{F}(\alpha)$ la famille de sous-groupes de G qui est l'union des $\mathcal{F}_i(\alpha)$. Il existe $N \geq 1$ tel que α^N fixe $\mathcal{F}(\alpha)$ à conjugaison près.

Soit Γ le graphe combinatoire associé à \mathcal{G} , et soit $\alpha_{\#}^{\Gamma}$ l'automorphisme induit par α sur le groupe fondamental de Γ .

Si $\alpha_{\#}^{\Gamma}$ est un automorphisme hyperbolique, alors :

- le groupe suspension de α est faiblement hyperbolique relativement à $\mathcal{F}(\alpha)$;
- le groupe suspension de α^N est fortement hyperbolique relativement à la suspension de $\mathcal{F}(\alpha)$ par α^N .

Ce théorème est une généralisation directe du théorème donné pour les suspensions d'homéomorphismes de surfaces. En effet, la famille de sous-groupes donnée dans ce cadre est une famille maximale de sous-groupes maximaux à croissance linéaire sous l'automorphisme induit. On aurait pu décrire dans le théorème ci-dessus, comme on l'a fait dans le contexte des surfaces, la collection de sous-groupes à inclure dans la partie relative. Cependant, cela nous aurait demandé d'explicitier plus en détail la JSJ-décomposition, et aurait nécessité une formulation encore plus fastidieuse.

I.5. Hyperbolicité relative des suspensions d'automorphismes de groupes relativement hyperboliques

DÉFINITION I.5.1. (voir [G6]) Soient $G = \langle S \rangle$ un groupe de système générateur S et \mathcal{H} une collection de sous-groupes de G . Un automorphisme α de G est hyperbolique relativement à \mathcal{H} si α préserve \mathcal{H} à conjugaison près et s'il existe $\lambda > 1$, $N \geq 1$ tels que pour tous $w \in G - \bigcup_{H_k \in \mathcal{H}} H_k$:

$$\lambda \|w\|_{\mathcal{H}} \leq \max(\|\alpha^N(w)\|_{\mathcal{H}}, \|\alpha^{-N}(w)\|_{\mathcal{H}}),$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ désigne la métrique du mot associée au système générateur qui est l'union de S avec l'ensemble des éléments de G appartenant aux sous-groupes de \mathcal{H} .

Lorsque \mathcal{H} est vide, on retrouve la définition d'automorphisme hyperbolique [43]. Le lemme suivant illumine le lien entre le théorème I.3.4 et les résultats à venir :

LEMME I.5.2. Tout homéomorphisme h de surface compacte induit un automorphisme hyperbolique relativement à une famille canonique invariante $\mathcal{F}(h)$ (voir définition I.3.3).

Indication de preuve : La preuve reprend les arguments employés pour démontrer qu'un pseudo-Anosov h de surface compacte sans bord S induit un automorphisme hyperbolique sur le groupe fondamental de S , voir la preuve du lemme 5.9. Supposons maintenant que la surface a du bord : on modifie la métrique introduite là-bas en considérant que les courbes de bord appartiennent aux deux feuilletages. Leur diamètre est donc nul. L'homéomorphisme induit toujours une quasi isométrie pour la nouvelle métrique, et tous les arguments s'appliquent. On a simplement un troisième type de chemins, de diamètre nul, préservés. Le cas général se déduit immédiatement, avec les mêmes arguments. Il est cependant important de noter que l'on a une longueur minimale sur tout morceau traversant une composante pseudo-Anosov (deux sous-surfaces de la partie relative ne peuvent être arbitrairement proches). \square

Le théorème pour les suspensions de groupes relativement hyperboliques s'énonce comme suit :

THÉORÈME I.5.3. (voir [G6]) Soit G un groupe faiblement hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} . Si $\alpha \in \text{Aut}(G)$ est hyperbolique relativement à \mathcal{H} alors la suspension de G par α est faiblement hyperbolique relativement à \mathcal{H} . C'est en particulier vrai si G est un groupe hyperbolique et \mathcal{H} est quasi convexe dans G .

Soit G un groupe fortement hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} . Soit $\alpha \in \text{Aut}(G)$ un automorphisme de G , hyperbolique relativement à \mathcal{H} . Soit $N \geq 1$ tel que α^N fixe \mathcal{H} à conjugaison près. Alors la suspension de G par α^N est fortement hyperbolique relativement à la suspension de \mathcal{H} par α^N . C'est en particulier vrai si G est un groupe hyperbolique et \mathcal{H} est quasi convexe et presque malnormale dans G .

Rappelons qu'un sous-groupe H d'un groupe hyperbolique G est *quasi convexe* dans G s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que les géodésiques de G joignant des points de H sont

contenues dans le C -voisinage de H . Le lien entre la première et la deuxième partie du théorème tient dans la proposition suivante, maintenant classique :

PROPOSITION I.5.4. *Un groupe hyperbolique G est faiblement (resp. fortement) hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} si et seulement si \mathcal{H} est quasi convexe (resp. quasi convexe et presque malnormale) dans G .*

I.6. Vers un théorème de combinaison général

Dans [G6], on prouve un théorème de combinaison complet pour les groupes relativement hyperboliques. On résout ainsi l'un des problèmes ouverts, Q. 1.13 page 3, de la liste de M. Bestvina [6]. La formulation de ce théorème est assez lourde. C'est pourquoi on a préféré exposer ici un cas particulier emblématique : celui des extensions de groupes relativement hyperboliques par des groupes libres. C'est le cas le plus sophistiqué de produit semi-direct que peut traiter notre théorème de combinaison. Il en est de même, dans le cadre hyperbolique, pour le théorème de Bestvina-Feighn. Pour aller plus loin, on doit écrire un théorème de combinaison pour les 2-complexes de groupes. Pour des exemples ou caractérisations d'extensions de groupes hyperboliques par des groupes libres, on pourra se référer à [69] ou [48].

I.6.1. Énoncés des résultats.

On va tout d'abord présenter un résultat traitant de HNN-extensions ascendantes de groupes relativement hyperboliques, i.e. de suspensions d'endomorphismes injectifs de groupes relativement hyperboliques.

La définition d'un endomorphisme injectif relativement hyperbolique est une adaptation directe de la définition d'un automorphisme relativement hyperbolique. Cette adaptation est la même que pour passer des automorphismes hyperboliques aux endomorphismes injectifs hyperboliques.

Par ailleurs, on dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *presque malnormal relativement à une famille \mathcal{H}* s'il existe une borne supérieure uniforme sur la longueur \mathcal{H} -relative des éléments dans l'intersection $g^{-1}Hg \cap H$, pour tout $g \notin H$.

THÉORÈME I.6.1. (voir [G6]) *Soit G un groupe fortement hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} . Soit α un endomorphisme injectif de G , qui est hyperbolique relativement à \mathcal{H} , et dont l'image est presque malnormale relativement à \mathcal{H} . Supposons que α fixe \mathcal{H} à conjugaison près. Alors le groupe suspension de G par α est fortement hyperbolique relativement à la suspension de \mathcal{H} par α .*

Une particularité de ce théorème est qu'il ne traite pas de l'hyperbolicité relative faible. C'est parce qu'il est faux dans ce contexte. En effet, la presque malnormalité relative n'est pas, dans le cadre de l'hyperbolicité relative faible, une condition suffisante pouvant se substituer à la condition de malnormalité dans le cadre de l'hyperbolicité à la Gromov usuelle. On renvoie le lecteur à l'article [G6].

Comme on l'a dit plus haut, le principal résultat exposé ici est celui de l'extension d'un groupe relativement hyperbolique par un groupe libre.

DÉFINITION I.6.2. (voir [G6]) Soit G un groupe et soit \mathcal{H} une collection de sous-groupes de G . Un groupe libre $\mathbb{F}_n = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ d'automorphismes de G est un groupe d'automorphismes uniformément hyperboliques relativement à \mathcal{H} si les α_i préservent \mathcal{H} à conjugaison près et s'il existe $\lambda > 1, N \geq 1$ tels que, pour tous $w \in G - \bigcup_{H_k \in \mathcal{H}} H_k$, l'inégalité

$$\lambda \|w\|_{\mathcal{H}} \leq \|\alpha(w)\|_{\mathcal{H}}$$

n'est pas satisfaite par au plus un automorphisme α de longueur N dans les générateurs α_i .

Avec les notations ci-dessus, supposons que chaque α_i fixe \mathcal{H} à conjugaison près. On définit alors l'extension de \mathcal{H} par $\mathbb{F}_n = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ de la même façon que l'on avait défini la suspension d'une famille de sous-groupes par un automorphisme, voir la définition I.3.2.

THÉORÈME I.6.3. (voir [G6]) Soit G un groupe faiblement hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} . Soit $\mathcal{A} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ un groupe libre d'automorphismes de G , uniformément hyperboliques relativement à \mathcal{H} . Alors $G \rtimes_{\mathcal{A}} \mathbb{F}_n$ est faiblement hyperbolique relativement à \mathcal{H} .

Soit G un groupe fortement hyperbolique relativement à une famille finie de sous-groupes finiment engendrés \mathcal{H} . Soit $\mathcal{A} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ un groupe libre d'automorphismes de G , uniformément hyperboliques relativement à \mathcal{H} . Soient N_1, \dots, N_n des entiers tels que $\alpha_i^{N_i}$ fixe \mathcal{H} à conjugaison près, pour $i = 1, \dots, n$. Soit \mathcal{A}' le sous-groupe de \mathcal{A} engendré par les $\alpha_i^{N_i}$. Alors $G \rtimes_{\mathcal{A}'} \mathbb{F}_n$ est fortement hyperbolique relativement à l'extension de \mathcal{H} par \mathcal{A}' .

Pour illustrer ce théorème, on a la

PROPOSITION I.6.4. Soit S une surface compacte à bord. On se donne n homéomorphismes pseudo-Anosov h_1, \dots, h_n engendrant un groupe libre et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les automorphismes induits sur le groupe fondamental de S par h_1, \dots, h_n . Alors il existe k_1, \dots, k_n tel que $\langle \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} \rangle$ soit un groupe d'automorphismes uniformément hyperboliques relativement à la famille des sous-groupes cycliques associés aux courbes de bord.

Indication de preuve : On considère les feuilletages invariants $(\mathcal{F}_u^i, \mu_u^i)$ et $(\mathcal{F}_s^i, \mu_s^i)$ des pseudo-Anosov α_i . On note $|\cdot|^i$ les métriques associées, comme dans la preuve du lemme I.5.2. Si γ désigne un élément du groupe fondamental de S , on note $C^i(\gamma)$ des géodésiques représentant

γ pour chacune de ces métriques $|\cdot|^i$. On pose $\|\gamma\| = \sum_{i=1}^n |C^i(\gamma)|^i$. La métrique $\|\cdot\|$ est quasi

isométrique à la métrique du mot pour un système générateur $S \cup \mathcal{H}$ (S est le système générateur usuel, \mathcal{H} la collection de sous-groupes cycliques engendrés par les courbes de bord), en effet les éléments des sous-groupes cycliques engendrés par les courbes de bord sont de longueur nulle. La proposition repose sur le fait suivant : il existe $r_i > 1$ et $A_i(r) \geq 1$ telle que, pour tout γ hors de \mathcal{H} , si $|C^i(\gamma)|^i \geq r_i$ et si le rapport entre $|C^i(\gamma)|_u^i$ et $|C^i(\gamma)|_s^i$ est plus grand que $r \geq r_i$ ou plus petit que $\frac{1}{r}$ alors, pour tout $j \neq i$, le rapport entre $|C^j(\gamma)|_s^j$ et $|C^j(\gamma)|_u^j$ est compris entre $\frac{1}{A_i(r)}$ et $A_i(r)$. Considérons maintenant un élément γ quelconque du groupe fondamental, hors de \mathcal{H} . Si, pour chaque $C^i(\gamma)$, le rapport entre $|C^i(\gamma)|_u^i$ et $|C^i(\gamma)|_s^i$ est compris entre $\frac{1}{a}$ et a (a un

réel supérieur à 1 choisi pour le moment arbitrairement), chaque α_i dilate $|C^i(\gamma)|^i$ d'un facteur $\lambda_i > 1$ après $k_i(a)$ itérations positives *et* négatives, c'est dans la preuve du lemme I.5.2. On a ainsi la dilatation de γ dans toutes les directions. Supposons maintenant qu'un $C^j(\gamma)$ ne satisfasse pas à l'hypothèse ci-dessus. Quitte à choisir a plus grand, on peut supposer $|C^j(\gamma)|^j \geq r_j$. En choisissant $a > \max_i \{r_i\}$, on peut faire appel à notre assertion et, après avoir substitué les α_i par les puissances convenables, on obtient la dilatation de γ dans toutes les directions sauf au plus une. D'où la proposition. \square

L'intérêt de cette proposition est que les groupes libres de pseudo-Anosov abondent. Mosher [69] prouve ce résultat dans le cas absolu, pour les surfaces fermées.

I.6.2. Schéma de preuve. On va seulement évoquer le cas des extensions de groupes relativement hyperboliques par des groupes libres. La notion de *corridor*, essentielle à la preuve, est en effet aisée à formuler dans ce cadre. C'est loin d'être vrai pour les HNN-extensions ascendantes traitées par le théorème I.6.1. Beaucoup d'autres notions, comme celle d'*orbite*, sont aussi plus claires que dans le cadre général de [G6]. Rappelons en effet que cet article donne un théorème de combinaison général, et est en fait même énoncé pour des objets un peu plus généraux que les graphes de groupes.

Les notations utilisées plus bas sont celles introduites dans le théorème I.6.3. Pour simplifier, on suppose que \mathcal{A} fixe \mathcal{H} à conjugaison près.

Soit $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ le graphe de Cayley de G relatif à \mathcal{H} . On nomme $f_i: \Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \rightarrow \Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ une application continue, linéaire par morceaux, envoyant sommet sur sommet, qui réalise l'automorphisme a_i sur $\Gamma_S(G) \subset \Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$, et étend naturellement cet automorphisme sur le graphe relatif. Rappelons qu'un graphe de Cayley relatif $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ contient des sommets exceptionnels : le sommet exceptionnel $v(gH_k)$ correspond à la classe à droite de g suivant le sous-groupe H_k , où H_k est l'un des sous-groupes contenus dans la famille \mathcal{H} . Chaque générateur a_i de \mathcal{A} fixe H_k à conjugaison près. C'est à dire qu'il existe $h_{ik} \in G$ avec $a_i(H_k) = h_{ik}^{-1}H_k h_{ik}$. L'application f_i définie précédemment envoie ainsi le sommet exceptionnel $v(gH_k)$ sur le sommet exceptionnel $v(a_i(g)h_{ik}^{-1}H_k)$. Par ailleurs, si x est le sommet de $\Gamma_S(G) \subset \Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ associé à l'élément g de G , alors $f_i(x)$ est le sommet de $\Gamma_S(G) \subset \Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ associé à l'élément $a_i(g)$ de G . Puisque la famille \mathcal{H} est finie et que G est finiment engendré, il existe des constantes $K \geq 1$, $L \geq 0$ telles que les f_i sont des (K, L) -quasi isométries.

Le graphe de groupes pour $G \rtimes_{\mathcal{A}} \mathbb{F}_n$ est le bouquet de n cercles. Le groupe de l'unique sommet, et le groupe de chaque arête, est le groupe G . Les arêtes orientées seront nommées e_i : le groupe G de l'arête e_i s'envoie par l'identité dans le groupe G du sommet initial de e_i , et par l'automorphisme a_i dans le groupe G du sommet terminal de e_i . On considère maintenant le revêtement universel, noté T , de ce graphe de groupes. On construit un espace topologique, noté \tilde{X} , muni d'une projection naturelle $\pi: \tilde{X} \rightarrow T$, de la façon décrite ci-dessous.

- pour chaque sommet v de T , on a une copie de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$;
- pour chaque arête orientée \tilde{e}_i de T , on a une copie de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times [0, 1]$;
soit \tilde{e}_i une arête orientée de T , de sommet initial v et de sommet terminal w :

- le graphe $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ associé à v est identifié au graphe $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{0\}$ de la copie de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times [0, 1]$ associée à \tilde{e}_i ;
- cette copie est recollée, le long de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{1\}$ et par l'application f_i , au graphe $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G)$ associé à w .

L'application $\pi: \tilde{X} \rightarrow T$ est l'application continue qui identifie chaque $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{t\}$ à un point de T , de telle façon que :

- chaque $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{0\}$ et chaque $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{1\}$ a pour image un sommet de T ;
- une fois chaque arête \tilde{e}_i paramétrée par l'intervalle $(0, 1)$, chaque $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{t\}$ de chaque copie de $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times (0, 1)$ a pour image le point de paramètre t dans l'arête \tilde{e}_i associée.

Il s'ensuit que l'on a une notion de *strate* naturelle : ce sont les $\Gamma_S^{\mathcal{H}}(G) \times \{t\}$. La notion d'*orbite* l'est tout autant. On va cependant préciser quelque peu :

DÉFINITION I.6.5. *Avec les notations ci-dessus :*

Une orbite de sommets dans \tilde{X} est l'image d'une section continue $\sigma: T \rightarrow \tilde{X}$ de π satisfaisant la propriété suivante :

Soit \tilde{e}_i une arête de T , de sommet initial v et de sommet terminal w . Alors $\sigma(\tilde{e}_i)$ connecte un sommet x de $\pi^{-1}(v)$ au sommet $f_i(x)$ de $\pi^{-1}(w)$ et l'intérieur de $\sigma(\tilde{e}_i)$ coïncide avec le segment $\{x\} \times (0, 1)$ de \tilde{X} .

Une orbite exceptionnelle dans \tilde{X} est une orbite de sommets exceptionnels.

Puisque l'on a des strates et des orbites, comme dans le cas des semi-flots et des flots, on peut définir les *distances horizontales*, *distances verticales* et *distances télescopiques*.

REMARQUE I.6.6. *À la projection $\pi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ des précédentes sections, on a substitué une projection $\pi: \tilde{X} \rightarrow T$, où T est un arbre.*

Il est facile de voir que le groupe $G \rtimes_{\mathcal{A}} \mathbb{F}_n$, muni de la métrique relative associée à la famille \mathcal{H} , est quasi isométrique à l'espace \tilde{X} construit ci-dessus, muni de la distance télescopique.

On peut alors donner la définition essentielle suivante :

DÉFINITION I.6.7. *Soient σ, σ' deux orbites de sommets. Un corridor $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ est une union de géodésiques horizontales, exactement une dans chaque strate, connectant σ à σ' .*

Toute paire d'orbites de sommets borde un corridor.

LEMME I.6.8. *Il existe $\lambda > 1$, et $M, N \geq 0$ tels que, si $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ est un corridor entre deux orbites de sommets σ, σ' , alors :*

(a) *pour tout point $t_0 \in T$ tel que $d_{hor}(\sigma(t_0), \sigma'(t_0)) \geq M$, l'inégalité*

$$\lambda d_{hor}(\sigma(t), \sigma'(t)) \leq d_{hor}(\sigma(t_0), \sigma'(t_0))$$

est vraie pour tout $t \in T$ avec $d_T(t, t_0) = N$, sauf au plus un ;

(b) *si, de plus, σ et σ' sont des orbites exceptionnelles, alors la même conclusion tient pour tout $t_0 \in T$.*

Par ailleurs, on prouve la “quasi convexité” des corridors :

PROPOSITION I.6.9. *Soient $a \geq 1$, $b \geq 0$ deux constantes réelles. Il existe $C(a, b) \geq 0$ telle que, si g est une (a, b) -quasi géodésique allant d'une orbite de sommets σ à une orbite de sommets σ' , si $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ est un corridor entre σ et σ' , alors g est contenue dans le $C(a, b)$ -voisinage horizontal de $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$.*

On peut alors prouver le théorème I.6.3 dans le contexte de l'hyperbolicité relative faible. On considère un bigone (a, b) -quasi géodésique \mathcal{B} entre deux sommets de \tilde{X} . Soient σ, σ' les orbites de ces sommets. La proposition I.6.9 nous donne un voisinage de taille bornée d'un corridor $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ et contenant \mathcal{B} . Le point (a) du lemme I.6.8 nous permet alors d'approcher, comme on l'a fait pour les surfaces et groupes libres, les deux côtés du bigone par un système d'horizontales suffisamment longues dans le corridor, dilatées exponentiellement dans toutes les directions après un temps fini. C'est bien à nouveau l'argument clé de dilatation et contraction exponentielle, explicité pour les Baumslag-Solitar, que l'on retrouve. On cache ici une difficulté technique : un corridor n'est pas un sous-espace géodésique de \tilde{X} , pour la métrique télescopique. Cependant, les applications de recollement f_i sont des (K, L) -quasi isométries. Il s'ensuit qu'un corridor est un sous-espace quasi géodésique pour la métrique télescopique.

Considérons maintenant le théorème I.6.3 dans le cadre de l'hyperbolicité relative forte. On modifie l'espace \tilde{X} de la façon suivante : on rajoute un sommet pour chaque orbite exceptionnelle ; on connecte, par une arête de longueur $\frac{1}{2}$, chaque sommet exceptionnel de \tilde{X} au nouveau sommet associé à son orbite exceptionnelle. L'espace métrique ainsi obtenu est quasi isométrique au groupe $G \rtimes_{\mathcal{A}} \mathbb{F}_n$, muni de la métrique relative associée à l'extension de \mathcal{H} par \mathbb{F}_n . Il satisfait la propriété de pénétration bornée si et seulement si le graphe de Cayley relatif correspondant la satisfait également.

Pour montrer l'hyperbolicité, ainsi que la propriété de pénétration bornée, pour ce nouvel espace, on a besoin de la remarque suivante :

LEMME I.6.10. *Il existe une constante C telle que, si $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ est un corridor, si σ est une orbite exceptionnelle, alors :*

- la partie de $\sigma(T)$ contenue dans le C -voisinage horizontal de $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ est l'image $\sigma(T_0)$ d'un sous-arbre T_0 de T ;
- la distance horizontale de $\sigma(t)$ à $\mathcal{C}(\sigma, \sigma')$ croît exponentiellement avec la distance de t à T_0 dans T .

Ce lemme I.6.10 permet de nous assurer que la quasi convexité des corridors reste satisfaite une fois les orbites exceptionnelles incluses dans la partie relative. La vérification de la propriété de pénétration bornée repose ensuite sur le lemme I.6.8. Elle fait appel de façon essentielle au point (b) de ce lemme.

I.7. Dans la continuation des travaux précédents ...

I.7.1. Une réciproque des théorèmes de combinaison. La condition donnée pour l'hyperbolicité relative d'un graphe de groupes relativement hyperboliques est-elle une condition nécessaire ? La réponse à cette question est OUI, du moins pour l'hyperbolicité relative forte. Dans un travail en commun avec M. Heusener [36], nous généralisons au contexte relatif une

approche de l'hyperbolicité à la Gromov due à Gersten [39]. Après avoir défini une notion de *cohomologie relative*, nous prouvons en effet que la cohomologie relative d'un groupe fortement relativement hyperbolique est nulle. Nous en déduisons alors la nécessité de notre condition d'hyperbolisation relative. Notons que pour l'hyperbolicité relative faible, il n'y a pas forcément annulation de notre cohomologie relative.

I.7.2. Une caractérisation pour les suspensions de groupes libres. La question est : quels sous-groupes doivent être inclus dans la partie relative pour s'assurer de l'hyperbolicité relative de la suspension d'un automorphisme de groupe libre ? Pour les surfaces, on a vu que c'était les sous-groupes à croissance linéaire sous l'homéomorphisme (ou leur suspension pour l'hyperbolicité relative forte). On a donc la réponse dans le cas où l'automorphisme est géométrique. Mais qu'en est-il en général ? Dans un travail en commun avec M. Lustig [37], nous démontrons que ce sont les sous-groupes à croissance polynomiale sous l'automorphisme (ou leur suspension, selon que l'on parle d'hyperbolicité relative faible ou forte). Les techniques utilisées reposent sur des calculs similaires à ceux des preuves des lemmes 5.9 et 5.12, mais en beaucoup plus élaborés. Un premier point crucial est de trouver l'analogie des feuilles stables - instables lorsque l'on travaille sur des représentants d'automorphismes de groupes libres. La preuve du lemme 5.12 pour les représentants efficaces sans chemins de Nielsen périodiques permet d'avoir une idée de ce que seront les découpages stables - instables. Mais un automorphisme de groupe libre quelconque n'admet pas nécessairement un représentant efficace. Nous devons donc utiliser des objets combinatoirement beaucoup plus élaborés et difficiles à manipuler [59, 60].

Une conséquence de ce travail est une nouvelle preuve d'un résultat récent, très général, de Bridson-Groves [18] : *la suspension d'un automorphisme de groupe libre admet une inégalité isopérimétrique quadratique*. On doit cependant faire appel au cas particulier suivant du Bridson-Groves : *la suspension d'un automorphisme polynomial de groupe libre admet une inégalité isopérimétrique quadratique*. Ce résultat est beaucoup plus élémentaire que le cas général.

CHAPITRE II

Deux problèmes de dynamique topologique

II.1. Types d'orbites

On présente ici l'article [G3] du mémoire, qui traite de type d'orbites pour les applications continues de graphes.

II.1.1. De Sharkovskii à Boyland. La notion de type d'orbite remonte à Sharkovskii [81] pour les applications continues de l'intervalle (on notera $C(I)$ leur ensemble). Pour Sharkovskii, le type d'une orbite périodique est sa période. Il existe un ordre \triangleleft sur les entiers naturels tel que, si $p \triangleleft q$, alors tout $f \in C(I)$ ayant une orbite périodique de période q admet aussi une orbite périodique de période p . Dans cet ordre, l'entier 3 est le plus grand entier naturel, ce qui permet de donner un sens à la formule usuelle "Période 3 implique chaos" : tout $f \in C(I)$ ayant une orbite de période 3 a une orbite de chaque période.

Si l'on raffine un peu la notion de type en la définissant comme la permutation induite sur les points de l'orbite périodique (avec l'ordre naturel sur l'intervalle), on obtient le résultat suivant : étant donnée une orbite périodique P , parmi l'ensemble des $f \in C(I)$ possédant une orbite périodique du type de P , il en existe une, notée f_0 , vérifiant la propriété de minimalité suivante : si Q est une orbite périodique de f_0 , alors toute application f , admettant une orbite périodique du type de P , admet aussi une orbite périodique du type de Q [2].

Boyland [16, 17] a étendu ce genre de résultats en dimension 2, sur les surfaces. La période ne suffit alors plus à caractériser les orbites. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer des homéomorphismes du disque à n trous¹ qui permutent les trous en un seul cycle. On peut toujours trouver un tel homéomorphisme qui soit d'ordre n : il suffit de prendre la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ sur le disque unité de \mathbb{R}^2 , les trous étant disposés sur un cercle centré à l'origine de rayon $\frac{1}{2}$. Pourtant, on sait bien qu'il existe sur le disque à n trous des homéomorphismes qui, d'une part, permutent cycliquement les trous et, d'autre part, ont une dynamique complexe : les pseudo-Anosov. Or un pseudo-Anosov n'est jamais isotope à un homéomorphisme d'ordre fini (voir la classification de Nielsen-Thurston, théorème 4.4). Par exemple, dans le disque à 3 trous, on peut permuter les trois trous en un seul cycle par un homéomorphisme d'ordre fini dans la classe d'isotopie associée à la tresse² $\sigma_1\sigma_2$ (voir la note du bas de la page 42), mais aussi

¹On sort ici du strict contexte des surfaces compactes à bord. On aurait pu s'y cantonner en considérant le disque \mathbf{D}^2 privé de n disques ouverts D_i . Mais il est plus naturel, pour les questions abordées ici, de travailler avec des surfaces trouées ou avec des surfaces à points marqués.

²On désigne par σ_i les générateurs usuels du groupe de tresses à n brins : $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle$; ici $n = 3$.

par un homéomorphisme pseudo-Anosov dans celle associée à la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}$. En dimension 2, la période n'est donc pas une caractéristique suffisamment significative. Boyland a proposé la définition suivante :

DÉFINITION II.1.1. [17] *Soit S une surface compacte, munie d'un ensemble fini de n points, noté X_n . Le type d'une orbite périodique P de cardinal n d'un homéomorphisme h de S , isotope à l'identité dans S , est la classe de conjugaison de $[\phi^{-1}h\phi] \in MCG(S - X_n)$, où ϕ est un homéomorphisme de S envoyant X_n sur P .*

Il est important de noter que le type est défini dans le groupe modulaire de la surface *privée* de n points, et non dans le groupe modulaire de la surface elle-même. Les homéomorphismes ne seront pas isotopes à l'identité dans $MCG(S - X_n)$.

Avec la définition ci-dessus, on peut généraliser, en l'affaiblissant cependant, le théorème de Sharkovskii [17] : il existe un ordre partiel, noté \prec , sur les classes de conjugaison dans $MCG(S - X_n)$ tel que si \mathcal{G}, \mathcal{H} sont deux classes de conjugaison dans $MCG(S - X_n)$, avec $\mathcal{G} \prec \mathcal{H}$, si f est un homéomorphisme de S et P une orbite périodique de f de type \mathcal{H} , alors f admet une orbite périodique de type \mathcal{G} . Mais surtout on peut généraliser, sans affaiblissement, la notion de représentant minimal. Le résultat s'énonce plus facilement dans le cas d'une classe d'isotopie pseudo-Anosov :

THÉORÈME II.1.2. [17],[47] *Soit f_0 un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface compacte S . Si Q est une orbite périodique de f_0 , alors tout homéomorphisme isotope à f_0 admet une orbite périodique du type de Q . De plus, à un nombre fini d'exceptions près, deux orbites périodiques de même type coïncident.*

En d'autres termes, les homéomorphismes pseudo-Anosov jouent le rôle de représentants minimaux dans leurs classes d'isotopie. Pour donner une illustration un peu concrète de cette théorie, considérons un homéomorphisme du disque et une orbite périodique P de cet homéomorphisme. Du fait de la correspondance entre groupe modulaire du disque à n trous et groupe de tresses à n brins³, le type de P s'identifie à une classe de conjugaison de tresses. La tresse pseudo-Anosov la plus simple est la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ de B_3 , déjà apparue plus haut. On prouve dans [G7] qu'elle force tous les autres types, c'est à dire que, si un homéomorphisme du disque a une orbite périodique du type $\sigma_1\sigma_2^{-1}$, alors toute classe de conjugaison de tresses est le type d'une orbite périodique de cet homéomorphisme. Si l'on considère le flot suspension, tout noeud de \mathbb{S}^3 (en fait même tout entrelac) sera représenté parmi ses orbites périodiques [G7].

II.1.2. Énoncé du résultat.

DÉFINITION II.1.3. (voir [G3]) *Soient Γ un graphe et $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$ une application continue. On appelle type d'une orbite périodique P de f la classe de conjugaison de l'endomorphisme*

³ On prendra garde que l'on n'impose pas aux isotopies de fixer le bord du disque point par point. Ainsi, le groupe modulaire s'identifie au quotient du groupe de tresses par son centre [12]. C'est ce qui explique que la classe d'isotopie associée à $\sigma_1\sigma_2$ par cette identification est d'ordre fini, alors que $\sigma_1\sigma_2$ n'est pas un automorphisme d'ordre fini : $(\sigma_1\sigma_2)^3$ est dans le centre du groupe de tresses à 3 brins.

induit par f sur le groupoïde fondamental de (Γ, P) , qui est le groupoïde naturel dont les unités correspondent aux points de P .

THÉORÈME II.1.4. (voir [G3]) Soit $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$, représentable par un représentant efficace expansif (f_0, Γ) .

Il existe une famille finie ξ d'orbites périodiques de f_0 telle que, pour toute orbite périodique Q hors de ξ , nous avons :

- (a) tout représentant topologique de α possède une orbite périodique du type de Q ;
- (b) tout représentant efficace de α possède le même nombre d'orbites périodiques du type de Q que le représentant (f_0, Γ) .

De plus, le cardinal de ξ est borné par une constante ne dépendant que de n .

Ce théorème est donc une généralisation directe, pour les automorphismes de groupes libres, des résultats valables pour les homéomorphismes de surfaces. Cette généralisation est cependant un peu affaiblie puisque l'on perd l'unicité de l'orbite périodique d'un type donné.

II.1.3. Quelques mots sur la preuve. La preuve reprend en partie certains des outils utilisés dans le cas des surfaces, à savoir les notions de *classes de Nielsen* et d'*indices* de points fixes ou périodiques. Ces notions jouent un rôle central dans l'étude des points fixes de systèmes dynamiques du type (M, f) , où M est un complexe cellulaire et f est un endomorphisme de ce complexe. Le lecteur pourra se reporter à [51] pour un traitement approfondi et relativement exhaustif. Rappelons simplement que deux points périodiques sont dans une même classe de Nielsen s'ils sont les extrémités d'un chemin de Nielsen périodique. *Il est cependant important de noter que la notion de type que l'on définit n'est pas simplement "être dans la même classe de Nielsen". En effet, d'une part cette expression n'a pas vraiment de sens dans notre contexte, puisque l'on veut pouvoir comparer des orbites sur des graphes différents. D'autre part, lorsque l'on travaille sur un seul graphe, il peut exister des orbites ayant même type dans notre sens, mais appartenant à des classes de Nielsen différentes (voir [G3]).*

L'indice d'un point périodique peut se définir axiomatiquement [51]. Cependant cette notion s'exprime géométriquement très simplement pour les applications de graphes qui sont continues et linéaires par morceaux :

Soient Γ un graphe et $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$ une application continue, linéaire par morceaux. Soit x un point de Γ , de période n pour f . Quitte à subdiviser Γ en x , on peut supposer que x est un sommet de Γ . Notons N le nombre d'arêtes orientées de sommet initial x , et dont un segment initial $I \subset e$ satisfait $f^n(I) = e$. Alors l'indice de x est $N - 1$.

Traçons en deux mots le schéma de la preuve (le lecteur pourra se reporter à [G11]). Une première étape consiste à démontrer la perpétuation, par équivalence d'homotopie, des orbites périodiques dont la classe de Nielsen est d'indice non nul. La seconde étape utilise l'expansivité du représentant efficace pour prouver que, à l'exception d'un nombre fini, toute orbite périodique est dans une classe d'indice non nul, et est seule dans sa classe. On obtient ainsi immédiatement la première partie du théorème. Pour la deuxième partie, il faut observer que, pour prouver la perpétuation des classes d'indice de Nielsen non nuls, on prouve en fait

l’injectivité de l’application qui suit ces classes au cours des équivalences d’homotopie amenant d’un représentant topologique à un autre. Avec le fait que chaque orbite est seule dans sa classe de Nielsen pour un représentant efficace, on a bien ainsi le point (b).

II.2. Suspensions et sections globales

À l’exception du théorème qui la clôt, cette partie concerne l’article [G2] du présent mémoire. Les objets sur lesquels on travaille ici furent introduits dans ma thèse [G8], [G9].

II.2.1. Complexes standards et surfaces branchées. Les 2-complexes *standards* ou *spéciaux* [21, 67] se sont développés en topologie, pour l’étude des 3-variétés et groupes de présentation finie. La motivation reposait sur le fait que toute 3-variété compacte à bord est l’épaississement d’un 2-complexe standard, et tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d’un tel 2-complexe. La caractéristique attrayante de ces 2-complexes standards étant leur combinatoire locale extrêmement rudimentaire, voir la figure 1.

Propriété locale fondamentale : tout point d’un 2-complexe standard admet un voisinage homéomorphe au voisinage d’un point à l’intérieur du cône sur le 1-squelette du tétraèdre.

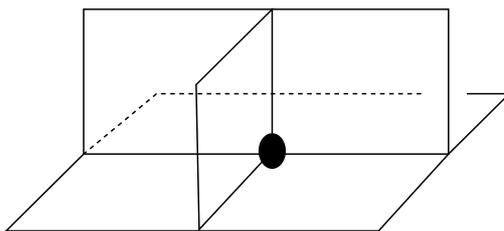


FIG. 1. Le cône sur le 1-squelette du tétraèdre

Cette simplicité locale avait en contrepartie une complexité globale significative : par exemple, le 2-complexe standard, non trivial, le plus simple pour la boule est la célèbre “maison de Bing avec deux chambres” (“Bing’s house with two rooms”). Cela n’a pas empêché des avancées dans la compréhension des 3-variétés. Le lecteur pourra se reporter aux travaux et algorithmes de Matveev ou Petronio [68, 76, 75] par exemple.

Parallèlement à ces 2-complexes standards, les surfaces branchées se développaient en systèmes dynamiques, sous l’impulsion de Williams notamment. Les premières surfaces branchées sont apparues, numériquement, dans l’étude de certains systèmes atmosphériques par Lorenz, comme les gabarits d’attracteurs hyperboliques. L’idée à la base de leur introduction en mathématiques [91] fut de substituer de jolis espaces cellulaires compacts aux espaces quotients de feuilletages que l’on étudiait habituellement et qui avaient l’inconvénient d’être en particulier non séparés. À la suite des travaux de Williams et Thurston dans les années 70, les surfaces branchées firent leur apparition en topologie de dimension 3 dès le début des années 80, avec par exemple les travaux de Floyd et Oertel (suivis de Gabai et beaucoup d’autres).

Une surface branchée générique de Williams [91] est un 2-complexe standard muni d'une structure lisse, et réciproquement. Malgré cela, ces deux théories sont restées sans communication jusqu'au début des années 90. Christy fut le premier à les réunir dans un même travail, prépublication cependant apparemment jamais véritablement achevée. Ses *surfaces branchées dynamiques* furent introduites dans [23], le thème général étant l'étude des *attracteurs hyperboliques* :

DÉFINITION II.2.1. *Soit $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot sur une 3-variété compacte M . Un attracteur hyperbolique de (ϕ_t) dans M est un sous-ensemble $\Lambda \subset M$ hyperbolique pour (ϕ_t) et qui admet un voisinage fermé N , sous-variété de M , appelé voisinage isolant, vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est rentrant le long du bord de N ,
- (b) $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(N)$,
- (c) Λ est l'ensemble des points non errant de la restriction du flot à N .

En s'inspirant des travaux de Williams ([91, 92, 45] parmi d'autres ...), Christy prouvait dans [23] que tout attracteur hyperbolique se projette sur un tel 2-complexe en identifiant les points d'un même segment stable. Cette rétraction est une équivalence d'homotopie du voisinage isolant de l'attracteur sur le 2-complexe, qui réalise une semi-conjugaison entre le flot et un semi-flot non singulier, transverse au lieu singulier de la surface branchée. Semi-conjugaison qui elle-même réalise une bijection entre orbites périodiques du flot et du semi-flot.

Actuellement, les surfaces branchées ont fait leur apparition dans d'autres domaines, comme l'étude des pavages [3].

II.2.2. Définitions des objets étudiés. Le vocabulaire ayant connu quelques variations au long des années et des articles, précisons qu'ici un 2-complexe standard sera un 2-complexe satisfaisant la propriété locale fondamentale donnée plus haut. Nommons *point singulier* tout point d'un 2-complexe standard dont aucun voisinage n'est homéomorphe à un disque. Cette propriété locale implique notamment que l'ensemble des points singuliers est un graphe dont tous les sommets sont de valence 4. On le nommera *graphe singulier* et on le notera \mathcal{S} .

Le bord de chaque composante connexe D du complémentaire de \mathcal{S} se décompose naturellement en 0-cellules et en 1-cellules orientées : ce sont les copies des sommets de \mathcal{S} et des arêtes orientées de \mathcal{S} le long desquelles D est attachée. Un *attracteur* (resp. *répulseur*) dans ∂D est une 0-cellule dans ∂D qui est le point terminal (resp. initial) des deux 1-cellules orientées de ∂D qui lui sont incidentes.

DÉFINITION II.2.2. (voir [G8]) *Un 2-complexe dynamique est un 2-complexe standard tel que :*

- les composantes connexes du complémentaire du graphe singulier \mathcal{S} (voir ci-dessus) sont des disques D_i , des anneaux ou des bandes de Möbius A_j ;
- les arêtes sont munies d'une orientation satisfaisant les deux propriétés suivantes :
 - (a) chaque sommet de \mathcal{S} est le sommet initial d'exactly 2 arêtes,

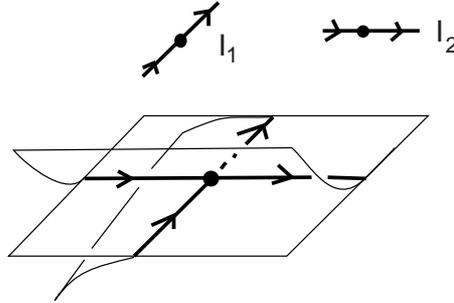
(b) le bord de chaque disque D_i contient exactement un attracteur et un répulseur, tandis que le bord des autres composantes A_j ne contient ni attracteur ni répulseur.

Dans [G2], on utilise une sous-classe particulière de ces objets :

DÉFINITION II.2.3. (voir [G2]) Une surface branchée dynamique spéciale est un 2-complexe dynamique dont les composantes connexes du complémentaire de l'ensemble singulier sont des disques, et qui admet une structure lisse compatible avec l'orientation des arêtes.

Précisons ce que l'on entend par cette dernière assertion. On pourra se reporter à la figure 2. On a une structure lisse sur un 2-complexe lorsque l'on a un plan tangent défini en tout point, qui varie continûment en fonction du point. Si l'on regarde un sommet v du graphe singulier, l'ensemble des 4 germes d'arêtes de \mathcal{S} incidentes à v se décompose en deux intervalles I_1, I_2 le long desquels le 2-complexe est lisse.

FIG. 2. Structure lisse compatible avec l'orientation



Décrivons plus précisément ces intervalles I_j . Chacun des I_j est l'union de deux germes d'arêtes en v , de telle façon que les intervalles I_1 et I_2 s'intersectent transversalement en v . Une propriété facile du cône sur le 1-squelette du tétraèdre est que, si un intervalle plongé dans l'ensemble singulier du cône contient son sommet, alors cet intervalle est contenu dans le bord d'exactly une 2-cellule de ce cône. Par conséquent, chacun des intervalles I_j est contenu dans le bord d'exactly une 2-cellule de la surface branchée. On note $C(j)$ cette 2-cellule. En tout point de I_j distinct du sommet v , il y a 3 germes de 2-cellules incidentes. Puisque l'on a un plan tangent défini en tout point, on peut ainsi distinguer deux côtés en tout point x de I_j , distinct du sommet v : un côté avec deux germes de 2-cellules incidentes et un côté avec un seul germe de 2-cellule incidente. Les intervalles I_j sont tels que la 2-cellule $C(j)$ avec $\partial C(j) \supset I_j$ est du côté à deux germes en tout point de $I_j \setminus \{v\}$.

Dire que la structure lisse est compatible avec l'orientation des arêtes de \mathcal{S} , c'est dire que :

(a) chacun des intervalles I_j contient un germe d'arête rentrante et un germe d'arête sortante au sommet considéré ;

si $g_+(j)$ est le germe d'arête sortante contenu dans I_j , il y a exactement deux 2-cellules contenant dans leur bord la concaténation en v de $g_+(j)$ avec une composante connexe de $I_{j'} \setminus \{v\}$, $j, j' = 1, 2$ et $j \neq j'$. Notons les $D_1(j)$ et $D_2(j)$.

- (b) Pour $j = 1, 2$, les 2-cellules $D_1(j)$ et $D_2(j)$ sont du côté à 1 germe en tout point de $I_{j'} \setminus \{v\}$, $j' \neq j$ et $j' \in \{1, 2\}$.

Les différences entre une surface branchée dynamique spéciale et une surface branchée dynamique de [23] sont de deux ordres :

- (a) d'un point de vue combinatoire, une surface branchée dynamique spéciale est une surface branchée dynamique sans anneaux ni bandes de Mobius et qui est aussi un 2-complexe dynamique pour l'orientation des arêtes induite par la structure lisse ;
- (b) d'un point de vue topologique, une surface branchée dynamique spéciale, à la différence d'une surface branchée dynamique de [23], n'admet pas nécessairement de plongement dans une variété de dimension 3.

Un *semi-flot combinatoire* sur une surface branchée dynamique spéciale est un semi-flot non singulier, transverse au lieu de branchement et satisfaisant notamment les propriétés suivantes :

- ses segments d'orbites à l'intérieur d'un voisinage du graphe singulier \mathcal{S} sont orientés du côté à 2 germes de \mathcal{S} vers le côté à 1 germe ;
- son orientation dans le voisinage de \mathcal{S} coïncide avec l'orientation des arêtes ;
- il est C^∞ à l'intérieur des 2-cellules dans le complémentaire de \mathcal{S} .

Une fois définie cette classe de semi-flots, on s'intéresse à la question de caractériser, en terme de combinatoire du 2-complexe, l'existence de *sections globales* à un tel semi-flot. On va préciser ce que l'on entend par là. Cela nécessite tout d'abord l'introduction des *graphes proprement plongés*.

DÉFINITION II.2.4. *Soit K un 2-complexe standard.*

Un graphe proprement plongé dans K est un graphe trivalent Γ plongé dans K , transversalement au graphe singulier \mathcal{S} , et de telle façon que :

- (a) *chaque arête de Γ est contenue dans une composante connexe du complémentaire de \mathcal{S} dans K ;*
- (b) *si v est un sommet de Γ :*
- *v est dans l'intérieur d'une arête de \mathcal{S} ;*
 - *il y a exactement un germe d'arête de Γ en v dans chaque germe de 2-cellule de K en v .*

On peut maintenant donner la définition d'une section globale à un semi-flot combinatoire :

DÉFINITION II.2.5. *Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale et $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-flot combinatoire sur \mathcal{W} . Une section globale à (σ_t) est un graphe proprement plongé dans \mathcal{W} , qui intersecte transversalement, en temps fini et dans le même sens, toutes les orbites du semi-flot.*

Soit K un 2-complexe standard. On dira qu'un graphe Γ proprement plongé dans K est à deux côtés dans K si un voisinage régulier de Γ dans K est homéomorphe à $\Gamma \times [0, 1]$. Toute section globale à un semi-flot combinatoire est un graphe à deux côtés.

Il est facile de voir que tout graphe proprement plongé, et à deux côtés, dans K définit un 1-cocycle à coefficients entiers dans $C^1(K, \mathbb{Z})$: il suffit de considérer son nombre d'intersection

algébrique avec chaque arête orientée du graphe singulier de K . Réciproquement, si l'on se donne un 1-cocycle à coefficients entiers, on peut construire un graphe proprement plongé, et à deux côtés, dans K qui définisse ce cocycle. Par un abus de langage, on parlera *du graphe proprement plongé associé au cocycle* ou bien *du graphe proprement plongé représentant le cocycle*.

REMARQUE II.2.6. *En fait, un graphe proprement plongé, et à deux côtés, dans un 2-complexe standard K est la pré-image d'un point régulier sous une application continue surjective $f: K \rightarrow \mathbb{S}^1$. Le lien noté ci-dessus, entre les graphes proprement plongés à deux côtés et les cocycles de $C^1(K, \mathbb{Z})$, s'ensuit immédiatement en considérant le morphisme induit au niveau des premiers groupes d'homologie.*

Pour caractériser l'existence de sections globales, on est amené à considérer divers types de 1-cocycles à coefficients entiers. On a d'abord besoin d'une définition préliminaire :

DÉFINITION II.2.7. *Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale. Un circuit de \mathcal{W} est une boucle dans le graphe singulier le long de laquelle \mathcal{W} est lisse.*

On en arrive ainsi à la définition de nos cocycles. Précisons, pour éviter toute confusion possible au lecteur anglophone, ou habitué à l'usage anglo-saxon, que, dans la suite, le mot "positif" (pour un nombre réel) est utilisé au sens de "non negative" (i.e. positif ou nul).

DÉFINITION II.2.8. *(voir [G2]) Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale.*

Une classe de cohomologie positive est une classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$ qui prend une valeur positive sur toute boucle positive du graphe singulier.

Une classe de cohomologie strictement positive de \mathcal{W} est une classe de cohomologie positive, qui prend une valeur strictement positive sur toute boucle positive du graphe singulier.

Une jolie classe de cohomologie positive est une classe de cohomologie positive qui prend une valeur strictement positive sur toute boucle positive du graphe singulier qui n'est pas un circuit.

Un cocycle positif de \mathcal{W} est un 1-cocycle à coefficients entiers positifs.

Un cocycle strictement positif de \mathcal{W} est un cocycle positif dans une classe de cohomologie strictement positive.

Un joli cocycle positif de \mathcal{W} est un cocycle positif dans une jolie classe de cohomologie positive.

Il n'y a guère de différence entre classe de cohomologie positive et cocycle positif, comme le souligne la proposition ci-dessous :

PROPOSITION II.2.9. *(voir [G2]) Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale. Toute classe de cohomologie positive de \mathcal{W} contient un cocycle positif.*

II.2.3. Existence de sections globales. Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale. Pour $u \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$ un cocycle, définissons $|u|$ comme le minimum, en valeur absolue, des caractéristiques d'Euler des graphes proprement plongés dans \mathcal{W} représentant u . Posons $[u]$ la classe de u dans $H^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$. Si, pour $c \in H^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$, l'on définit $\|c\| = \inf_{[u]=c} |u|$, il est facile de montrer que, si u est un cocycle positif, alors $\|[u]\| = |u|$. Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME II.2.10. (voir [G2]) Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale et soit $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semi-flot combinatoire sur \mathcal{W} .

- (a) (σ_t) admet une section globale si et seulement s'il existe un joli cocycle positif (ou une jolie classe de cohomologie positive).
- (b) Si \mathcal{W} admet un plongement dans une 3-variété, tout joli cocycle positif est strictement positif; l'existence d'une section globale à (σ_t) est donc équivalente à l'existence d'une classe de cohomologie strictement positive (ou d'un cocycle strictement positif).
- (c) Toute jolie classe de cohomologie positive $c \in H^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$ définit une section globale Γ à (σ_t) telle que l'application de retour de (σ_t) sur Γ induise un endomorphisme injectif sur le groupe fondamental de Γ . Ce groupe fondamental est un groupe libre de rang $1 + \|c\|$. Cet endomorphisme est un automorphisme si et seulement si c est positive.

Si \mathcal{W} est plongée dans une 3-variété M alors :

- le voisinage régulier $N(\mathcal{W})$ de \mathcal{W} dans M est le voisinage isolant d'un attracteur hyperbolique d'un flot défini sur $N(\mathcal{W})$, transverse et rentrant le long de $\partial N(\mathcal{W})$;
- une rétraction r de $N(\mathcal{W})$ sur \mathcal{W} définit une semi-conjugaison entre ce flot et le semi-flot (σ_t) ;
- toute section globale à (σ_t) se relève, par la rétraction r , en une section globale à ce flot.

Un premier intérêt de ce théorème est un très léger pas en avant dans l'étude des attracteurs hyperboliques en dimension 3. Étant donné un tel attracteur \mathcal{A} se rétractant sur une surface branchée dynamique spéciale, le théorème II.2.10 donne en effet une condition suffisante pour que le voisinage isolant $N(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} , une 3-variété compacte, soit la suspension d'un homéomorphisme de surface. Le flot suspension est alors isotope à un flot sur $N(\mathcal{A})$, qui admet \mathcal{A} pour attracteur hyperbolique.

Les critères d'existence de section globale que l'on donne sont aisément vérifiables en pratique. C'est une conséquence de la proposition II.2.9. Il suffit en effet de chercher les solutions entières strictement positives d'un système linéaire à coefficients entiers, de second membre nul. La matrice de ce système est la matrice du premier opérateur de cobord $\delta^1 : C^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z}) \rightarrow C^2(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$, où \mathcal{W} est la surface branchée dynamique spéciale considérée. L'ensemble de ces solutions est engendré par un nombre fini d'entre elles. C'est à dire qu'il existe k solutions c_1, \dots, c_k strictement positives telles que, pour toute autre solution strictement positive c , il existe des entiers positifs λ_i avec $c = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i$.

Un autre intérêt est de mettre en lumière une différence entre le "cas plongé" et le cas "non plongé". Dans ce deuxième cas, un phénomène apparaît, pour l'existence d'une section globale à un semi-flot, qui n'existe pas dans le premier cas.

REMARQUE II.2.11. Dans le théorème II.2.10 ci-dessus, on suppose donné un semi-flot combinatoire. On lui construit alors une section globale pour chaque classe de cohomologie joliment positive. On aurait pu énoncer le résultat différemment, en partant d'une telle classe de cohomologie, et d'un graphe proprement plongé représentant un cocycle positif de cette classe. On aurait alors conclu à l'existence d'un semi-flot combinatoire admettant ce graphe pour section globale.

II.2.4. Quelques indications sur la preuve. Elle repose en partie sur la proposition suivante, qui se démontre par une analyse détaillée de la combinatoire d'une surface branchée dynamique spéciale :

PROPOSITION II.2.12. (*voir [G2]*) Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale. Toute boucle positive du graphe singulier de \mathcal{W} qui n'est pas un circuit est homotope à une orbite périodique.

Il s'ensuit immédiatement que toute section globale à un semi-flot combinatoire définit une jolie classe de cohomologie positive. Puisqu'il est immédiat que toute orbite périodique est homotope à une courbe positive dans le graphe singulier, on obtient le point (a) du théorème. Les points (b) et (c) reposent sur une construction explicite du feuilletage en graphes compacts du 2-complexe comme dans [G8] et [G9]. Plus précisément, on prouve la proposition II.2.14 ci-dessous. Avant de l'énoncer, on a besoin d'une définition préliminaire :

DÉFINITION II.2.13. Soit K un 2-complexe standard. Un graphe simplement plongé dans K est un graphe plongé dans K transversalement au graphe singulier \mathcal{S} , de telle façon que le point (a) de la définition II.2.4 est satisfait et :

- (a) l'item (b) de la définition II.2.4 est satisfait pour tout sommet v distinct d'un certain sommet, noté ω ;
- (b) ω est un sommet de valence 4 pour Γ ;
- (c) ω coïncide avec un sommet de \mathcal{S} ;
- (d) il y a au plus un germe d'arête de Γ en ω dans chaque germe de 2-cellule de K en ω .

Enfin, rappelons qu'un mouvement de Whitehead sur un graphe Γ consiste à écraser une arête e non fermée, puis à exploser au sommet résultant. On obtient ainsi un nouveau graphe Γ' , et une équivalence d'homotopie de Γ vers Γ' , qui est l'identité en dehors d'un voisinage contractible de e .

PROPOSITION II.2.14. Soit \mathcal{W} une surface branchée dynamique spéciale, muni d'un semi-flot combinatoire $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. Soit $u \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{Z})$ un cocycle strictement positif de \mathcal{W} . On note N le nombre de sommets du graphe singulier \mathcal{S} .

Alors il existe un feuilletage en graphes compacts $(\Gamma_r)_{r \in [0,1]}$ de \mathcal{W} satisfaisant les propriétés suivantes :

- (a) à l'exception de N d'entre eux, chaque graphe Γ_r est proprement plongé et est une section globale à (σ_t) ;
- (b) si $r_1 < \dots < r_N$ sont les temps pour lesquels Γ_{r_i} n'est pas proprement plongé, alors :
 - le graphe Γ_{r_i} est simplement plongé (*voir définition II.2.13*) ;
 - Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $\Gamma_{r_i+\epsilon}$ s'obtient de $\Gamma_{r_i-\epsilon}$ par un mouvement de Whitehead.

D'après la proposition II.2.14 ci-dessus, l'application de retour du semi-flot est homotope à une composition de mouvements de Whitehead. Elle induit donc un automorphisme sur le groupe fondamental de la section.

Lorsque le cocycle considéré n'est pas strictement positif, mais seulement joliment positif, on construit également un feuilletage en graphes compacts de la surface branchée. Mais au moins une feuille de ce feuilletage, notée Γ_{r_*} , contient un circuit. L'application induite par le semi-flot de $\Gamma_{r_*-\epsilon}$ à $\Gamma_{r_*+\epsilon}$ est localement injective, et n'est pas un homéomorphisme. D'où la non surjectivité de l'endomorphisme induit sur le groupe fondamental. En effet, on a le fait suivant, dû à Stallings [88] (déjà évoqué dans le chapitre de rappels) : *un morphisme localement injectif d'un graphe dans lui-même induit un automorphisme sur le groupe fondamental si et seulement si c'est un isomorphisme du graphe. Dans le cas contraire, il induit un endomorphisme injectif, non surjectif du groupe fondamental.*

II.2.5. Une autre caractérisation des suspensions. On a jusqu'à présent cherché à caractériser les surfaces branchées dynamiques spéciales \mathcal{W} dont les semi-flots combinatoires admettent une section globale. Lorsque \mathcal{W} se plonge dans une 3-variété, son voisinage régulier est alors la suspension d'un homéomorphisme pseudo-Anosov sans singularités intérieures. Le théorème suivant complète cette étude, en justifiant a posteriori (du moins dans le cas de suspensions de surfaces orientables) la restriction à ce type de 2-complexes.

DÉFINITION II.2.15. *Soit M une 3-variété compacte à bord. Un squelette de M est un 2-complexe K plongé dans M , tel que M se rétracte sur K par une équivalence d'homotopie.*

THÉORÈME II.2.16. *(voir [G1]) Soient S une surface compacte à bord, orientée, et h un homéomorphisme pseudo-Anosov de S sans singularités intérieures, préservant l'orientation. Alors :*

- (a) *la suspension S_h de (h, S) admet comme squelette une surface branchée dynamique spéciale \mathcal{W} munie d'un cocycle strictement positif;*
- (b) *ce cocycle strictement positif définit un réseau ferroviaire invariant (ψ, τ) de l'homéomorphisme h ;*
- (c) *la rétraction de S_h sur son squelette \mathcal{W} peut être choisie pour réaliser une semi-conjugaison entre un flot hyperbolique transverse au bord, isotope au flot suspension de h , et un semi-flot sur \mathcal{W} admettant τ pour section globale et ψ pour application de premier retour.*

L'hypothèse d'orientabilité est nécessaire dans la preuve du théorème. S'il a sa place dans ce chapitre du fait de son sujet, la recherche de structures de suspensions, cette preuve fait cependant appel aux techniques développées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

Géométrie d'un automorphisme de groupe libre

Ce chapitre concerne l'article [G1] du mémoire.

III.1. Introduction au problème de géométrie

Les automorphismes géométriques ont été définis dans le chapitre de rappels. Nielsen [70] (voir aussi [24] ou [25]) en donne une caractérisation, que l'on peut exprimer de la façon suivante :

THÉORÈME III.1.1. *Un automorphisme α de \mathbb{F}_n est géométrique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathbb{F}_n , deux familles finies $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_k\}$ et $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_k\}$ de mots réduits dans $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^{-1}$, une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$, des entiers $\epsilon_i, \epsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, k$, et un morphisme $\mu: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{-1, 1\}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- (a) *l'union des éléments de $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^{-1}$ contient exactement deux fois chaque lettre de $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}^{-1}$;*
- (b) *pour chaque $i = 1, \dots, k$, $\alpha(l_i) = w_i^{-1} l_{\sigma(i)}^{\epsilon_i} w_i$;*
- (c) *$\mu(w_i) \epsilon_i = \epsilon$.*

Lorsque l'automorphisme est géométrique, la famille \mathcal{L} correspond aux courbes de bord ; le morphisme μ est celui qui envoie tout élément de \mathbb{F}_n représenté par une courbe à deux côtés sur 1, et les autres sur -1 ; il est constant dans le cas d'une surface orientable.

Ce théorème fait apparaître la difficulté du problème de "géométrie" : on sait qu'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle les courbes de bord de la surface s'expriment de façon simple, mais comment trouver cette base ? Par exemple, soit $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{F}_3)$, $\mathbb{F}_3 = \langle a, b, c \rangle$, donné par $\alpha(a) = aca^{-1}$, $\alpha(b) = a$ et $\alpha(c) = c^{-1}bc$. On vérifie aisément que $\{a, b, c, abc\}$ fournit une famille \mathcal{L} d'éléments satisfaisant toutes les propriétés souhaitées : si on pose $l_1 = a$, $l_2 = b$, $l_3 = c$ et $l_4 = abc$, on a $w_1 = a^{-1}$, $w_2 = 1$, $w_3 = c$, $w_4 = 1$, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 4$; tous les ϵ_i ainsi que ϵ sont égaux à 1, et le morphisme μ est constant égal à 1. Ainsi, d'après le théorème de Nielsen, α est induit par un homéomorphisme d'une surface compacte à bord. Cette surface est le disque privé de trois disques ouverts. En effet, elle est orientable, avec 4 composantes de bord et de caractéristique d'Euler -2 . Considérons maintenant $\beta \in \text{Aut}(\mathbb{F}_3)$, avec $\mathbb{F}_3 = \langle A, B, C \rangle$, donné par $\beta(A) = BCA^{-1}B^{-1}AC^{-1}A^{-1}B^2$, $\beta(B) = BCA^{-1}$, $\beta(C) = B$. Le lecteur vérifiera qu'aucune famille finie ne satisfait, pour la base $\mathcal{B} = \{A, B, C\}$, les propriétés demandées pour la famille \mathcal{L} par le théorème III.1.1. Pourtant β est conjugué à α par le changement de base $a \mapsto ac^{-1}b \equiv A$, $b \mapsto a \equiv B$, $c \mapsto b \equiv C$, et est donc géométrique.

Mais la famille finie préservée à conjugaison près est maintenant $\{B, C, CA^{-1}B, BCCA^{-1}B\}$. Il n'y en a aucune autre : en effet, l'automorphisme considéré est dans la classe de conjugaison de l'automorphisme de tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}$, qui est une tresse pseudo-Anosov. Le théorème III.1.1 ne permet donc pas de conclure dans ce cas, puisque les lettres B et C apparaissent 4 fois dans cette famille. Cela vient du fait que le changement de base effectué n'est pas géométrique.

Le problème de géométrie des automorphismes de groupes libres a été abordé, plus récemment, par divers auteurs. Le lecteur pourra se reporter à [9, 30, 57, 58, 87], en sus des articles cités plus loin dans ce chapitre. On ne garantit pas l'exhaustivité de cette liste.

III.2. Bons réseaux ferroviaires invariants

Pour expliquer ce qu'est un bon réseau ferroviaire invariant, et motiver leur introduction, on va énumérer quelques propriétés remarquables satisfaites par les réseaux ferroviaires invariants d'un homéomorphisme pseudo-Anosov sans singularités intérieures :

PROPOSITION III.2.1. *Soient S une surface compacte à bord et h un homéomorphisme pseudo-Anosov de S sans singularités intérieures. Alors il existe un réseau ferroviaire invariant (ψ, τ) de h satisfaisant les propriétés ci-dessous. On note K le cardinal de l'ensemble des sommets de τ , qui est égal à $2 * \text{rang}(\pi_1(S)) - 2$.*

- (a) *Le groupe fondamental de τ est isomorphe au groupe fondamental de S . L'automorphisme externe induit par h sur le groupe fondamental de S s'identifie, par cet isomorphisme, à l'automorphisme externe induit par ψ sur le groupe fondamental de τ .*
- (b) *Tous les sommets de τ sont trivalents et τ porte une mesure de support total.*
- (c) *Il existe une famille $W = \{w_1, \dots, w_K\}$ de chemins orientés réduits dans τ tels que :*
 - $\bigcup_{i=1}^K w_i$ recouvre τ ;
 - tout sommet de τ est le point terminal d'exactlyement l'un des chemins w_i ;
 - une puissance de l'application ψ peut être totalement pliée le long de W .*Quitte à passer à une puissance suffisante (inférieure ou égale à $K!$) de h , on peut supposer de plus :*
- (d) *Si $(p, q), (p', q')$ sont deux paires de chemins le long des images desquelles l'application ψ est pliée (i. e. $\psi(p) = \psi(q)$ et $\psi(p') = \psi(q')$ sont contenus dans deux chemins réduits w_i, w_j de W), ni p ni q ne contient p' ou q' comme sous-chemin orienté.*

On définit alors les réseaux ferroviaires à cycles et les bons réseaux ferroviaires à partir des propriétés combinatoires données dans la définition ci-dessus. On laissera de côté le fait que (ψ, τ) est un réseau ferroviaire invariant d'un pseudo-Anosov de surface. En particulier, bien sûr, on n'imposera pas l'existence des plongements i, ϕ de la proposition 4.7. Ainsi un réseau ferroviaire à cycles sera-t-il, en quelque sorte, l'analogue combinatoire d'un réseau ferroviaire invariant d'un homéomorphisme pseudo-Anosov sans singularités intérieures.

DÉFINITION III.2.2. (voir [G1]) *Un réseau ferroviaire à cycles est un réseau ferroviaire invariant satisfaisant les propriétés (b) et (c) de la proposition III.2.1.*

Un bon réseau ferroviaire est un réseau ferroviaire à cycles satisfaisant la propriété (d) de la proposition III.2.1.

Si h est un homéomorphisme préservant l'orientation d'une surface compacte à bord orientée, alors il est inutile de passer à une puissance dans la proposition III.2.1 et h lui-même admet un bon réseau ferroviaire invariant. D'autre part, si $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est représentable par un réseau ferroviaire à cycles, alors une puissance (inférieure ou égale à $(2n - 2)!$) de α est représentable par un bon réseau ferroviaire invariant.

Finalement :

DÉFINITION III.2.3. *On note $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ l'ensemble des automorphismes externes du groupe libre représentables par un bon réseau ferroviaire invariant.*

III.3. Premier résultat

THÉORÈME III.3.1. *(voir [G1])*

Soit $\alpha \in \text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ (voir définition III.2.3). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) α est géométrique ;
- (b) si (ψ, τ) est un bon réseau ferroviaire invariant représentant α , alors l'application ψ préserve, à homotopie et changement d'orientation près, une collection de courbes fermées dans τ dont l'union passe exactement deux fois par chaque arête de τ ;
- (c) $\alpha^{-1} \in \text{BRF}(\mathbb{F}_n)$;
- (d) l'entropie de α est égale à l'entropie de α^{-1} .

Dans [G1], on donne des exemples d'automorphismes dans $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ qui ne sont pas géométriques.

Handel et Mosher [50] prouvent des résultats similaires pour la classe des automorphismes externes dits *paragéométriques*. Cette classe d'automorphismes externes a une intersection non vide avec $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$, mais aucune des deux ne contient l'autre. Les automorphismes externes paragéométriques sont en effet complètement irréductibles par définition alors qu'un élément de $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ peut être réductible. Notons enfin que l'on peut trouver, dans [50], un exemple d'automorphisme non géométrique dont l'entropie est égale à celle de son inverse (on a vérifié dans [G1] que ce n'était pas un automorphisme de $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$). Cela signifie en particulier que l'on ne peut espérer généraliser inconsidérément les résultats ci-dessus.

III.4. Géométrie et surfaces branchées

Dans [G1], l'outil essentiel est une désingularisation combinatoire de la suspension d'une application de graphe (ψ, Γ) . La motivation pour l'introduction des bons réseaux ferroviaires a été la suivante : lorsque l'on applique le procédé de désingularisation combinatoire à la suspension d'un bon réseau ferroviaire, on obtient une surface branchée dynamique spéciale comme introduite dans la section II.2. On peut alors exploiter la combinatoire simple de ces objets.

Soit K un 2-complexe compact et soit G son groupe fondamental. Une classe de cohomologie entière $u \in H^1(K, \mathbb{Z})$ représente un automorphisme externe α du groupe libre \mathbb{F}_n si $\text{Ker}(u) = \mathbb{F}_n$, $G/\text{Ker}(u) = \mathbb{Z}$ et si α est l'automorphisme externe de $\text{Ker}(u)$ associé à la suite exacte scindée $1 \rightarrow \text{Ker}(u) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$.

DÉFINITION III.4.1. *Un automorphisme externe α du groupe libre \mathbb{F}_n est représentable par un cocycle strictement positif d'une surface branchée dynamique spéciale s'il existe une surface branchée dynamique spéciale \mathcal{W} et une classe de cohomologie strictement positive de \mathcal{W} qui représente l'automorphisme externe α de \mathbb{F}_n .*

Dans [G1], on prouve :

PROPOSITION III.4.2. *(voir [G1]) Tout automorphisme dans $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ est représentable par un cocycle strictement positif d'une surface branchée dynamique spéciale, et réciproquement.*

Ainsi, tout automorphisme représentable par un cocycle strictement positif de surface branchée dynamique spéciale n'est pas nécessairement géométrique. En effet, comme on l'a déjà dit auparavant, on trouve, dans [G1], des exemples d'automorphismes non géométriques dans $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$. D'après cette proposition III.4.2, ce sont des automorphismes non géométriques représentables par des cocycles strictement positifs de surfaces branchées dynamiques spéciales. Dans [G1], on donne à la fois la présentation par un bon réseau ferroviaire invariant, et par un cocycle strictement positif d'une surface branchée dynamique spéciale. On évoque, dans la section suivante, le moyen de prouver la proposition III.4.2.

On énonce maintenant notre théorème concernant les automorphismes représentables par des cocycles strictement positifs de surfaces branchées dynamiques spéciales :

THÉORÈME III.4.3. *(voir [G1]) Soit $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ représenté par un cocycle strictement positif d'une surface branchée dynamique spéciale \mathcal{W} . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) α est géométrique ;
- (b) \mathcal{W} admet un plongement dans une 3-variété compacte ;
- (c) le 2-complexe sous-jacent à \mathcal{W} , équipé de l'orientation inverse sur les arêtes de son graphe singulier, admet une structure compatible de surface branchée dynamique spéciale.

Le point (b) du théorème III.4.3 représente une avancée pour le problème de géométrie car le critère de plongeabilité d'une surface branchée dynamique spéciale est, en plus d'être simple à exprimer et aisément manipulable, un critère algorithmique. En effet, une telle surface branchée est en particulier un 2-complexe standard [21]. L'article [5] donne un tel critère de plongeabilité pour cette catégorie de 2-complexes.

III.5. Commentaires sur la preuve

L'équivalence entre les items (a), (b), (c) et (d) du théorème III.3.1 repose sur l'équivalence entre les items (b) et (c) du théorème III.4.3. Le point clé est ensuite l'implication :

$$\begin{array}{c} \text{non-existence d'une structure lisse compatible avec l'orientation inverse des arêtes} \\ \Downarrow \\ h_{top}(\alpha^{-1}) < h_{top}(\alpha). \end{array}$$

Pour passer des réseaux ferroviaires aux surfaces branchées dynamiques spéciales, on définit une désingularisation combinatoire du procédé de suspension. Son principe repose sur la réalisation topologique d'un pliage à la Stallings [88].

Soit $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ un automorphisme externe dans $\text{BRF}(\mathbb{F}_n)$ et soit (ψ, τ) un bon réseau ferroviaire invariant qui représente α . La construction évoquée ci-dessus, appliquée à (ψ, τ) , nous donne en particulier :

- (a) une surface branchée dynamique spéciale \mathcal{W} dont le groupe fondamental est le groupe suspension de l'automorphisme α ,
- (b) un cocycle strictement positif u associé à une structure de produit semi-direct $\mathbb{F}_n \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

REMARQUE III.5.1. *C'est ainsi que l'on prouve la proposition III.4.2. C'est également grâce à cette construction que l'on montre le théorème II.2.16 du chapitre II.*

On va noter Γ un graphe proprement plongé associé au cocycle strictement positif u . On a vu dans la proposition II.2.14 que u définit une suite $\Gamma = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma_N = \Gamma$ de graphes Γ_i proprement plongés dans \mathcal{W} , telle que Γ_i s'obtient de Γ_{i-1} par un mouvement de Whitehead w_i , pour $i = 1, \dots, N$. Renversons l'orientation des arêtes du graphe singulier et notons K le 2-complexe muni de cette nouvelle orientation des arêtes. Si ce n'est plus nécessairement une surface branchée dynamique spéciale, c'est cependant toujours un 2-complexe dynamique (voir définition II.2.2). Le cocycle $-u$ est un cocycle strictement positif de K . Considérons la suite de graphes proprement plongés $\Gamma = \Gamma_N \rightarrow \Gamma_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0 = \Gamma$. L'automorphisme externe représenté par $-u$ est celui induit par $w'_1 \circ \cdots \circ w'_N$ sur Γ , où w'_i est l'inverse homotopique de w_i . Ainsi, en tant que cocycle strictement positif du 2-complexe dynamique K , $-u$ représente l'automorphisme (externe) α^{-1} .

Le cocycle strictement positif u de \mathcal{W} définit en fait un bon réseau ferroviaire invariant $(\psi_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ qui représente l'automorphisme α considéré. Le réseau ferroviaire τ_{α} n'est rien d'autre que le graphe Γ muni de la structure lisse induite par celle de \mathcal{W} . L'application ψ_{α} est définie combinatoirement, comme une composition d'applications élémentaires associées aux mouvements de Whitehead w_i correspondant aux passages à travers les sommets du graphe singulier de \mathcal{W} . Chacune de ces applications élémentaires, et par conséquent également ψ_{α} , envoie sommet sur sommet.

Le cocycle strictement positif $-u$ de K définit, de la même façon, un représentant topologique (f, Γ) de l'automorphisme inverse α^{-1} . Mais ce représentant ne sera pas nécessairement un bon réseau ferroviaire invariant, ni même en fait un représentant efficace. En effet, dans le cas où le 2-complexe K n'admet pas de structure de surface branchée dynamique compatible avec l'orientation de ses arêtes, on obtient une annulation pour un itéré de (f, Γ) . C'est une conséquence de l'impossibilité de lisser le 2-complexe de façon compatible avec l'orientation des arêtes.

Ainsi des annulations apparaissent pour un certain f^k , $k \geq 1$, alors que tout ψ_{α}^j , $j \geq 1$, est réduite, i.e. localement injective en restriction aux arêtes. On montre par ailleurs que les matrices d'incidence de ψ_{α}^j et de f^j ont même volume pour tout $j \geq 1$. En réduisant f^j à chaque étape, on a une croissance exponentielle moindre pour le volume des matrices d'incidence ainsi

obtenues que pour le volume des matrices d'incidence des ψ^j , lorsque j tend vers l'infini. Puisque les (f^j, Γ) , comme leurs réductions bien évidemment, sont des représentants topologiques des α^{-j} , où $j \geq 1$, tandis que les $(\psi_\alpha^j, \tau_\alpha)$ sont des représentants efficaces des α^j , l'inégalité stricte sur les entropies respectives de α et α^{-1} s'ensuit.

Bibliographie

- [1] E. Alibegović. A combination theorem for relatively hyperbolic groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 37(3) :459–466, 2005.
- [2] Ll. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [3] R. Benedetti and J.M. Gambaudo. On the dynamics of \mathbb{G} -solenoids. Applications to Delone sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(3) :673–691, 2003.
- [4] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [5] R. Benedetti and C. Petronio. A finite graphic calculus for 3-manifolds. *Manuscripta Mathematica*, 88(3) :291–310, 1995.
- [6] M. Bestvina. Questions in geometric group theory. <http://www.math.utah.edu/~bestvina>, 2004.
- [7] M. Bestvina and M. Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. *Journal of Differential Geometry*, 35(1) :85–101, 1992.
- [8] M. Bestvina and M. Feighn. Addendum and correction to : “A combination theorem for negatively curved groups”. *Journal of Differential Geometry*, 43(4) :783–788, 1996.
- [9] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel. The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. I. Dynamics of exponentially-growing automorphisms. *Annals of Mathematics*, 151(2) :517–623, 2000.
- [10] M. Bestvina and M. Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Annals of Mathematics*, 135(1) :1–51, 1992.
- [11] M. Bestvina and M. Handel. Train tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1) :109–140, 1995.
- [12] J.S. Birman. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974. *Annals of Mathematics Studies*, No. 82.
- [13] B.H. Bowditch. Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups. *Acta Mathematica*, 180(2) :145–186, 1998.
- [14] B.H. Bowditch. Relatively hyperbolic groups. Preprint, 1999.
- [15] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Springer-Verlag, 1975. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 470.
- [16] P. Boyland. An analog of Sharkovski’s theorem for twist maps. In *Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987)*, volume 81 of *Contemp. Math.*, pages 119–133. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [17] P. Boyland. Topological methods in surface dynamics. *Topology and its Applications*, 58(3) :223–298, 1994.
- [18] M. Bridson and D. Groves. The quadratic isoperimetric inequality for mapping tori of free group automorphisms II. *ArXiv math.GR/0610332*.
- [19] P. Brinkmann. Hyperbolic automorphisms of free groups. *Geometric and Functional Analysis*, 10(5) :1071–1089, 2000.
- [20] I. Bumagin. The conjugacy problem for relatively hyperbolic groups. *Algebraic and Geometric Topology*, 4(2) :1013–1040, 2004.

- [21] B.G. Casler. An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16 :559–566, 1965.
- [22] A.J. Casson and S.A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [23] J. Christy. Branched surfaces and attractors. I. Dynamic branched surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 336(2) :759–784, 1993.
- [24] H.D. Coldewey, E. Vogt, and H. Zieschang. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Springer-Verlag, 1980. Lecture Notes in Mathematics, vol. 835.
- [25] D.J. Collins and H. Zieschang. Combinatorial group theory and fundamental groups. In *Algebra, VII*, volume 58 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–166, 233–240. Springer, Berlin, 1993.
- [26] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Les groupes hyperboliques de Gromov*. Springer-Verlag, 1990. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441.
- [27] F. Dahmani. Combination of convergence groups. *Geometry and Topology*, 7 :933–963 (electronic), 2003.
- [28] W. de Melo and S. van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [29] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces*. Springer-Verlag, 1976. Lecture Notes in Mathematics, vol. 527.
- [30] W. Dicks and E. Ventura. Irreducible automorphisms of growth rate one. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 88(1-3) :51–62, 1993.
- [31] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geometric and Functional Analysis*, 8(5) :810–840, 1998.
- [32] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque*, 66, 1979.
- [33] D. Fried. The geometry of cross sections to flows. *Topology*, 21(4) :353–371, 1982.
- [34] F.B. Fuller. On the surface of section and periodic trajectories. *American Journal of Mathematics*, 87 :473–480, 1965.
- [35] D. Gabai, G.R. Meyerhoff, and N. Thurston. Homotopy hyperbolic 3-manifolds are hyperbolic. *Annals of Mathematics*, 157(2) :335–431, 2003.
- [36] F. Gautero and M. Heusener. Cohomological characterization of relative hyperbolicity. En cours de rédaction.
- [37] F. Gautero and M. Lustig. Mapping-tori of free group automorphisms are hyperbolic relatively to the polynomially growing subgroups. En cours de rédaction.
- [38] S. Gersten. Geometric automorphisms of a free group of rank at least three are rare. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(1) :27–31, 1983.
- [39] S. Gersten. Cohomological lower bounds for isoperimetric functions on groups. *Topology*, 37(5) :1031–1072, 1998.
- [40] É. Ghys and P. de la Harpe. Editors. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [41] R. Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4, part 2) :1455–1529, 1998.
- [42] R. Gitik. On the combination theorem for negatively curved groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :267–276, 1997.
- [43] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

- [44] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [45] J. Guckenheimer and R.F. Williams. Structural stability of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 50 :59–72, 1979.
- [46] V. Guirardel. Core and intersection number for group action on trees. *ArXiv math.GR/0407206*, 2004.
- [47] T. Hall. Unremovable periodic orbits of homeomorphisms. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 110(3) :523–531, 1991.
- [48] U. Hamenstädt. Word hyperbolic extensions of surface groups. *ArXiv math.GT/0507608*.
- [49] M. Handel and L. Mosher. The expansion factors of an automorphism and its inverse. *ArXiv math.GR/0410015*, 2005.
- [50] M. Handel and L. Mosher. Parageometric outer automorphisms of free groups. *ArXiv math.GR/0410018*, 2005.
- [51] B. Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.
- [52] I. Kapovich. The combination theorem and quasiconvexity. *International Journal of Algebra and Computation*, 11(2) :185–216, 2001.
- [53] O. Kharlampovich and A. Myasnikov. Hyperbolic groups and free constructions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(2) :571–613, 1998.
- [54] E.N. Lorenz. Deterministic non-periodic flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 :130–141, 1963.
- [55] E.N. Lorenz. *On the prevalence of aperiodicity in simple systems*. Springer, 1979. Lecture Notes in Mathematics, vol. 755.
- [56] J. Los. On the conjugacy problem for automorphisms of free groups. *Topology*, 35(3) :779–808, 1996. With an addendum by the author.
- [57] J. Los and Z.H. Nitecki. Edge-transitive graph automorphisms and periodic surface homeomorphisms. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 9(9) :1803–1813, 1999.
- [58] J. Los and Z.H. Nitecki. Embedding groups of graph automorphisms in surfaces. *Topology*, 43(1) :49–69, 2004.
- [59] M. Lustig. Structure and conjugacy for automorphisms of free groups I. *Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint series*, 130, 2000.
- [60] M. Lustig. Structure and conjugacy for automorphisms of free groups II. *Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint series*, 4, 2001.
- [61] R.C. Lyndon and P.E. Schupp. *Combinatorial group theory*, volume 89 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [62] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, second edition, 2004.
- [63] B. Maskit. On Klein’s combination theorem. III. In *Advances in the Theory of Riemann Surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969)*, Annals of Mathematics Studies, No. 66, pages 297–316. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.
- [64] B. Maskit. *Kleinian groups*, volume 287 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [65] B. Maskit. On Klein’s combination theorem. IV. *Transactions of the American Mathematical Society*, 336(1) :265–294, 1993.

- [66] H. Masur and Y. Minsky. Geometry of the complex of curves II : Hierarchical structures. *Geometry and Functionnal Analysis*, 10(4) :902–974, 2000.
- [67] S.V. Matveev. Special skeletons of piecewise linear manifolds. *Mat. Sb. (N.S.)*, 92(134) :282–293, 344, 1973. english translation in *Math. USSR-Sb.* 21 (1973), 279–291 (1974).
- [68] S.V. Matveev. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003. ACM-monographs, Vol. 9.
- [69] L. Mosher. A hyperbolic-by-hyperbolic hyperbolic group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 :3447–3455, 1997.
- [70] J. Nielsen. Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flächen I. *Acta Mathematica*, 50 :189–358, 1927.
- [71] Y. Ollivier. Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups. *Geometric and Functional Analysis*, 14(3) :595–679, 2004.
- [72] D.V. Osin. Relatively hyperbolic groups : intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 179(843), 2006.
- [73] J-P. Otal. Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 235, 1996.
- [74] R. Penner and J.L. Harer. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [75] C. Petronio. Homepage : <http://www.dm.unipi.it/pages/petronio>.
- [76] C. Petronio. A combinatorial approach to 3-manifolds. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II*, 49 :177–186, 1997.
- [77] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Paris, 1881.
- [78] D. Rebbeci. Algorithmic properties of relatively hyperbolic groups. 2001. PhD Thesis, Rutgers University.
- [79] E. Rips and Z. Sela. Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. *Annals of Mathematics*, 146(1) :53–109, 1997.
- [80] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20 :167–192, 1971.
- [81] O.M. Šarkovs’kiĭ. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Akademiya Nauk Ukrainskoĭ SSR. Institut Matematiki. Ukrainskiĭ Matematicheskii Zhurnal*, 16 :61–71, 1964.
- [82] S. Schwartzman. Asymptotic cycles. *Annals of Mathematics*, 66 :270–284, 1957.
- [83] P. Scott and T. Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.
- [84] M. Shub. Stabilité globale des systèmes dynamiques. *Astérisque*, 56, 1978.
- [85] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73 :747–817, 1967.
- [86] E.H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [87] J.R. Stallings. Topologically unrealizable automorphisms of free groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 84(1) :21–24, 1982.
- [88] J.R. Stallings. Topology of finite graphs. *Inventiones Mathematicae*, 71(3) :551–565, 1983.
- [89] A. Szczepański. Relatively hyperbolic groups. *The Michigan Mathematical Journal*, 45(3) :611–618, 1998.
- [90] R. Thom. Sur les travaux de Stephen Smale. In *Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966)*, pages 25–28. Izdat. “Mir”, Moscow, 1968.

- [91] R.F. Williams. Expanding attractors. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 43 :169–203, 1974.
- [92] R.F. Williams. The structure of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 50 :73–99, 1979.

ANNEXE A

Géométrie des groupes

[G6] *Geodesics in trees of hyperbolic and relatively hyperbolic groups.*

[G5] *Relative hyperbolicity of (one ended hyperbolic)-by-cyclic groups.*

[G4] *Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces.*

Geodesics in trees of hyperbolic and relatively hyperbolic groups

Abstract : We present a careful approximation of the geodesics in trees of hyperbolic or relatively hyperbolic groups. As an application we prove a combination theorem for finite graphs of relatively hyperbolic groups, with both Farb and Gromov definitions, so providing an answer to one of the problems raised in Bestvina's list.

Relative hyperbolization of (one ended hyperbolic)-by-cyclic groups

with M. Lustig (Aix-Marseille III)

Abstract : We show that the semi-direct product of a one-ended torsion-free word-hyperbolic group with \mathbb{Z} , given through an automorphism $\alpha : G \rightarrow G$, is a hyperbolic group relative to certain canonical subgroups of G on which α acts periodically or with linear growth.

Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces

Abstract : This paper deals with the geometry of metric “two dimensional” spaces, equipped with semi-flows admitting transverse foliations by forests. Our main theorem relates the Gromov-hyperbolicity of such spaces, for instance mapping-telescopes of \mathbb{R} -trees, with the dynamical behaviour of the semi-flow. As a corollary, we give a new proof of the following theorem : *Let α be an hyperbolic injective endomorphism of the rank n free group F_n . If the image of α is a malnormal subgroup of F_n , then $G_\alpha = F_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ is a hyperbolic group.*

ANNEXE B

Dynamique topologique

[G3] *Patterns and minimal dynamics for graph-maps.*

[G2] *Cross-sections to semi-flows on 2-complexes.*

Patterns and minimal dynamics for graph-maps

with Ll. Alsedà (U.A.B., Barcelone), J. Guaschi (Université de Toulouse III), J. Los (Université d'Aix-Marseille I), F. Mañosas (U.A.B., Barcelone) et P. Mumbrú (Université de Barcelone).

Abstract : We study the rigidity problem for periodic orbits of (continuous) graph maps belonging to the same homotopy equivalence class. Since the underlying spaces are not necessarily homeomorphic, we define a new notion of *pattern* which enables us to compare periodic orbits of self-maps of homotopy-equivalent spaces. This definition unifies the known notions of pattern for other spaces. The two main results of the paper are : given a free group endomorphism, we study the persistence under homotopy of the periodic orbits of its topological representatives, and in the irreducible case, we prove the minimality (within the homotopy class) of the set of periodic orbits of its efficient representatives.

Cross-sections to semi-flows on 2-complexes

Abstract : A *dynamical 2-complex* is a 2-complex equipped with a set of combinatorial properties which allow to define non-singular semi-flows on the complex. After giving a combinatorial characterization of the dynamical 2-complexes which define *hyperbolic attractors* when embedded in compact 3-manifolds, one gives an *effective criterion* for the existence of *cross-sections* to the semi-flows on these 2-complexes. In the embedded case, this gives an effective criterion of existence of cross-sections to the associated hyperbolic attractors. We present a similar criterion for *boundary-tangent flows* on compact 3-manifolds which are constructed by means of our dynamical 2-complexes.

ANNEXE C

Automorphismes du groupe libre

[G1] *Combinatorial mapping-tori, branched surfaces and free group automorphisms.*

Combinatorial mapping-tori, branched surfaces and free group automorphisms

Abstract : The core of the paper is a combinatorial construction of the mapping-torus of a graph-map. When applied to a particular kind of graph-map, the resulting 2-complex is a standard spine equipped with a structure of dynamic branched surface (and also a dynamical 2-complex). As an application, we give a characterization of the geometric automorphisms in a certain class of (not necessarily irreducible) free group automorphisms. When the automorphism considered is geometric, then it is induced by a pseudo-Anosov homeomorphism without interior singularities and our construction gives a combinatorial description of the invariant unstable lamination of the suspension flow.