

LES ALGÈBRES DE LIE NILPOTENTES REELLES ET COMPLEXES DE DIMENSION 6

André CEREZO (1983)

I) INTRODUCTION

La classification à isomorphisme près des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sur un corps k n'est pas connue, même lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Citons à ce sujet des résultats comme ceux de [6], [7], [8], [9], [11], [12]. Si l'on appelle scindée une algèbre de Lie qui est la somme directe d'algèbres de dimension plus petites, il n'en existe pas de non scindée de dimension 2, il n'y en a qu'une de dimension 3 (c'est l'algèbre de Heisenberg, soit $\mathcal{N}_3$), et de nouveau une seule de dimension 4, soit $\mathcal{N}_4$. Le cas de la dimension 5 a été élucidé par J. Dixmier dans [3] : il y en a 6 non scindées, que l'on notera ici $\mathcal{N}_{5,j}$ ($j = 1, \dots, 6$). Jusque-là le classement vaut sur un corps quelconque de caractéristique nulle.

Dès la dimension 7, il est connu qu'il existe des familles "continues" d'algèbres deux à deux non isomorphes; cela résulte par exemple des travaux de M. Vergne sur les composantes irréductibles de la variété des structures de Lie sur un espace vectoriel (cf. [12]). On donne au paragraphe IV l'exemple d'une telle famille qui vaut pour tout k (soit $\mathcal{N}_\lambda$, $\lambda \in k$).

La dernière dimension où il peut n'exister qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'algèbres nilpotentes est donc 6, et c'est en effet le cas, au moins quand $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Plusieurs listes ont été déjà publiées. L'auteur a connaissance, par ordre chronologique, de [10], [4], [11], [8] et [5]. [10] contient des erreurs et des algèbres scindées; les valeurs des paramètres dans [4] sont mal fixées; [11] est la première liste exacte sur $\mathbb{C}$; dans [8] il manque une classe : celle qui est notée ici $\mathcal{N}_{6,19}$; outre une liste exacte sur $\mathbb{R}$, [5] donne pour chaque algèbre le groupe connexe et simplement connexe associé, les orbites des représentations adjointe et coadjointe, et la mesure de Plancherel, mais

sans démonstration. L'auteur dit que sa classification repose sur un théorème de [9].

On donne ici une démonstration élémentaire de la classification des algèbres nilpotentes de dimension 6 sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Le calcul est fait sur $\mathbb{R}$, l'adaptation à $\mathbb{C}$ résultant de remarques entre parenthèses. Sur $\mathbb{R}$, il y a 24 classes d'algèbres non scindées, et 20 seulement sur $\mathbb{C}$. Il y en a 10 scindées dans les deux cas. De chacune on donne un représentant $\mathcal{N}_{6,j}$ ($j = 1, \dots, 24$). Elles sont notées par ordre de "commutativité croissante", en commençant par les algèbres "filiformes" (d'ordre de nilpotence maximal, cf. [12]; il y en a 5).

La liste est rassemblée au paragraphe II, où figure aussi la correspondance avec la liste de [5]. On cite aussi pour chacune son "poumon" $\mathcal{P}$, ou support du centre de l'algèbre enveloppante (défini et étudié dans [1], donné par une base explicite (on écrit $\mathcal{P} = \langle \cdot, \dots, \cdot \rangle$), et un système de générateurs algébriques du corps des fractions $\mathcal{C}$ du centre de l'algèbre enveloppante, mais sans démonstration (on note $\mathcal{C} = k\{\cdot, \dots, \cdot\}$).

On appellera type d'une algèbre $\mathcal{N}$ la donnée des dimensions sur k des idéaux caractéristiques non triviaux appartenant aux trois suites classiques (dans cet ordre) : la suite dérivée ($\mathcal{N}^{(p)} = [\mathcal{N}^{(p-1)}, \mathcal{N}^{(p-1)}], \mathcal{N}^{(0)} = \mathcal{N}$), la suite centrale descendante ($\mathcal{C}^p \mathcal{N} = [\mathcal{N}, \mathcal{C}^{p-1} \mathcal{N}], \mathcal{C}^0 \mathcal{N} = \mathcal{N}$), et la suite centrale ascendante ($\mathcal{C}_p \mathcal{N} / \mathcal{C}_{p-1} \mathcal{N}$ est le centre de $\mathcal{N} / \mathcal{C}_{p-1} \mathcal{N}$, $\mathcal{C}_0 \mathcal{N} = \{0\}$). Ce type est évidemment invariant par isomorphisme. Un autre invariant est le défaut de commutativité d introduit par J. Dixmier [2], demi-dimension des orbites génériques de la représentation coadjointe, qui, en dimension 6, ne peut prendre que les valeurs 0, 1 et 2 : $\mathcal{C}$ a alors pour degré de transcendance sur k l'entier $6-2d$, soit 6, 4 ou 2 respectivement.

II) LA LISTE

On définit chaque algèbre par les crochets entre éléments d'une base de Jordan-Hölder $\{X_1, \dots, X_n\}$; ils sont antisymétriques et ceux qui sont omis sont nuls. On note (2/2, 1/1, 3) par exemple le type d'une algèbre telle que $\dim \mathcal{N}' = 2$, $\dim \mathcal{N}'' = 0$; $\dim \mathcal{C}^1 \mathcal{N} = 2$, $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{N} = 1$, $\dim \mathcal{C}^3 \mathcal{N} = 0$; $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} = 1$, $\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{N} = 3$, $\dim \mathcal{C}_3 \mathcal{N} = \dim \mathcal{N}$. Les autres notations utilisées

ont été définies au paragraphe précédent.

A/ Rappelons d'abord ici la définition de $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_4$ et $\mathcal{N}_{5,j}$
($j = 1, \dots, 6$).

- $\mathcal{N}_3$: $[X_1, X_2] = X_3$ (1/1/1), $d=1$, $\mathcal{P} = \langle X_3 \rangle$, $\mathcal{E} = k\{X_3\}$
- $\mathcal{N}_4$: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$ (2/2, 1/1, 2), $d=1$
 $\mathcal{P} = \langle X_2, X_3, X_4 \rangle$, $\mathcal{E} = k\{X_4, X_3^2 - 2X_2X_4\}$
- $\mathcal{N}_{5,1}$: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_1, X_4] = X_5$, $[X_2, X_3] = X_5$
(3/3, 2, 1/1, 2, 3), $d=2$, $\mathcal{P} = \langle X_5 \rangle$, $\mathcal{E} = k\{X_5\}$
- $\mathcal{N}_{5,2}$: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_1, X_4] = X_5$
(3/3, 2, 1/1, 2, 3), $d=1$, $\mathcal{P} = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{X_5, X_4^2 - 2X_3X_5, X_4^3 - 3X_3X_4X_5 + 3X_2X_5^2\}$
- $\mathcal{N}_{5,3}$: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$
(3/3, 2/2, 3), $d=1$, $\mathcal{P} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{X_4, X_5, X_3^2 - 2X_2X_4 + 2X_1X_5\}$
- $\mathcal{N}_{5,4}$: $[X_1, X_2] = X_4$, $[X_1, X_4] = X_5$, $[X_2, X_3] = X_5$
(2/2, 1/1, 3), $d=2$, $\mathcal{P} = \langle X_5 \rangle$, $\mathcal{E} = k\{X_5\}$
- $\mathcal{N}_{5,5}$: $[X_1, X_2] = X_4$, $[X_1, X_3] = X_5$
(2/2/2), $d=1$, $\mathcal{P} = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{X_4, X_5, X_3X_4 - X_2X_5\}$
- $\mathcal{N}_{5,6}$: $[X_1, X_2] = X_5$, $[X_3, X_4] = X_5$
(1/1/1), $d=2$, $\mathcal{P} = \langle X_5 \rangle$, $\mathcal{E} = k\{X_5\}$

B/ La liste précédente contient toutes les algèbres de Lie nilpotentes non scindées de dimension ≤ 5 (sauf k). On en déduit immédiatement la liste des algèbres scindées de dimension ≤ 6 (on n'a pas noté $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$, évidents) :

en dimension ≤ 3 : k , k^2 et k^3 (de type $\emptyset$), et $d = 0$

en dimension 4 : $\mathcal{N}_3 \oplus k$ (1/1/2), $d=1$; et k^4 ($\emptyset$), $d=0$

en dimension 5 : $\mathcal{N}_4 \oplus k$ (2/2, 1/2, 3), $d=1$;
 $\mathcal{N}_3 \oplus k^2$ (1/1/3), $d=1$; et k^5 ($\emptyset$), $d=0$

en dimension 6 :

$\mathcal{N}_{5,1} \oplus k$ (3/3, 2, 1/2, 3, 4), $d=2$; $\mathcal{N}_{5,2} \oplus k$ (3/3, 2, 1/2, 3, 4), $d=1$;

$\mathcal{N}_{5,3} \oplus k$ (3/3, 2/3, 4), $d=1$; $\mathcal{N}_{5,4} \oplus k$ (2/2, 1/2, 4), $d=2$;

$\mathcal{N}_{5,5} \oplus k$ (2/2/3), $d=1$; $\mathcal{N}_{5,6} \oplus k$ (1/1/2), $d=2$;

$\mathcal{N}_4 \oplus k^2$ (2/2, 1/3, 4), $d=1$; $\mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$ (2/2/2), $d=2$;

$\mathcal{N}_3 \oplus k^3$ (1/1/4), $d=1$; k^6 ($\emptyset$), $d=0$

A la vue des invariants écrits, la liste n'est pas redondante.

C/ On donne ici la liste des algèbres de Lie nilpotentes non scindées de dimension 6 sur $\mathbb{R}$, dont la validité est établie au paragraphe suivant (§ III). Elles sont notées $\mathcal{N}_{6,j}$ ($j=1, \dots, 24$) et pour chacune on donne (dans cet ordre) sa définition, son type, son défaut, son poumon $\mathcal{P}$, et $\mathcal{E}$.

Notons ici que sur $\mathbb{C}$ la classification est la même, à l'exception des quatre isomorphismes suivants :

$\mathcal{N}_{6,7} \simeq \mathcal{N}_{6,6}$; $\mathcal{N}_{6,14} \simeq \mathcal{N}_{6,12}$; $\mathcal{N}_{6,16} \simeq \mathcal{N}_{6,15}$;

$\mathcal{N}_{6,23} \simeq \mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$

qui réduisent à 20 le nombre de classes sur ce corps.

Les seules algèbres non scindées complètement transverses au sens de [1] sont k , $\mathcal{N}_{5,3}$ et $\mathcal{N}_{6,21}$. Les algèbres complètement verticales au sens de [1] sont $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_{5,1}$, $\mathcal{N}_{5,4}$, $\mathcal{N}_{5,6}$, $\mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$, et $\mathcal{N}_{6,j}$ pour $j=3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 23, 24$.

- $\mathcal{N}_{6,1}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5, [X_2, X_5] = X_6,$
 $[X_3, X_4] = -X_6$
 $(4, 1/4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, 2X_5^3 + 3X_4^2X_6 - 6X_3X_5X_6 - 6X_1X_6^2\}$
- $\mathcal{N}_{6,2}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = X_6, [X_3, X_4] = -X_6$
 $(4, 1/4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_4^2 - 2X_3X_5 - 2X_1X_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,3}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_5,$
 $[X_2, X_4] = X_6$
 $(4/4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_5^3 - 3X_4X_5X_6 + 3X_3X_6^2\}$
- $\mathcal{N}_{6,4}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_6$
 $(4/4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_5^2 - 2X_4X_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,5}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$
 $(4/4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4), d=1, \mathcal{P} = \langle X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_5^2 - 2X_4X_6, X_5^3 - 3X_4X_5X_6 + 3X_3X_6^2, X_4^2 - 2X_3X_5 + 2X_2X_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,6}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_5] = X_6$
 $(4/4, 3, 1/1, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_4^2 + X_5^2 - 2X_3X_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,7}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_5] = -X_6$
 $(4/4, 3, 1/1, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{X_6, X_4^2 - X_5^2 - 2X_3X_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,8}$: $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_6$
 $(4/4, 3, 1/2, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle X_5, X_6 \rangle, \mathcal{C} = k\{X_5, X_6\}$

- $\mathcal{N}_{6,9}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_5, [x_2, x_5] = x_6, [x_3, x_4] = x_6$
 $(3/3, 2, 1/1, 2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_1, x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_5^3 - 3x_4x_5x_6 - 3x_1x_6^2\}$
- $\mathcal{N}_{6,10}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_2, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = x_6$
 $(3/3, 2, 1/1, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_3 - x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_5^2 - 2x_4x_6 + 2x_3x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,11}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_2, x_3] = x_6$
 $(3/3, 2, 1/1, 3, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_5^2 - 2x_4x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,12}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_5, [x_2, x_4] = x_6$
 $(3/3, 2/2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{C} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,13}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_6, [x_2, x_4] = x_5$
 $(3/3, 2/2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{C} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,14}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_6, [x_2, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = -x_5$
 $(3/3, 2/2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{C} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,15}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_6, [x_3, x_5] = x_6$
 $(3/3, 1/1, 3), d=2, \mathcal{P} = \langle x_1, x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_4^2 + x_5^2 + 2x_1x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,16}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_6, [x_3, x_5] = -x_6$
 $(3/3, 1/1, 3), d=2, \mathcal{P} = \langle x_1, x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_4^2 - x_5^2 + 2x_1x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,17}$: $[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_2, x_4] = x_6$
 $(3/3, 1/1, 3), d=2, \mathcal{P} = \langle x_3, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{C} = k\{x_6, x_5^2 - 2x_3x_6\}$

- $\mathcal{N}_{6,18} : [x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_4] = x_6$
 $(3/3, 1/2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{E} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,19} : [x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_6, [x_2, x_3] = x_6$
 $(3/3, 1/2, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{E} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,20} : [x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_1, x_4] = x_6$
 $(3/3, 1/2, 4), d=1, \mathcal{P} = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{x_5, x_6, x_4^2 - 2x_2x_6, x_4x_5 - x_3x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,21} : [x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_3] = x_5, [x_2, x_3] = x_6$
 $(3/3/3), d=1, \mathcal{P} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{x_4, x_5, x_6, x_3x_4 - x_2x_5 + x_1x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,22} : [x_1, x_2] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_3, x_4] = x_6$
 $(2/2, 1/1, 4), d=2, \mathcal{P} = \langle x_2, x_5, x_6 \rangle$
 $\mathcal{E} = k\{x_6, x_5^2 - 2x_2x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,23} : [x_1, x_2] = x_5, [x_1, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = x_6, [x_3, x_4] = -x_5$
 $(2/2/2), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{E} = k\{x_5, x_6\}$
- $\mathcal{N}_{6,24} : [x_1, x_2] = x_5, [x_1, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = x_6$
 $(2/2/2), d=2, \mathcal{P} = \langle x_5, x_6 \rangle, \mathcal{E} = k\{x_5, x_6\}$

D/ On donne enfin ici la correspondance entre cette liste et celle de [5] (pour les correspondances avec les autres listes citées, on peut consulter l'appendice de [5]).

On note $\{Y_1, \dots, Y_6\}$ une base de l'algèbre $G_{6,k}$ ($k=1, \dots, 24$) de [5] dans laquelle les crochets s'écrivent comme dans cet ouvrage, et on donne un changement de base qui fournit un isomorphisme de $\mathcal{N}_{6,j}$ sur $G_{6,k}$.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{N}_{6,1} \simeq G_{6,14} \\ \mathcal{N}_{6,2} \simeq G_{6,12} \end{array} \right\} : Y_1 = -x_6, Y_2 = x_5, Y_3 = x_4, Y_4 = x_3, Y_5 = x_2, Y_6 = x_1$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{6,3} &\simeq G_{6,13} \\ \mathcal{N}_{6,4} &\simeq G_{6,11} \\ \mathcal{N}_{6,5} &\simeq G_{6,10} \\ \mathcal{N}_{6,6} &\simeq G_{6,9} \end{aligned} \right\} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_4, Y_4 = X_3, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,7} \simeq G_{6,8} : Y_1 = \frac{1}{4}X_6, Y_2 = \frac{1}{4}(X_4 + X_5), Y_3 = \frac{1}{4}(X_4 - X_5), \\ Y_4 = \frac{1}{2}X_3, Y_5 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), Y_6 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$$

$$\mathcal{N}_{6,8} \simeq G_{6,24} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_4, Y_4 = X_3, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,9} \simeq G_{6,7} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_4, Y_4 = -X_3, Y_5 = -X_1, Y_6 = X_2$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{6,10} &\simeq G_{6,3} \\ \mathcal{N}_{6,11} &\simeq G_{6,2} \end{aligned} \right\} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_3, Y_3 = X_5, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,12} \simeq G_{6,22} : Y_1 = X_5, Y_2 = -X_6, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_1, Y_6 = -X_2$$

$$\mathcal{N}_{6,13} \simeq G_{6,21} : Y_1 = X_5, Y_2 = X_6, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,14} \simeq G_{6,23} : Y_1 = -X_5, Y_2 = X_6, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,15} \simeq G_{6,6} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_4, Y_4 = X_3, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,16} \simeq G_{6,4} : Y_1 = 2X_6, Y_2 = X_4 - X_5, Y_3 = X_4 + X_5, Y_4 = X_2 - X_3, \\ Y_5 = X_2 + X_3, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,17} \simeq G_{6,5} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_4, Y_3 = X_5, Y_4 = X_2, Y_5 = X_3, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,18} \simeq G_{6,19} : Y_1 = X_5, Y_2 = X_6, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,19} \simeq G_{6,20} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,20} \simeq G_{6,18} : Y_1 = X_5, Y_2 = X_6, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,21} \simeq G_{6,15} : Y_1 = X_5, Y_2 = X_6, Y_3 = X_4, Y_4 = X_3, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,22} \simeq G_{6,1} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_4, Y_3 = X_3, Y_4 = X_5, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,23} \simeq G_{6,17} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_3, Y_4 = X_4, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

$$\mathcal{N}_{6,24} \simeq G_{6,16} : Y_1 = X_6, Y_2 = X_5, Y_3 = X_4, Y_4 = X_3, Y_5 = X_2, Y_6 = X_1$$

III) LA CLASSIFICATION

Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 sur le corps $\mathbb{R}$. On peut toujours inclure les idéaux $\mathcal{C}^p \mathcal{N}$ ($p=1,2,\dots$) de la suite centrale descendante dans une suite de Jordan-Hölder d'idéaux $\mathcal{I}_j = \langle X_j, X_{j+1}, \dots, X_6 \rangle$ ($j=1,\dots,6$), où $\{X_1, \dots, X_6\}$ est une base convenable de $\mathcal{N}$ telle que $[\mathcal{N}, \mathcal{I}_j] \subset \mathcal{I}_{j+1}$. Dans une telle base, on a :

$$(D) \begin{cases} [X_1, X_2] = a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_2, X_5] = g_6 X_6 \\ [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_3, X_4] = h_5 X_5 + h_6 X_6 \\ [X_1, X_5] = d_6 X_6 & [X_3, X_5] = i_6 X_6 \\ [X_2, X_3] = e_4 X_4 + e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_4, X_5] = j_6 X_6 \end{cases}$$

pour $a_3, \dots, j_6 \in \mathbb{R}$, les crochets étant antisymétriques, et ceux qui sont omis étant nuls. Les relations (D) définissent une structure de Lie si et seulement si les relations de Jacobi sont satisfaites :

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, 6\} \quad [X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0,$$

ce qui s'écrit ici :

$$(J) \begin{cases} e_4 j_6 = 0 & a_3 i_6 + a_4 j_6 = 0 & f_5 d_6 - c_5 g_6 - a_3 h_6 + a_5 j_6 = 0 \\ b_4 d_6 = 0 & h_5 d_6 - c_5 i_6 + b_5 j_6 = 0 & e_4 c_5 - b_4 f_5 + a_4 h_5 = 0 \\ a_3 h_5 = 0 & h_5 g_6 - f_5 i_6 + e_5 j_6 = 0 & e_4 c_6 + e_5 d_6 - b_4 f_6 - b_5 g_6 + a_4 h_6 + a_5 i_6 = 0 \end{cases}$$

Nous allons classer ces algèbres selon leur type, et d'abord selon la dimension de leur dérivée $\mathcal{N}'$, qui est au plus 4.

A) Si $\dim \mathcal{N}' = 4$, donc $a_3 \neq 0$, posant $X'_3 = a_3 X_3 + \dots + a_6 X_6$ on se ramène au cas où $a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, et les relations (J) s'écrivent

$$\begin{cases} e_4 j_6 = 0 & b_5 j_6 = 0 & h_6 = f_5 d_6 - c_5 g_6 \\ b_4 j_6 = 0 & e_5 j_6 = 0 & e_4 c_5 = b_4 f_5 \\ h_5 = 0 & i_6 = 0 & e_4 c_6 + e_5 d_6 = b_4 f_6 + b_5 g_6 \end{cases}$$

Comme $\dim \mathcal{N}' = 4$, b_4 et e_4 ne sont pas tous deux nuls, donc $j_6 = 0$, et posant

$$\begin{aligned} X_1' &= b_4 X_1 + e_4 X_2, \quad X_2' = -e_4 X_1 + b_4 X_2, \quad X_3' = (b_4^2 + e_4^2) X_3 \\ X_4' &= (b_4^2 + e_4^2) \{ (b_4^2 + e_4^2) X_4 + (b_4 b_5 + e_4 e_5) X_5 + (b_4 b_6 + e_4 e_6) X_6 \} \end{aligned}$$

il vient : (sur $\mathbb{K}$ on poserait $X_1' = \bar{b}_4 X_1 + \bar{e}_4 X_2, \dots$)

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = d_6 X_6 \\ [X_2, X_5] = g_6 X_6 & [X_3, X_5] = i_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 \\ [X_3, X_4] = h_5 X_5 + h_6 X_6 & [X_4, X_5] = j_6 X_6 \end{cases}$$

avec de nouveaux scalaires $c_5, \dots, j_6$, toujours astreints à vérifier les conditions précédentes, soit maintenant :

$$j_6 = i_6 = h_5 = f_5 = 0, \quad f_6 = e_5 d_6, \quad h_6 = -c_5 g_6.$$

Ceci s'écrit encore :

$$(D_1) \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = d_6 X_6 & [X_2, X_5] = g_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_6 X_6 & [X_3, X_4] = h_6 X_6 \end{cases}$$

avec les relations

$$(J_1) \quad f_6 = e_5 d_6 \quad \text{et} \quad h_6 = -c_5 g_6$$

Notons que c_5 et e_5 ne sont pas tous deux nuls ($\dim \mathcal{N}' = 4$), et que $\mathcal{N}' = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$ est commutative si et seulement si

$$h_6 = -c_5 g_6 = 0.$$

D'où deux cas, sûrement non isomorphes :

A1) Si $\mathcal{N}'$ n'est pas commutative, posant $X_5' = c_5 X_5 + c_6 X_6$ et $X_6' = -h_6 X_6$, on se ramène aux relations $(D_1) - (J_1)$ avec

$c_5 = g_6 = 1, c_6 = 0, h_6 = -1$, soit :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = X_5 & [X_1, X_5] = d X_6 & [X_2, X_5] = X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = e X_5 + f X_6 & [X_2, X_4] = d e X_6 & [X_3, X_4] = -X_6 \end{cases}$$

où $d, e, f \in \mathbb{R}$ sont arbitraires. Posant alors

$$X_1' = X_1 - d X_2 - d^2 e X_3, \quad X_2' = X_2 + d e X_3, \quad X_3' = X_3 + d e X_4, \quad X_4' = X_4 - d f X_6$$

il vient :

$$(D_1') \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = X_5 & [X_2, X_5] = X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = e X_5 + f X_6 & [X_3, X_4] = -X_6 \end{cases}$$

Toute algèbre nilpotente $\mathcal{N}$ de dimension $\sqrt[6]{6}$ telle que $\mathcal{N}'$ soit de dimension 4 et non commutative est donc isomorphe à l'une des algèbres $\mathcal{N}_{e,f}$ définies par les relations (D_1') . Tout changement de base qui transforme les crochets de $\mathcal{N}_{e,f}$ en ceux de $\mathcal{N}_{e',f'}$, est forcément du type

$$(*) \quad X'_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} X_j \text{ avec } a_{ij}=0 \text{ pour } j < i \text{ et } i \geq 3$$

puisque'un tel isomorphisme doit conserver les idéaux de la suite centrale descendante. On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{44}=a_{11}a_{33} & a_{55}=a_{11}a_{44} & a_{66}=a_{33}a_{44}=a_{22}a_{55} \\ a_{21}a_{44}=0 & a_{21}a_{33}=0 & a_{12}a_{55}=0 & a_{34}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} & a_{22}a_{45}=a_{23}a_{44} \\ a_{35}=a_{11}a_{24}-a_{14}a_{21}+e(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}) & a_{36}=\dots & a_{45}=\dots & a_{46}=\dots & a_{56}=\dots \\ e'a_{55}=ea_{22}a_{33}+a_{21}a_{34} & f'a_{66}+ea_{56}=fa_{22}a_{33}+a_{22}a_{35}+a_{24}a_{33}-a_{23}a_{44} \end{cases}$$

Comme $a_{33} \neq 0$ il vient $a_{21}=0$, et la matrice (a_{ij}) est triangulaire. Comme elle est inversible, on a $a_{ii} \neq 0$ pour tout i , et on voit que e et e' sont nuls simultanément.

- Si $e \neq 0$: $e' = e \frac{a_{22}}{(a_{11})^2}$ et le choix de $a_{22}=a_{11}=e$ ramène au cas $e'=1$, puis un choix convenable de a_{24} au cas $f'=0$, soit :

$$e \neq 0 \Rightarrow \mathcal{N}_{e,f} \simeq \mathcal{N}_{1,0}$$

- Si $e=0$, le même choix de a_{24} ramène à $f'=0$, soit : $\mathcal{N}_{0,f} \simeq \mathcal{N}_{0,0}$

On a ainsi obtenu les algèbres $\mathcal{N}_{6,1}$ et $\mathcal{N}_{6,2}$ de la liste, et toute algèbre de type $(4, \dots / \dots / \dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,1}$ ou

$\mathcal{N}_{6,2}$, qui ne sont pas isomorphes.

A2) Si $\mathcal{N}'$ est commutative, $\mathcal{N}$ vérifie $(D_1)-(J_1)$ avec $h_6=0$, donc $c_5=0$ ou $g_6=0$. Classons ces algèbres suivant la dimension de leur centre:

A2a) Si de plus $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} = 1$, alors

- ou bien $c_5 \neq 0$ donc $g_6=0$ mais $d_6 \neq 0$ (car $X_5 \notin \mathcal{C}_1 \mathcal{N} = \langle X_6 \rangle$),
et la suite centrale descendante a quatre termes non triviaux, puisque

$$[X_1, [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]] = c_5 d_6 X_6 \neq 0$$

- ou bien $c_5 = 0$ et la même suite a au plus trois termes non triviaux.

D'où deux cas sûrement sans isomorphismes entre eux :

• Dans le premier cas, posant $X_5' = c_5 X_5 + c_6 X_6$, $X_6' = c_5 d_6 X_6$, il vient :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6 \\ [X_2, X_3] = eX_5 + fX_6, [X_2, X_4] = eX_6 \quad (e, f \in \mathbb{R} \text{ arbitraires}) \end{cases}$$

Ces algèbres sont toutes de type $(4/4, 3, 2, 1/1, \dots)$, et tout isomorphisme entre deux d'entre elles, conservant la suite centrale descendante est forcément de la même forme (*) que ci-dessus. De plus la relation $[X_2', X_3'] \in \langle X_5', X_6' \rangle$ implique $a_{21} a_{33} = 0$, donc $a_{21} = 0$, et la matrice (a_{ij}) est triangulaire. Par suite les idéaux $J = \langle X_2, \dots, X_6 \rangle$ et $J' = \langle X_2', \dots, X_6' \rangle$ sont nécessairement isomorphes. Or la dérivée de J est de dimension 2 si $e \neq 0$, 1 si $e = 0$ et $f \neq 0$, 0 si $e = f = 0$.

Il y a donc trois cas sans isomorphismes entre eux :

- Si $e \neq 0$, on se ramène à $e = 1$ et $f = 0$ en posant

$$\begin{cases} X_1' = eX_1 + \frac{f}{2e}X_2, X_2' = eX_2, X_3' = e^2X_3, X_4' = e^3X_4 + \frac{e^2f}{2}X_5 + \frac{ef^2}{2}X_6 \\ X_5' = e^4X_5 + e^3fX_6, X_6' = e^5X_6 \end{cases}$$

- Si $e = 0$ mais $f \neq 0$, on se ramène à $f = 1$ en posant

$$X_j' = f^j X_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, 6.$$

On a ainsi obtenu les algèbres $\mathcal{N}_{6,3}$, $\mathcal{N}_{6,4}$ et $\mathcal{N}_{6,5}$ de la liste, et toute algèbre de type $(4/4, 3, 2, 1/1, \dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,3}$,

$\mathcal{N}_{6,4}$ ou $\mathcal{N}_{6,5}$, qui sont deux à deux non isomorphes.

• Dans le second cas, on a $c_5 = h_6 = 0$ mais $e_5 \neq 0$. Ces algèbres sont donc de type $(4/4, 3, 1/1, \dots)$ et en posant $X_5' = e_5 X_5 + e_6 X_6$, on se ramène à

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3 & [X_1, X_4] &= cX_6 & [X_1, X_5] &= dX_6 & [X_2, X_5] &= gX_6 \\ [X_1, X_3] &= X_4 & [X_2, X_3] &= X_5 & [X_2, X_4] &= dX_6 \end{aligned}$$

où c, d, g sont arbitraires, mais astreints à vérifier

$$cg - d^2 \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} = 1).$$

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une matrice inversible de déterminant Δ . Posant

$$\begin{cases} X_1' = \alpha X_1 + \beta X_2, & X_2' = \gamma X_1 + \delta X_2, & X_3' = \Delta X_3 \\ X_4' = \Delta(\alpha X_4 + \beta X_5), & X_5' = \Delta(\gamma X_4 + \delta X_5), & X_6' = \Delta X_6 \end{cases}$$

il vient les mêmes relations que ci-dessus, mais avec des scalaires c', d', g' tels que

$$\begin{pmatrix} c' & d' \\ d' & g' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c & d \\ d & g \end{pmatrix} {}^t M$$

On peut ainsi se ramener à l'un des trois cas

$c=g=1$ et $d=0$; $c=g=-1$ et $d=0$; $c=1, g=-1$ et $d=0$.

(Sur $\mathbb{Q}$ il ne reste que le premier cas). Mais le changement $X_6' = -X_6$ ramène le deuxième cas au premier. On obtient que toute algèbre de

type $(4/4, 3, 1/1, \dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,6}$ ou $\mathcal{N}_{6,7}$.

Bien qu'isomorphes sur $\mathbb{Q}$, $\mathcal{N}_{6,6}$ et $\mathcal{N}_{6,7}$ ne le sont pas sur $\mathbb{R}$, car tout isomorphisme entre elles serait le composé d'un isomorphisme du type précédent (matrice M), et d'un autre conservant X_1 et X_2 modulo $\mathcal{N}' = \langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$, donc aussi $[X_1, X_2] = X_3$ modulo $\langle X_4, X_5, X_6 \rangle$, X_4 modulo $\langle X_5, X_6 \rangle$, et X_5 modulo $\langle X_6 \rangle$, et ce dernier isomorphisme devrait donc conserver $[X_2, X_5]$. On a montré que toute algèbre de type $(4/\dots/1, \dots)$ est isomorphe à l'une des algèbres $\mathcal{N}_{6,j}$ ($j=3, \dots, 7$),

qui sont deux à deux non isomorphes.

A2b) Si de plus $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} \geq 2$ le système $(D_1) - (J_1)$ s'écrit

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = d_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_6 X_6 \\ & & [X_2, X_5] = g_6 X_6 \end{cases}$$

$$\text{avec } c_5 g_6 = 0, f_6 = e_5 d_6 \text{ et } \text{rang} \begin{pmatrix} c_5 & c_6 & f_6 \\ 0 & d_6 & g_6 \end{pmatrix} \leq 1$$

- Si $c_5 = 0$ (donc $e_5 \neq 0$ car $\dim \mathcal{N}' = 4$), posant $X_5' = e_5 X_5 + e_6 X_6$, il vient

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = c X_6 & [X_1, X_5] = d X_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = X_5 & [X_2, X_4] = d X_6 \\ & & [X_2, X_5] = g X_6 \end{cases}$$

avec la condition $\text{rang} \begin{pmatrix} c & d \\ d & g \end{pmatrix} \leq 1$.

Le changement de base déjà utilisé dans le second cas du (A2a) (matrice M) montre que ces algèbres se classent à isomorphisme près par la signature de la matrice $\begin{pmatrix} c & d \\ d & g \end{pmatrix}$ qui est ici de rang 1 ou 0 :

on peut donc toujours se ramener à l'un des trois cas :

$c=1, g=d=0$; $c=-1, g=d=0$; $c=g=d=0$.

Mais le second cas se ramène au premier par le changement $X'_6 = -X_6$, et le troisième cas donnerait $\dim \mathcal{N}' = 3$ (d'ailleurs l'algèbre serait scindée).

Toute algèbre de ce type est donc isomorphe à l'algèbre $\mathcal{N}_{6,8}$ de la liste (en échangeant X_5 et X_6).

- Si $c_5 \neq 0$ donc $g_6 = 0$, en posant $X'_5 = c_5 X_5 + c_6 X_6$ on se ramène à

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 & [X_1, X_4] = X_5 & [X_1, X_5] = dX_6 \\ [X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_3] = eX_5 + fX_6 & [X_2, X_4] = deX_6 \end{cases}$$

avec la condition $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & de \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \leq 1$, soit $d=0$.

Comme $\dim \mathcal{N}' = 4$, on a $f \neq 0$, et posant $X'_6 = eX_5 + fX_6$, on retrouve $\mathcal{N}_{6,8}$.

En conclusion : toute algèbre telle que $\mathcal{N}'$ est commutative et de

dimension 4 et que $\mathcal{E}_1 \mathcal{N}' \geq 2$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,8}$. Et toute

algèbre dont la dérivée est de dimension 4 est isomorphe à l'une des

$\mathcal{N}_{6,j}$ ($j=1, \dots, 8$), qui sont deux à deux non isomorphes.

B) Si $\dim \mathcal{N}' = 3$, on a le système d'équations (D)-(J), avec $a_3 = 0$.

De (J) on peut extraire $a_4 j_6 = b_4 j_6 = e_4 j_6 = 0$, qui implique $j_6 = 0$, puisque $a_4 = b_4 = e_4 = 0$ entraînerait $\dim \mathcal{N}' \leq 2$. Il vient donc :

$$(D_2) \begin{cases} [X_1, X_2] = a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = d_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 & [X_2, X_5] = g_6 X_6 \\ [X_2, X_3] = e_4 X_4 + e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_3, X_4] = h_5 X_5 + h_6 X_6 & [X_3, X_5] = i_6 X_6 \end{cases}$$

avec a_4, b_4, e_4 non tous trois nuls, et les relations

$$(J_2) \begin{cases} h_5 d_6 = c_5 i_6 & h_5 g_6 = f_5 i_6 & f_5 d_6 = c_5 g_6 \\ e_4 c_5 - b_4 f_5 + a_4 h_5 = 0 & e_4 c_6 - b_4 f_6 + a_4 h_6 + e_5 d_6 - b_5 g_6 + a_5 i_6 = 0 \end{cases}$$

Mais la première ligne de (J_2) signifie $\text{rang} \begin{pmatrix} c_5 & f_5 & h_5 \\ d_6 & g_6 & i_6 \end{pmatrix} \leq 1$,

et X_1, X_2, X_3 jouent dans le système $(D_2)-(J_2)$ des rôles symétriques, si bien qu'on peut supposer $a_4 \neq 0$, et posant $X_3' = a_4 X_3 - b_4 X_2 + e_4 X_1$ et $X_4' = a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6$, on se ramène au cas $a_4 = 1$, et $a_5 = a_6 = b_4 = e_4 = 0$.

D'où les crochets

$$(D_2') \begin{cases} [X_1, X_2] = X_4 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = d_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 & [X_2, X_5] = g_6 X_6 \\ [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_3, X_4] = h_5 X_5 + h_6 X_6 & [X_3, X_5] = i_6 X_6 \end{cases}$$

avec les relations, issues de (J_2) :

$$(J_2') \quad h_5 = 0, \quad h_6 = b_5 g_6 - e_5 d_6, \quad \text{rang} \begin{pmatrix} c_5 & f_5 & 0 \\ d_6 & g_6 & i_6 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Remarquons que $\mathcal{N}'$ est commutative. Comme $\dim \mathcal{N}' = 3$ implique $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{N} \leq 2$ et $\dim \mathcal{C}^3 \mathcal{N} \leq 1$, il s'agit donc d'algèbres de type $(3/3, 2, 1/\dots)$, $(3/3, 2/\dots)$, $(3/3, 1/\dots)$ ou $(3/3/\dots)$. On traitera ces quatre cas dans cet ordre.

B1) Une algèbre de type $(3/3, 2, 1/\dots)$ satisfait à $(D_2')-(J_2')$ avec c_5 et f_5 non tous deux nuls, et d_6, g_6, i_6 non tous trois nuls.

Par suite il existe $a \neq 0$ tel que $d_6 = a c_5$, $g_6 = a f_5$ et $i_6 = 0$. Soit :

$$(D_3) \begin{cases} [X_1, X_2] = X_4 & [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_1, X_5] = a c_5 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 & [X_2, X_5] = a f_5 X_6 \\ [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_3, X_4] = a(b_5 f_5 - c_5 e_5) X_6 \end{cases}$$

avec $a \neq 0$, et c_5 et f_5 non tous deux nuls.

On vérifie aisément que

$$\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} = 4 - \text{rang } A, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} b_6 & e_6 & b_5 & e_5 \\ c_6 & f_6 & c_5 & f_5 \\ c_5 & f_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite :

- si $b_5 f_5 \neq c_5 e_5$, on a $\mathcal{C}_1 \mathcal{N} = \langle X_6 \rangle$ et $\mathcal{C}_2 \mathcal{N} = \langle X_5, X_6 \rangle$
- si $b_5 f_5 = c_5 e_5$ mais $\text{rang } A = 3$, on a $\mathcal{C}_1 \mathcal{N} = \langle X_6 \rangle$ et $\dim \mathcal{C}_2 \mathcal{N} = 3$
- si $b_5 f_5 = c_5 e_5$ et $\text{rang } A < 3$, on a $\dim \mathcal{C}_1 \mathcal{N} > 1$

D'où les trois cas suivants, sans isomorphismes entre eux :

B1a) Si $b_5 f_5 - c_5 e_5 = d \neq 0$ le changement de base

$$\begin{cases} X'_1 = f_5 X_1 - c_5 X_2, & X'_2 = -e_5 X_1 + b_5 X_2, & X'_3 = X_3 + \frac{(e_5 b_6 - b_5 e_6)}{ad} X_5 \\ X'_4 = d X_4, & X'_5 = d X_5 + (f_5 b_6 - c_5 e_6) X_6, & X'_6 = ad^2 X_6 \end{cases}$$

nous ramène aux crochets

$$\begin{cases} [X'_1, X'_2] = X_4 & [X'_1, X'_4] = c X_6 & [X'_2, X'_5] = X_6 \\ [X'_1, X'_3] = X_5 & [X'_2, X'_4] = d X_5 + f X_6 & [X'_3, X'_4] = X_6 \end{cases}$$

avec $d \neq 0$, puis le nouveau changement

$$X'_1 = X_1 - c X_3, \quad X'_2 = X_2 - \frac{f}{2} X_3, \quad X'_3 = d X_3, \quad X'_4 = X_4 - \frac{f}{2} X_5, \quad X'_5 = d X_5, \quad X'_6 = d X_6$$

à l'algèbre $\mathcal{N}_{6,9}$ de la liste, et toute algèbre de type
 $(3/3, 2, 1/1, 2, \dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,9}$.

B1b) Si $b_5 f_5 = c_5 e_5$ et $\text{rang } A = 3$, c_5 et f_5 ne sont pas tous deux nuls,

et il existe donc $a' \in \mathbb{R}$ tel que $b_5 = a' c_5$ et $e_5 = a' f_5$. De plus X_1 et X_2 jouent dans le système (D_3) des rôles symétriques et on peut donc supposer $c_5 \neq 0$. Par le changement de base

$$X'_2 = X_2 - \frac{f_5}{c_5} X_1, \quad X'_3 = X_3 - a' X_4, \quad X'_5 = c_5 X_5 + c_6 X_6, \quad X'_6 = ac_5^2 X_6$$

on se ramène au système

$$(D'_3) \begin{cases} [X'_1, X'_2] = X_4 & [X'_1, X'_4] = X_5 \\ [X'_1, X'_3] = b X_6 & [X'_2, X'_4] = f X_6 \\ [X'_2, X'_3] = e X_6 & [X'_1, X'_5] = X_6 \end{cases} \quad \text{avec rang} \begin{pmatrix} b & e & 0 & 0 \\ 0 & f & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ soit } e \neq 0.$$

Posant alors

$$X'_1 = e X_1, \quad X'_2 = X_2, \quad X'_3 = e^2 X_3 - be^2 X_5, \quad X'_4 = e X_4, \quad X'_5 = e^2 X_5, \quad X'_6 = e^3 X_6$$

il vient :

$$[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_2, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = g x_6$$

où $g = fe^{-2}$ est arbitraire. Si $g \neq 0$ on se ramène à $g=1$ en posant

$$x'_1 = g x_1, x'_2 = g x_2, x'_3 = g^3 x_3, x'_4 = g^2 x_4, x'_5 = g^3 x_5, x'_6 = g^4 x_6.$$

On obtient ainsi les algèbres $\mathcal{N}_{6,10}$ et $\mathcal{N}_{6,11}$ de la liste.

Tout isomorphisme entre $\mathcal{N}_{6,10}$ et $\mathcal{N}_{6,11}$, devant échanger leurs idéaux caractéristiques, serait encore du type (*) précédent, puisqu'elles sont toutes deux de type (3/3, 2, 1/1, 3, 4). D'où les relations

$$a_{44} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad a_{45} = a_{11} a_{24} - a_{14} a_{21} \quad a_{46} = \dots$$

$$a_{11} a_{34} = 0 \quad a_{11} a_{35} + a_{12} a_{33} + a_{12} a_{34} = 0 \quad a_{55} = a_{11} a_{44} \quad a_{56} = \dots$$

$$a_{66} = a_{11} a_{55} \quad a_{21} a_{34} = 0 \quad a_{21} a_{44} = 0 \quad a_{21} a_{55} = 0$$

$$a_{21} a_{45} + a_{22} a_{44} = 0 \quad a_{66} = \dots \quad \text{et} \quad a_{33} a_{44} a_{55} a_{66} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \neq 0$$

qui impliquent $a_{21} = 0$, donc que la matrice (a_{ij}) est triangulaire,

et par suite $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ et $a_{44} \neq 0$, ce qui est impossible car

$$a_{22} a_{44} = 0.$$

Donc toute algèbre de type (3/3, 2, 1/1, 3, ...) est isomorphe à

$\mathcal{N}_{6,10}$ ou $\mathcal{N}_{6,11}$ qui ne sont pas isomorphes.

B1c) Si $b_5 f_5 = c_5 e_5$ et $\text{rang } A < 3$, c_5 et f_5 ne sont quand même pas tous

deux nuls puisque $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{N} = 2$, et le même calcul qu'au début du paragraphe (B1b) nous ramène aux relations (D'_3) , mais cette fois-ci avec $e=0$. On peut encore se ramener à $b=0$ (en posant $x'_3 = x_3 - b x_5$), d'où les crochets

$$[x_1, x_2] = x_4, [x_1, x_4] = x_5, [x_1, x_5] = x_6, [x_2, x_4] = f x_6$$

qui sont ceux d'une algèbre scindée ($\langle x_3 \rangle$ est facteur direct).

Ainsi, toute algèbre de type (3/3, 2, 1/...) non scindée est isomorphe

à $\mathcal{N}_{6,9}$, $\mathcal{N}_{6,10}$ ou $\mathcal{N}_{6,11}$, qui sont deux à deux non isomorphes.

B2) Une algèbre de type $(3/3, 2/\dots)$ satisfait à $(D'_2) - (J'_2)$

avec $d_6=g_6=i_6=0$, donc aussi $h_5=h_6=0$, mais $\text{rang} \begin{pmatrix} c_5 & f_5 \\ c_6 & f_6 \end{pmatrix} = 2$, soit :

$$\begin{aligned} [X_1, X_3] &= b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_1, X_4] &= c_5 X_5 + c_6 X_6 \\ [X_1, X_2] &= X_4 & & (c_5 f_6 \neq f_5 c_6) \\ [X_2, X_3] &= e_5 X_5 + e_6 X_6 & [X_2, X_4] &= f_5 X_5 + f_6 X_6 \end{aligned}$$

Posant $X'_5 = f_5 X_5 + f_6 X_6$ et $X'_6 = c_5 X_5 + c_6 X_6$, on se ramène au cas où $c_6 = f_5 = 1$ et $c_5 = f_6 = 0$, avec de nouveaux scalaires b_5, b_6, e_5, e_6 ; puis le changement $X'_3 = X_3 - e_5 X_4$ donne

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_4, & [X_1, X_3] &= a X_5 + b X_6, & [X_2, X_3] &= c X_6, & [X_1, X_4] &= X_6, \\ [X_2, X_4] &= X_5. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{N}_{a,b,c}$ une telle algèbre ($a, b, c \in \mathbb{R}$). On peut supposer a, b, c non tous trois nuls (car $\langle X_3 \rangle$ est facteur direct de $\mathcal{N}_{0,0,0}$) et $\mathcal{N}_{a,b,c}$ est de type $(3/3, 2/2, 4)$. Donc tout changement de base

$$X'_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} X_j \quad (i=1, \dots, 6)$$

transformant les crochets de $\mathcal{N}_{a,b,c}$ en ceux de $\mathcal{N}'_{a',b',c'}$ doit conserver les idéaux caractéristiques $\langle X_5, X_6 \rangle$, $\langle X_4, X_5, X_6 \rangle$ et $\langle X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$, donc vérifier

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i=3, j<3; \quad i=4, j<4; \quad i=5 \text{ ou } 6, j<5.$$

On obtient les relations :

$$\begin{aligned} a_{44} &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} & a_{45} &= a_{12} a_{24} + a(a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}) \\ a_{46} &= a_{11} a_{24} - a_{14} a_{21} + b(a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}) + c(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) \\ a_{65} &= a_{12} a_{44} & a_{66} &= a_{11} a_{44} & a_{56} &= a_{21} a_{44} & a_{55} &= a_{22} a_{44} \\ c' a_{65} &= a_{22} a_{34} + a a_{21} a_{33} & c' a_{66} &= a_{21} a_{34} + b a_{21} a_{33} + c a_{22} a_{33} \\ a' a_{55} + b' a_{65} &= a_{12} a_{34} + a a_{11} a_{33} & a' a_{56} + b' a_{66} &= a_{11} a_{34} + b a_{11} a_{33} + c a_{12} a_{33} \\ (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33} a_{44} & & (a_{55} a_{66} - a_{56} a_{65}) & \neq 0 \end{aligned}$$

Posant $a_{11} = \alpha$, $a_{22} = \beta$, $a_{33} = \gamma$, $a_{12} = x$, $a_{21} = y$, et $\alpha\beta - xy = \delta$, il vient :

$$a_{44}=\delta, a_{55}=\beta\delta, a_{66}=\alpha\delta, a_{56}=\delta\gamma, a_{65}=\delta x$$

(d'où la condition $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$) et de plus $a_{45}=\dots, a_{46}=\dots$, et

$$(1) \begin{cases} \delta xc' - \beta a_{34} = a\gamma\gamma \\ \delta \alpha c' - \gamma a_{34} = b\gamma\gamma + c\beta\gamma \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \beta \delta a' + \delta x b' = x a_{34} + a\alpha\gamma \\ \delta \gamma a' + \alpha \delta b' = \alpha a_{34} + b\alpha\gamma + c\gamma x \end{cases}$$

Les systèmes (1) et (2) sont de Cramer aux inconnues c' et a_{34} , et a' et b' respectivement, et les solutions s'en écrivent :

$$a_{34} = \frac{\gamma}{\delta} (bxy + c\beta x - a\alpha\gamma) \quad c' = -\frac{\gamma}{\delta^2} (a\gamma^2 - b\beta\gamma - c\beta^2)$$

$$a' = -\frac{\gamma}{\delta^2} (c x^2 + b\alpha x - a\alpha^2) \quad b' = \frac{\gamma}{\delta^2} (bxy + 2c\beta x - 2a\alpha\gamma + b\alpha\beta)$$

On en tire la relation $b'^2 + 4a'c' = (b^2 + 4ac) \frac{\gamma^2}{\delta^2}$, qui implique que l'on a trois cas possibles, deux à deux non isomorphes :

B2a) Si $b^2 + 4ac > 0$, on peut annuler a' et c' en choisissant convena-

blement x et y , et même, puisqu'on a deux choix distincts pour l'une au moins de ces deux variables (dès que $a \neq 0$ ou $c \neq 0$; sinon c'est trivial), on peut le faire de façon que $xy \neq \alpha\beta$. Donc $\mathcal{N}_{a,b,c} \simeq \mathcal{N}_{0,b,c}$

dans ce cas, avec $b \neq 0$. Mais $\mathcal{N}_{0,b,0} \simeq \mathcal{N}_{0,1,0}$ dès que $b \neq 0$, comme on le voit en posant $x'_3 = \frac{1}{b} x_3$

B2b) Si $b^2 + 4ac = 0$, a et c ne sont pas tous deux nuls (sinon $b=0$ aussi, et l'algèbre est scindée).

- si $a \neq 0$, on peut annuler c' en posant $x=0$ et $y = \frac{b\beta}{2a}$, d'où $a' = \frac{a\gamma\alpha^2}{\delta^2} = \frac{a\gamma}{\beta^2}$, et $b'=0$. Pour $\alpha=1$, $\beta=\gamma=a$, il s'ensuit que

$$\mathcal{N}_{a,b,c} \simeq \mathcal{N}_{1,0,0} \quad (a \neq 0, b^2 + 4ac = 0).$$

- si $c \neq 0$, on peut annuler a' en posant $x = -\frac{b\alpha}{2c}$ et $y=0$, d'où

$$c' = \frac{c\gamma\beta^2}{\delta^2} = \frac{c\gamma}{a^2}, \text{ et } b'=0. \text{ Pour } \beta=1 \text{ et } \alpha=\gamma=c, \text{ il s'ensuit que}$$

$$\mathcal{N}_{a,b,c} \simeq \mathcal{N}_{0,0,1} \quad (c \neq 0, b^2 + 4ac = 0).$$

- par suite $\mathcal{N}_{1,0,0} \simeq \mathcal{N}_{0,0,1}$ puisque les deux sont isomorphes par exemple à $\mathcal{N}_{1,2,-1}$.

B2c) Si $b^2+4ac < 0$, on ne peut annuler ni a' ni c' , mais le choix

$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{-(b^2+4ac)}$, $\beta = a$, $\gamma = -a$, $x=0$, $y = \frac{b}{2}$, par exemple, donne $a' = -1$, $b' = 0$, $c' = 1$. Donc $\mathcal{N}_{a,b,c} \simeq \mathcal{N}_{-1,0,1}$ ($b^2+4ac < 0$).

En conclusion, toute algèbre de type $(3/3, 2/\dots)$ est isomorphe à l'une des trois algèbres $\mathcal{N}_{0,1,0}$, $\mathcal{N}_{1,0,0}$ ou $\mathcal{N}_{-1,0,1}$, non isomorphes entre elles sur $\mathbb{R}$ (les deux extrêmes étant isomorphes sur $\mathbb{C}$, d'après la discussion même). En échangeant X_5 et X_6 dans la première, et en changeant X_5 en $-X_5$ dans la troisième, on obtient les crochets des algèbres $\mathcal{N}_{6,12}$, $\mathcal{N}_{6,13}$ et $\mathcal{N}_{6,14}$ de la liste :
toute algèbre de type $(3/3, 2/\dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,12}$, $\mathcal{N}_{6,13}$ ou $\mathcal{N}_{6,14}$, qui sont deux à deux non isomorphes.

B3) Une algèbre de type $(3/3, 1/\dots)$ satisfait à (D'2) avec

$c_5 = f_5 = h_5 = 0$, $h_6 = b_5 g_6 - e_5 d_6$, b_5 et e_5 non tous trois nuls, et $c_6, f_6, h_6, d_6, g_6, i_6$ non tous nuls.

Comme X_1 et X_2 jouent des rôles symétriques dans ces relations, on peut supposer $b_5 \neq 0$, et posant $X'_2 = b_5 X_2 - e_5 X_1$, $X'_4 = b_5 X_4$, $X'_5 = b_5 X_5 + b_6 X_6$, se ramener au cas $b_5 = 1$, $b_6 = e_5 = 0$. Soit :

$$(D_4) \begin{cases} [X_1, X_2] = X_4 & [X_1, X_4] = cX_6 & [X_1, X_5] = dX_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 & [X_2, X_4] = fX_6 & [X_2, X_5] = gX_6 \\ [X_2, X_3] = eX_6 & [X_3, X_4] = gX_6 & [X_3, X_5] = iX_6 \end{cases} \quad (c, f, g, d, i \text{ non tous nuls})$$

Notons que $\dim \mathcal{E}_1 \mathcal{N} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} c & f & g \\ d & g & i \end{pmatrix}$, et que $\mathcal{N}$ est donc de type $(3/3, 1/1, 3)$ ou $(3/3, 1/2, 4)$, d'où deux cas, non isomorphes :

B3a) Si $\mathcal{N}$ est de type $(3/3, 1/1, 3)$ on a (D_4) avec $\text{rang} \begin{pmatrix} c & f & g \\ d & g & i \end{pmatrix} = 2$.

D'abord on peut toujours se ramener au cas $e=0$:

- c'est clair si $f \neq 0$ ou $g \neq 0$, en posant $X'_3 = X_3 - \frac{e}{f}X_4$ et $X'_5 = X_5 - \frac{ec}{f}X_6$, ou $X'_3 = X_3 - \frac{e}{g}X_5$ et $X'_5 = X_5 - \frac{ed}{g}X_6$ selon le cas.

- si $f=g=0$, on a $i \neq 0$ et $c \neq 0$ puisque $\text{rang} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ d & 0 & i \end{pmatrix} = 2$, et le changement de base $X'_1 = X_1 - \frac{d}{i}X_3$, $X'_2 = X_2 + \frac{e}{i}X_5$, $X'_4 = X_4 + \frac{de}{i}X_6$ fait l'affaire.

Remarquons ensuite que, l'échange simultané de X_2 et X_3 et de X_4 et X_5 conservant tout le système, on peut supposer, puisque $\text{rang} \begin{pmatrix} c & f & g \\ d & g & i \end{pmatrix} = 2$, ou bien que $fi \neq g^2$, ou bien que $fi = g^2$ et $cg \neq df$.

D'où les deux cas :

B3a1) Si $fi \neq g^2$, il existe λ et μ tels que $c = \lambda f + \mu g$ et $d = \lambda g + \mu i$.

Posant alors $X'_1 = X_1 - \lambda X_2 - \mu X_3$, on se ramène au cas $c=d=0$, soit :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_4 & [X_2, X_4] = fX_6 & [X_2, X_5] = gX_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 & [X_3, X_4] = gX_6 & [X_3, X_5] = iX_6 \end{cases} \quad (fi \neq g^2).$$

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une matrice inversible. En posant

$X'_2 = \alpha X_2 + \beta X_3$, $X'_3 = \gamma X_2 + \delta X_3$, $X'_4 = \alpha X_4 + \beta X_5$, $X'_5 = \gamma X_4 + \delta X_5$ il vient les mêmes relations, mais avec des scalaires f', g', i' tels que

$$\begin{pmatrix} f' & g' \\ g' & i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f & g \\ g & i \end{pmatrix} {}^t M$$

et on peut donc se ramener ainsi au cas où $g=0$, $f=1$ et $i=\pm 1$.

On obtient les deux algèbres (isomorphes sur $\mathbb{C}$) $\mathcal{N}_{6,15}$ et $\mathcal{N}_{6,16}$ de la liste.

B3a2) Si $fi = g^2$, mais $cg \neq df$, f et g ne sont pas tous deux nuls, donc il existe λ tel que $g = \lambda f$ et $i = \lambda g$. Posant $X'_3 = X_3 - \lambda X_2$ et $X'_5 = X_5 - \lambda X_4$, on se ramène au cas $g=i=0$. Soit :

$$[X_1, X_2] = X_4 \quad [X_1, X_3] = X_5 \quad [X_1, X_4] = cX_6 \quad [X_2, X_4] = fX_6 \quad [X_1, X_5] = (d - \lambda c)X_6$$

avec $f(d-\lambda c) = df - c\lambda f = df - cg \neq 0$, donc $d-\lambda c \neq 0$ et $f \neq 0$. Posant

$$\begin{cases} X_1' = fX_1 - cX_2 & X_2' = (d-\lambda c)X_2 & X_3' = (d-\lambda c)X_3 \\ X_4' = f(d-\lambda c)X_4 & X_5' = f(d-\lambda c)X_5 & X_6' = f^2(d-\lambda c)^2X_6 \end{cases}$$

on obtient les crochets de l'algèbre $\mathcal{N}_{6,17}$ de la liste.

Pour achever la discussion du cas (B3a), il reste à montrer que $\mathcal{N}_{6,15}$, $\mathcal{N}_{6,16}$ et $\mathcal{N}_{6,17}$ sont deux à deux non isomorphes (elles sont toutes les trois de type $(3/3, 1/1, 3)$). Notons $\mathcal{N}_{c,d,f,g,i}$ une algèbre dont les crochets sont donnés par (D_4) avec $e=0$. Un isomorphisme de $\mathcal{N}_{c,d,f,g,i}$ sur $\mathcal{N}_{c',d',f',g',i'}$ doit conserver

$$\mathcal{E}_1\mathcal{N} = \langle X_6 \rangle \text{ et } \mathcal{E}_2\mathcal{N} = \langle X_4, X_5, X_6 \rangle, \text{ donc être de la forme}$$

$$X_i' = \sum_{j=1}^6 a_{ij} X_j \quad \text{avec } a_{ij}=0 \text{ pour } j \leq 3, i \geq 4, \text{ et } a_{64}=a_{65}=0.$$

On a dans tous les cas les relations

$$\begin{aligned} a_{21}a_{32} &= a_{22}a_{31} & a_{21}a_{33} &= a_{23}a_{31} \\ (**) \quad \begin{cases} a_{44} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{45} &= a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{54} &= a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{55} &= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux premières impliquent $\text{rang} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \leq 1$, à moins que

$a_{31}=a_{21}=0$. Mais les quatre autres entraînent :

$$0 \neq a_{44}a_{55} - a_{45}a_{54} = a_{11}^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

Donc $a_{21}=a_{31}=0$, autrement dit l'idéal $\langle X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \rangle$ est aussi conservé.

Les autres relations s'écrivent alors :

$$(***) \quad \begin{cases} c' a_{66} = ca_{11}a_{44} + da_{11}a_{45} + fa_{12}a_{44} + g(a_{12}a_{45} + a_{13}a_{34}) + ia_{13}a_{45} \\ d' a_{66} = ca_{11}a_{54} + da_{11}a_{55} + fa_{12}a_{54} + g(a_{12}a_{55} + a_{13}a_{54}) + ia_{13}a_{55} \\ f' a_{66} = fa_{22}a_{44} + g(a_{22}a_{45} + a_{23}a_{44}) + ia_{23}a_{45} \\ g' a_{66} = fa_{22}a_{54} + g(a_{22}a_{55} + a_{23}a_{54}) + ia_{23}a_{55} \\ g' a_{66} = fa_{32}a_{44} + g(a_{32}a_{45} + a_{33}a_{44}) + ia_{33}a_{45} \\ i' a_{66} = fa_{32}a_{54} + g(a_{32}a_{55} + a_{33}a_{54}) + ia_{33}a_{55} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} 0 = f(a_{22}a_{34} - a_{24}a_{32}) + g(a_{22}a_{35} - a_{25}a_{32} + a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33}) \\ \quad + i(a_{23}a_{35} - a_{25}a_{33}) \\ a_{46} = \dots \quad a_{56} = \dots \end{cases}$$

Posons $V_j = \begin{pmatrix} a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix}$ pour $j=1,2,3$ et $V_k = \begin{pmatrix} a_{k4} \\ a_{k5} \end{pmatrix}$ pour $k=4,5$.

- Si $c=g=d=c' = g' = d' = 0$, $f=i=f' = 1$, $i' = -1$ le système (***) s'écrit :

$$0 = V_3 \cdot V_4 = V_4 \cdot V_1 = V_1 \cdot V_5 = V_5 \cdot V_2 \quad \text{et} \quad a_{66} = V_2 \cdot V_4 = -V_3 \cdot V_5$$

Comme $a_{66} \neq 0$, ceci implique $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et (**) donne alors

$$V_4 = a_{11}V_2 \quad \text{et} \quad V_5 = a_{11}V_3, \quad \text{d'où} \quad a_{11}|V_2|^2 = V_2 \cdot V_4 = a_{66} = -V_3 \cdot V_5 = -a_{11}|V_3|^2,$$

ce qui est absurde. Donc $\mathcal{N}_{6,15} \neq \mathcal{N}_{6,16}$.

- Si $c=g=d=c' = g' = i' = 0$, $f=i=f' = d' = 1$, il vient dans (***)

$$0 = V_1 \cdot V_4 = V_4 \cdot V_3 = V_3 \cdot V_5 = V_5 \cdot V_2 \quad \text{et} \quad a_{66} = V_1 \cdot V_5 = V_2 \cdot V_4,$$

$$\text{et } a_{66} \neq 0 \text{ implique } V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où par (**) } V_5 = -a_{31}V_1 = 0 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est absurde. Donc $\mathcal{N}_{6,15} \neq \mathcal{N}_{6,17}$.

- Si $c=g=d=c' = g' = i' = 0$, $f=f' = d' = 1$, $i=-1$, il vient en posant cette

$$\text{fois } V_k' = \begin{pmatrix} a_{k4} \\ -a_{k5} \end{pmatrix} \quad \text{pour } k=4,5 :$$

$$0 = V_1 \cdot V_4' = V_4' \cdot V_3 = V_3 \cdot V_5' = V_5' \cdot V_2 \quad \text{et} \quad a_{66} = V_1 \cdot V_5' = V_2 \cdot V_4'.$$

Comme $a_{66} \neq 0$, on en tire encore $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la conclusion est la même: $\mathcal{N}_{6,16} \neq \mathcal{N}_{6,17}$.

Enfin, il est facile de vérifier que
Finale-ment, toute algèbre de type (3/3,1/1,3) est isomorphe
à $\mathcal{N}_{6,15}$, $\mathcal{N}_{6,16}$ ou $\mathcal{N}_{6,17}$, deux à deux non isomorphes sur $\mathbb{R}$
($\mathcal{N}_{6,15} \simeq \mathcal{N}_{6,16}$ sur $\mathbb{C}$, mais les deux autres preuves de non-isomor-
phisme valent sur $\mathbb{C}$).

B3b) Si $\mathcal{N}$ est de type $(3/3, 1/2, 4)$ on a (D_4) et $\text{rang} \begin{pmatrix} c & f & g \\ d & g & i \end{pmatrix} = 1$.

On peut donc trouver α et β non tous deux nuls tels que $\alpha c + \beta d = \alpha f + \beta g = \alpha g + \beta i = 0$. En posant :

$$X_2' = \beta X_2 - \alpha X_3, \quad X_3' = \alpha X_2 + \beta X_3, \quad X_4' = \beta X_4 - \alpha X_5, \quad X_5' = \alpha X_4 + \beta X_5$$

on se ramène au cas $d = g = i = 0$, soit

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_4 & [X_1, X_4] = cX_6 \\ [X_1, X_3] = X_5 & [X_2, X_3] = eX_6 \\ [X_2, X_4] = fX_6 \end{cases} \quad (c \text{ et } f \text{ non tous deux nuls})$$

Notons $\mathcal{N}_{c,e,f}$ une telle algèbre. Tout isomorphisme de $\mathcal{N}_{c,e,f}$ sur $\mathcal{N}_{c',e',f'}$ est du type (*) du début du paragraphe, et la matrice (a_{ij}) est même triangulaire puisque $[X_2', X_3'] = e'X_6'$ implique $a_{21}a_{33} = 0$, donc $a_{21} = 0$. Les autres relations s'écrivent :

$$\begin{cases} a_{44} = a_{11}a_{22} & a_{55} = a_{11}a_{33} & a_{45} = \dots & a_{46} = \dots & a_{56} = \dots \\ c'a_{66} = ca_{11}a_{44} + fa_{12}a_{44} & e'a_{66} = ea_{22}a_{33} + fa_{22}a_{34} & f'a_{66} = fa_{22}a_{44} \end{cases}$$

- Si $f \neq 0$, alors $f' \neq 0$ et on obtient $f' = 1$, $e' = c' = 0$ en choisissant convenablement a_{66} , a_{34} et a_{12} .

- Si $f = 0$, alors c et c' d'une part, e et e' d'autre part sont simultanément nuls, et dès que l'un est non nul, on peut se ramener au cas où il vaut 1 en choisissant convenablement a_{11} , a_{22} , a_{33} et a_{66} .

- enfin remarquons que le cas $c = f = 0$ est exclu par l'hypothèse $\dim \mathcal{C}^2 \mathcal{N} = 1$. En résumé :

$\mathcal{N}_{c,e,f} \simeq \mathcal{N}_{0,0,1}$ dès que $f \neq 0$; $\mathcal{N}_{c,e,0} \simeq \mathcal{N}_{1,1,0}$ dès que $c \neq 0$ et $e \neq 0$; $\mathcal{N}_{c,0,0} \simeq \mathcal{N}_{1,0,0}$ dès que $c \neq 0$; et il n'y a pas d'autre isomorphisme entre les $\mathcal{N}_{c,e,f}$ (c et f non tous deux nuls).

Autrement dit : toute algèbre de type $(3/3, 1/2, 4)$ est isomorphe à

$\mathcal{N}_{6,18}$, $\mathcal{N}_{6,19}$ ou $\mathcal{N}_{6,20}$, qui sont deux à deux non isomorphes. Et

toute algèbre de type $(3/3, 1/\dots)$ est isomorphe à l'une des $\mathcal{N}_{6,j}$

($j = 15, \dots, 20$), qui sont deux à deux non isomorphes.

B4) Une algèbre de type (3/3/...) satisfait à $(D'_2)-(J'_2)$ avec

$$c_5=c_6=f_5=f_6=h_5=h_6=d_6=g_6=i_6=0 \text{ et } b_5e_6-b_6e_5 \neq 0$$

Posant $X'_5=b_5X_5+b_6X_6$ et $X'_6=e_5X_5+e_6X_6$, on obtient aussitôt les crochets de l'algèbre $\mathcal{N}_{6,21}$ de la liste :

toute algèbre de type (3/3/...) est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,21}$. Toute algèbre dont la dérivée est de dimension 3 est donc isomorphe à l'une des $\mathcal{N}_{6,j}$ ($j=9, \dots, 21$), qui sont deux à deux non isomorphes.

C) Si $\dim \mathcal{N}'=2$, on a le système d'équations (D)-(J), avec

$$a_3=a_4=b_4=e_4=0, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = a_5X_5 + a_6X_6 & [X_1, X_4] = c_5X_5 + c_6X_6 & [X_1, X_5] = d_6X_6 \\ [X_1, X_3] = b_5X_5 + b_6X_6 & [X_2, X_4] = f_5X_5 + f_6X_6 & [X_2, X_5] = g_6X_6 & [X_4, X_5] = j_6X_6 \\ [X_2, X_3] = e_5X_5 + e_6X_6 & [X_3, X_4] = h_5X_5 + h_6X_6 & [X_3, X_5] = i_6X_6 \end{cases}$$

Les relations de Jacobi s'écrivent alors :

$$\begin{cases} h_5d_6 - c_5i_6 + b_5j_6 = 0 & f_5d_6 - c_5g_6 + a_5j_6 = 0 \\ h_5g_6 - f_5i_6 + e_5j_6 = 0 & e_5d_6 - b_5g_6 + a_5i_6 = 0 \end{cases}$$

X_1, X_2, X_3 et X_4 jouent dans ces relations des rôles symétriques. Comme le noyau de $\text{ad}X_5 : \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle \longrightarrow \langle X_6 \rangle$ est de dimension ≥ 3 , on peut, par un changement sur les quatre premiers vecteurs, supposer que ce noyau est $\langle X_2, X_3, X_4 \rangle$, autrement dit $g_6=i_6=j_6=0$, et il vient :

$$(D_5) \begin{cases} [X_1, X_2] = a_5X_5 + a_6X_6 & [X_2, X_3] = e_5X_5 + e_6X_6 \\ [X_1, X_3] = b_5X_5 + b_6X_6 & [X_2, X_4] = f_5X_5 + f_6X_6 & [X_1, X_5] = d_6X_6 \\ [X_1, X_4] = c_5X_5 + c_6X_6 & [X_3, X_4] = h_5X_5 + h_6X_6 \end{cases}$$

avec les relations

$$(J_5) \quad h_5d_6 = f_5d_6 = e_5d_6 = 0.$$

En particulier $\mathcal{N}$ ne peut être que de type (2/2,1/...) ou (2/2/...).

C1) Si est de type $(2/2, 1/\dots)$ on a $d_6 \neq 0$ et donc $e_5 = f_5 = h_5 = 0$.

D'où en posant $X'_2 = X_2 - \frac{a_6}{d_6} X_5$, $X'_3 = X_3 - \frac{b_6}{d_6} X_5$, $X'_4 = X_4 - \frac{c_6}{d_6} X_5$, $X'_6 = d_6 X_6$.

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = aX_5 & [X_2, X_3] = eX_6 \\ [X_1, X_3] = bX_5 & [X_2, X_4] = fX_6 & [X_1, X_5] = X_6 \\ [X_1, X_4] = cX_5 & [X_3, X_4] = hX_6 \end{cases} \quad (a, b, c \text{ non tous nuls})$$

Par symétrie en X_2, X_3, X_4 , on peut supposer $a \neq 0$, puis posant

$X'_3 = X_3 - \frac{b}{a} X_2$, $X'_4 = X_4 - \frac{c}{a} X_2$, $X'_5 = aX_5$, $X'_6 = aX_6$, il vient

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_1, X_5] = X_6, \quad [X_2, X_3] = eX_6, \quad [X_2, X_4] = fX_6, \quad [X_3, X_4] = hX_6$$

- Si $e = f = 0$, alors $h \neq 0$ (sinon $\langle X_3, X_4 \rangle$ est facteur direct)

- Si e et f ne sont pas tous deux nuls, en posant $X'_3 = fX_3 - eX_4$ et

$X'_4 = eX_3 + fX_4$, il vient (sur $\mathbb{C}$ on poserait $X'_4 = \bar{e}X_3 + \bar{f}X_4$) :

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_1, X_5] = X_6, \quad [X_2, X_4] = (e^2 + f^2)X_6, \quad [X_3, X_4] = (e^2 + f^2)hX_6,$$

et de nouveau $h \neq 0$ (sinon $\langle X_3 \rangle$ est facteur direct). En posant alors

$X'_2 = X_2 - \frac{1}{h} X_3$, il vient

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_1, X_5] = X_6, \quad [X_3, X_4] = (e^2 + f^2)hX_6$$

- Dans les deux cas, en posant $X'_3 = \frac{1}{h} X_3$ ou $X'_3 = \frac{1}{(e^2 + f^2)h} X_3$, on obtient

les crochets de l'algèbre $\mathcal{N}_{6,22}$ de la liste.

Donc toute algèbre de type $(2/2, 1/\dots)$ est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,22}$.

C2) Si $\mathcal{N}$ est de type $(2/2/\dots)$ on a $(D_5) - (J_5)$ avec $d_6 = 0$, soit :

$$(D_6) \begin{cases} [X_1, X_2] = a_5 X_5 + a_6 X_6 & [X_2, X_3] = e_5 X_5 + e_6 X_6 \\ [X_1, X_3] = b_5 X_5 + b_6 X_6 & [X_2, X_4] = f_5 X_5 + f_6 X_6 \\ [X_1, X_4] = c_5 X_5 + c_6 X_6 & [X_3, X_4] = h_5 X_5 + h_6 X_6 \end{cases}$$

avec $\text{rang} \begin{pmatrix} a_5 & b_5 & c_5 & e_5 & f_5 & h_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & e_6 & f_6 & h_6 \end{pmatrix} = 2$.

Si pour tout triplet i, j, k d'entiers pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ le système $\{[X_i, X_j], [X_i, X_k]\}$ était de rang 1, tous les déterminants extraits de la matrice de rang 2 ci-dessus seraient nuls, sauf peut-être $\begin{vmatrix} a_5 & h_5 \\ a_6 & h_6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_5 & f_5 \\ b_6 & f_6 \end{vmatrix}$, ou $\begin{vmatrix} c_5 & e_5 \\ c_6 & e_6 \end{vmatrix}$. Par symétrie, on peut

supposer par exemple $b_5 f_6 \neq b_6 f_5$, et il vient alors $a_5 = a_6 = c_5 = c_6 = e_5 = e_6 = h_5 = h_6 = 0$.

Par le changement de base $X'_5 = b_5 X_5 + b_6 X_6$ et $X'_6 = f_5 X_5 + f_6 X_6$, on se ramène alors à

$$[X_1, X_3] = X_5, \quad [X_2, X_4] = X_6$$

autrement dit $\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$, et l'algèbre est scindée.

Par suite on peut supposer par exemple (par symétrie) que $X'_5 = [X_1, X_2]$ et $X'_6 = [X_1, X_3]$ sont linéairement indépendants, et dans cette nouvelle base il vient :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_5 & [X_1, X_4] = cX_5 + c'X_6 & [X_2, X_4] = fX_5 + f'X_6 \\ [X_1, X_3] = X_6 & [X_2, X_3] = eX_5 + e'X_6 & [X_3, X_4] = hX_5 + h'X_6 \end{cases}$$

En posant $X'_4 = X_4 - cX_2 - c'X_3$ on se ramène au cas $c = c' = 0$, soit :

$$(D'_6) \begin{cases} [X_1, X_2] = X_5 & [X_2, X_4] = fX_5 + f'X_6 \\ [X_2, X_3] = eX_5 + e'X_6 & \\ [X_1, X_3] = X_6 & [X_3, X_4] = hX_5 + h'X_6 \end{cases}$$

Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où $e = e' = 0$:

- Si $ef' - fe' = a \neq 0$, en posant

$$X'_1 = aX_1 + fX_2, \quad X'_3 = f'X_3 - e'X_4 + aX_1, \quad X'_4 = -fX_3 + eX_4, \quad X'_5 = aX_5, \quad X'_6 = aX_6$$

il vient

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_1, X_3] = f'X_6, \quad [X_2, X_4] = X_6, \quad [X_3, X_4] = hX_5 + (h' - f)X_6$$

Si $f' \neq 0$, l'algèbre est bien de la forme voulue (posant $X'_6 = f'X_6$).

Si $f' = 0$, l'échange de X_1 et X_2 , de X_3 et X_4 , et le changement de X_5 en $-X_5$ nous y ramènent.

- Si $ef' = fe'$, mais $eh' \neq he'$, l'échange des rôles de X_2 et X_3 et de

X_5 et X_6 nous ramène au cas précédent.

- Si $ef' = fe'$ et $eh' = he'$, mais e et e' non tous deux nuls, alors

$fn' = hf'$ et il existe α et β tels que $f = \alpha e$, $f' = \alpha e'$, $h = \beta e$, $h' = \beta e'$.
Posant $X_4' = X_4 - \alpha X_3 - \beta X_2$, il vient

$$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_3] = X_6, [X_2, X_3] = eX_5 + e'X_6, [X_1, X_4] = \beta X_5 - \alpha X_6.$$

. Si $\alpha \neq 0$, poser $X_1' = X_2$, $X_2' = X_1$, $X_3' = X_3 - \frac{\beta}{\alpha} X_2 + \frac{1}{\alpha} X_4$, $X_5' = -X_5$

nous ramène à

$$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_3] = -eX_5 + e'X_6, [X_2, X_4] = \beta X_5 - \alpha X_6.$$

Si e' était nul, poser $X_2' = X_2 + eX_3$ éliminerait le premier crochet, et l'algèbre serait isomorphe à $\mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$ (car e et α sont non nuls), donc scindée. Donc $e' \neq 0$, et le changement $X_6' = e'X_6 - eX_5$ nous amène à la forme cherchée.

. Si $\beta \neq 0$, on se ramène au cas précédent par l'échange de X_2 et X_3 et de X_5 et X_6 , qui échange α et β .

. Si $\alpha = \beta = 0$, l'algèbre est scindée ($\langle X_4 \rangle$ est facteur direct).

Dans tous les cas, on est donc ramené au système

$$(D_6'') \quad [X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = fX_5 + f'X_6, [X_3, X_4] = hX_5 + h'X_6.$$

Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, en posant

$$X_2' = \alpha X_2 + \beta X_3, X_3' = \gamma X_2 + \delta X_3, X_5' = \alpha X_5 + \beta X_6, X_6' = \gamma X_5 + \delta X_6,$$

il vient les mêmes crochets avec des scalaires f_1, f_1', h_1, h_1' tels que

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_1' \\ h_1 & h_1' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f & f' \\ h & h' \end{pmatrix} M^{-1}$$

et l'on voit qu'on peut ainsi se ramener, dans (D_6'') à l'un des trois cas :

$$f' = h = 0; h' = f \text{ et } h = -f' \neq 0; h' = f, h = 0, f' = 1$$

(sur $\mathbb{C}$, le deuxième cas se ramène au premier).

• dans le premier cas, on a $[X_1, X_2] = X_5$, $[X_1, X_3] = X_6$, $[X_2, X_4] = fX_5$,

$[X_3, X_4] = h'X_6$; et le changement $X_4' = X_4 + h'X_1$ nous ramène à

$$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = (f - h')X_5$$

Si $f = h'$, l'algèbre est scindée; sinon, posant

$x_1' = \frac{1}{f-h}x_4$, $x_2' = -x_2$, $x_3' = -x_3$, $x_4' = x_1 + \frac{1}{f-h}x_4$, il vient

$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_3, x_4] = x_6$, et elle est encore scindée.

• dans le second cas, on a

$$[x_1, x_2] = x_5, [x_1, x_3] = x_6, [x_2, x_4] = fx_5 - hx_6, [x_3, x_4] = hx_5 + fx_6 \quad (h \neq 0)$$

et en posant $x_4' = -\frac{1}{h}x_4 - \frac{f}{h}x_1$, on obtient les crochets de l'algèbre

$\mathcal{N}_{6,23}$ de la liste, qui est de type (2/2/2).

Remarquons que jusqu'ici toutes les algèbres de la liste
trouvées ($\mathcal{N}_{6,j}$ pour $j=1, \dots, 21$) sont sûrement non scindées
puisque de types différents des types des algèbres scindées (voir
les listes du § II).

Si $\mathcal{N}_{6,23}$ était scindée, vu son type, elle serait isomorphe à
 $\mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$.

Or si une autre base $\{x_1', \dots, x_6'\}$ de $\mathcal{N}_{6,23}$ vérifiait

$$[x_1', x_2'] = x_5' \quad \text{et} \quad [x_3', x_4'] = x_6',$$

posant $x_i' = \sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j$ pour $i=1, \dots, 6$, on aurait les relations

$$(*) \quad a_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i=5, 6 \quad \text{et} \quad j \leq 4$$

et

$$(**) \quad V_1 \cdot W_3 = V_1 \cdot W_3' = V_2 \cdot W_3 = V_2 \cdot W_3' = V_1 \cdot W_4 = V_1 \cdot W_4' = V_2 \cdot W_4 = V_2 \cdot W_4' = 0$$

$$\text{avec} \quad V_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \\ a_{j4} \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} a_{j2} \\ -a_{j1} \\ -a_{j4} \\ a_{j3} \end{pmatrix}, \quad W_j' = \begin{pmatrix} a_{j3} \\ a_{j4} \\ -a_{j1} \\ -a_{j2} \end{pmatrix}, \quad \text{pour } j=1, 2, 3, 4.$$

Or au vu de (*), le système $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ doit être libre, et si
 $F = \langle V_1, V_2 \rangle$, (**) implique $W_3, W_3', W_4, W_4' \in F$. Comme pour tout
 $j=1, 2, 3, 4$, $V_j \perp W_j$, $V_j \perp W_j'$ et $W_j \perp W_j'$, et qu'aucun vecteur V_j, W_j, W_j'
ne peut être nul, on a $F^\perp = \langle W_3, W_3' \rangle = \langle W_4, W_4' \rangle$. Donc V_3 et V_4 seraient
dans $(F^\perp)^\perp = F$, ce qui est absurde.

(Notons que sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{N}_{6,23} \simeq \mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_3$ puisque le second cas se ramène alors au premier).

• dans le troisième cas, on a

$$[X_1, X_2] = X_5, \quad [X_1, X_3] = X_6, \quad [X_2, X_4] = fX_5 + X_6, \quad [X_3, X_4] = fX_6$$

et posant $X_4' = X_4 + fX_1$, on obtient les crochets de l'algèbre $\mathcal{N}_{6,24}$ de la liste, qui est aussi de type (2/2/2), mais qui n'est pas scindée non plus (ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$) car, par un raisonnement analogue et avec les mêmes notations qu'au cas précédent, on obtient ici les relations

$$(***) \quad \begin{cases} a_{55} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{65} = a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41} \\ a_{56} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} + a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} \\ a_{66} = a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41} + a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{41} \\ a_{12} & a_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{41} \\ a_{22} & a_{42} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{pmatrix}$ est de rang 2, les dernières relations

impliquent

- ou bien $a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0$, d'où $a_{65} = a_{66} = 0$ par (***)

- ou bien $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, d'où $a_{55} = a_{56} = 0$ par (***)

Or ces deux cas sont impossibles puisque $a_{55}a_{66} - a_{56}a_{65} \neq 0$.

Enfin un isomorphisme de $\mathcal{N}_{6,23}$ sur $\mathcal{N}_{6,24}$ donnerait, toujours avec les mêmes notations, les relations

$$\begin{cases} a_{55} = V_1 \cdot W_2 & a_{65} = V_1 \cdot W_3 = V_2 \cdot W_4 \\ a_{56} = V_1 \cdot W_2' & a_{66} = V_1 \cdot W_3' = V_2 \cdot W_4' \\ 0 = V_1 \cdot W_4 = V_1 \cdot W_4' = V_2 \cdot W_3 = V_2 \cdot W_3' = V_3 \cdot W_4 = V_3 \cdot W_4' \end{cases}$$

Si $E = \langle W_4, W_4' \rangle$, on a $\dim E = 2$ puisque

$$V_4 \neq 0 \implies W_4 \neq 0, W_4' \neq 0 \text{ et } W_4 \perp W_4'.$$

Les relations ci-dessus impliqueraient V_1, V_3 et $V_4 \in E^\perp$, ce qui est absurde. (D'ailleurs $\mathcal{N}_{6,23}$ et $\mathcal{N}_{6,24}$ ne risquent pas d'être isomorphes sur $\mathbb{R}$, puisqu'elles ne le sont pas sur $\mathbb{C}$, l'une étant scindée et l'autre non).

En conclusion :

Toute algèbre non scindée de type (2/2/...) est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,23}$ ou $\mathcal{N}_{6,24}$, qui ne sont pas isomorphes. Toute algèbre non scindée dont la dérivée est de dimension 2 est isomorphe à $\mathcal{N}_{6,22}$, $\mathcal{N}_{6,23}$ ou $\mathcal{N}_{6,24}$, qui sont deux à deux non isomorphes.

D) Si $\dim \mathcal{N}' \leq 1$, $\mathcal{N}$ est scindée. En effet, si l'on pose

$[X_i, X_j] = a_{ij} X_6 \quad (1 \leq i, j \leq 5)$, le vecteur $\sum_{i=1}^5 \lambda_i X_i$ est dans le centre

de $\mathcal{N}$ si et seulement si la colonne $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$ est dans le noyau de la matrice $(a_{ij})_{i,j=1, \dots, 5}$. Or cette dernière étant antisymétrique

de dimension impaire a un noyau non nul. Soit $X \neq 0$ dans ce noyau. Alors $\langle X \rangle$ est facteur direct. En particulier toute algèbre dont la dérivée est de dimension 1 est scindée, et: Toute algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension 6 non scindée est isomorphe à l'une des algèbres $\mathcal{N}_{6,j}$ ($j=1, \dots, 24$) de la liste du § II, C, qui sont deux à deux non isomorphes. Toute algèbre de Lie nilpotente complexe de dimension 6 non scindée est isomorphe à l'une des algèbres $\mathcal{N}_{6,j}$ ($1 \leq j \leq 24$; $j \neq 7, 14, 16, 23$) de cette liste, qui sont deux à deux non isomorphes.

IV) QUELQUES REMARQUES

1) Le défaut de commutativité des algèbres $\mathcal{N}_{6,j}$ ($1 \leq j \leq 24$) vaut toujours 2, sauf pour trois d'entre elles où il vaut 1 : ce sont $\mathcal{N}_{6,5}$, $\mathcal{N}_{6,20}$ et $\mathcal{N}_{6,21}$. En particulier, le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{N}_{6,j}$, dont le corps des fractions n'a que deux générateurs, est toujours une algèbre de polynômes, sauf peut-être pour ces trois-là, pour lesquelles il a quatre générateurs (cf. § II, C). On constate que c'est encore une algèbre de polynômes dans le cas de $\mathcal{N}_{6,21}$, mais c'est faux pour les deux autres : on a en effet, par exemple, les relations entre les générateurs cités au § II, C suivantes :

$$\begin{aligned} - \text{pour } \mathcal{N}_{6,5} : & (x_5^2 - 2x_4x_6)^3 - (x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2)^2 = \\ & (x_6)^2(3x_4^2x_5^2 - 6x_3x_5^3 - 8x_4^3x_6 + 18x_3x_4x_5x_6 - 9x_3^2x_6^2) \\ - \text{pour } \mathcal{N}_{6,20} : & (x_4x_5 - x_3x_6)^2 - (x_4^2 - 2x_2x_6)(x_5)^2 = x_6(2x_2x_5^2 - 2x_3x_4x_5 + x_3^2x_6). \end{aligned}$$

On en conclut que les seules algèbres de Lie nilpotentes (réelles ou complexes) de dimension ≤ 6 dont le centre de l'algèbre enveloppante n'est pas isomorphe à une algèbre de polynômes sont :

$$\mathcal{N}_{5,2}, \mathcal{N}_{5,2} \oplus k, \mathcal{N}_{6,5}, \text{ et } \mathcal{N}_{6,20}. \quad (\text{pour } \mathcal{N}_{5,2}, \text{ voir [3]}).$$

2) Une bonne partie du calcul de classification fait au § III vaut (ou peut s'adapter) sur tout corps de base k de caractéristique différente de 2. Mais une autre partie du calcul s'appuie sur la classification des formes bilinéaires symétriques sur k , et le nombre de classes d'algèbres nilpotentes de dimension 6 sur k dépend donc essentiellement du nombre d'éléments de k "à un carré près"; en particulier ces deux nombres sont simultanément finis.

3) Au-delà de la dimension 6, il y a toujours une infinité de classes d'algèbres de Lie nilpotentes sur k , du moins dès que k est infini, comme le montre l'exemple suivant, d'une famille "continue"

$\mathcal{N}_\lambda$ ($\lambda \in K$) d'algèbres nilpotentes de dimension 7 "filiformes" (cf. [12]), deux à deux non isomorphes :

$$\mathcal{N}_\lambda \begin{cases} [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = X_4, & [X_1, X_4] = X_5 \\ [X_1, X_5] = X_6, & [X_1, X_6] = X_7, & [X_2, X_3] = X_5 \\ [X_2, X_4] = X_6, & [X_2, X_5] = \lambda \cdot X_7, & [X_3, X_4] = (1-\lambda)X_7 \end{cases}$$

On vérifie que $\mathcal{N}_\lambda \simeq \mathcal{N}_{\lambda'} \Rightarrow \lambda = \lambda'$, que dès que $\lambda \neq 0, 1$, $\mathcal{N}_\lambda$ est de type $(5, 1/5, 4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4, 5)$, de défaut $d=3$ de poumon

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_\lambda) = \langle X_7 \rangle, \text{ et } \mathcal{C}(\mathcal{N}_\lambda) = k \{X_7\}.$$

$\mathcal{N}_0$ est du même type, mais $d=2$, et $\mathcal{P}(\mathcal{N}_0) = \langle X_2, \dots, X_7 \rangle$ et

$$\mathcal{C}(\mathcal{N}_0) = k \{X_7, X_6^2 - 2X_5X_7, \underbrace{X_6^5 - 5X_5X_6^3X_7 + 15X_4X_6^2X_7^2 - 30X_3X_6X_7^3 + 30X_2X_7^4}_{2X_6^5 - 10X_5X_6^3X_7 + 15X_4X_6^2X_7^2 - 15X_3X_6X_7^3 + 15X_2X_7^4 - 19X_2X_7^5}\}.$$

$\mathcal{N}_1$ est de type $(5/5, 4, 3, 2, 1/1, 2, 3, 4, 5)$, $d=2$, $\mathcal{P} = \langle X_3, \dots, X_7 \rangle$ et

$$\mathcal{C}(\mathcal{N}_1) = k \{X_7, X_6^3 - 3X_5X_6X_7 + 3X_4X_7^2, X_6^4 - 4X_5X_6^2X_7 + 2X_5^2X_7^2 + 4X_4X_6X_7^2 - 4X_3X_7^3\}$$

On remarque que les centres des algèbres enveloppantes de $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_1$ ne sont pas isomorphes à des algèbres de polynômes.

REFERENCES

- [1] A. CEREZO et A. FENARD, "Sur un idéal remarquable d'une algèbre de Lie", à paraître.
 - [2] J. DIXMIER, "Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II". Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), p.325-388.
 - [3] J. DIXMIER, même titre, III. Canadian J. Math. 10 (1958), p.321-348.
 - [4] V. V. MOROZOV, "Classification of six-dimensional nilpotent Lie algebras" (en russe). Izvestia Vys. Ucheb. Zar., 4 (1958), p.161-171.
 - [5] O. A. NIELSEN, "Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups". Queen's papers in pure and appl. math., n°63 (1983).
 - [6] L. J. SANTHAROUBANE, "Kac-Moody Lie algebras and the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank", Canadian J. Math., 34 (1982), p.1215-1239.
 - [7] L. J. SANTHAROUBANE, "Kac-Moody Lie algebras and the universal element for the category of nilpotent Lie algebras", (I and II), à paraître aux Math. Annalen.
 - [8] T. SKJELBRED and T. SUND, "On the classification of nilpotent Lie algebras", preprint n°8, (1977), Mat. Instit. Univ. i Oslo.
 - [9] T. SKJELBRED and T. SUND, "Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes", C.R.A.S. Paris, 286 (1978), p.241-242.
 - [10] K. A. UMLAUF, "Über die Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range null", Leipzig, 1891.
 - [11] M. VERGNE, Thèse, Paris, 1966.
 - [12] M. VERGNE, "Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à la variété des algèbres de Lie nilpotentes", Bull. Soc. Math. France, 98 (1970), p.81-116.
-