Prépublication n° 35

Université de Poitiers
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS

CALCUL DES INVARIANTS ALGEBRIQUES ET RATIONNELS D'UNE MATRICE NILPOTENTE

par

André CEREZO

PREPUBLICATION : Avril 1988

RESUME : On présente un algorithme de calcul d'un système de générateurs de l'algèbre des polynômes invariants par le groupe à un paramètre engendré par une matrice nilpotente (en caractéristique nulle) : on donne une base du corps des fractions rationnelles invariantes ; puis on construit assez d'invariants pour séparer les orbites séparables, d'où une description de la stratification ; enfin on complète le système obtenu par un procédé de clôture intégrale.

ABSTRACT : We present here an algortihm for computing a system of generators of the algebra of polynomials invariant under the one-parameter group generated by a nilpotent matrix (in characteristic zero) : first a basis of the field of invariant rational functions is given ; then enough invariants are computed to separate the separable orbits, and we can describe the stratification ; finally the system obtained is completed by an integral closure argument.

CLASSIFICATION A.M.S. : 15 A 72

MOTS CLEFS : invariants algébriques, matrice nilpotente, stratification.

CALCUL DES INVARIANTS ALGEBRIQUES ET RATIONNELS D'UNE MATRICE NILPOTENTE

André Cerezo

(Conférence au Séminaire "Groupes et Algèbres de Lie")
9 décembre 1987

I) INTRODUCTION

La représentation irréductible de dimension d+1 de SL(2,k) (k corps commutatif de caractéristique nulle) se réalise dans l'espace V_d des "formes binaires de degré d" $\sum_{i=0}^{d} x_i X^{d-i} Y^i$ par l'action naturelle de SL(2,k) sur $(X,Y)\in k^2$. Les polynômes de $(x_0,..,x_d)$ invariants par cette action forment l'algèbre des "invariants des formes binaires" ; les polynômes de $(x_0,...,x_d\ ;\ X,Y)$ invariants par l'action de SL(2,k) sur $V_d x k^2$ forment l'algèbre des "covariants des formes binaires". On sait depuis le XIX^e siècle que ces algèbres sont de type fini (Gordan, Hilbert,...), et on peut généraliser en remplaçant V_d par une représentation de dimension finie quelconque, donc de la forme $\bigoplus_{j=1}^{p} V_{d_j}$. On obtient ainsi les algèbres d'invariants ou de covariants "simultanés" de plusieurs formes binaires, de degré $d_1,...,d_p$.

Notant $K[V]^G$ l'algèbre des invariants de l'action de G dans K[V] et N le sous-groupe unipotent maximal de SL(2,k) engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a un isomorphisme de $K[V_d x k^2]^{SL(2,k)}$ sur $K[V_d]^N$ (donné par $X \longmapsto 0$) qui permet d'identifier les invariants algèbriques d'une matrice nilpotente quelconque à certains covariants des formes binaires ; en particulier leur algèbre est de type fini. Sous cette forme, le résultat remonte semble-t-il à Roberts (1861).

Aujourd'hui, ce n'est plus qu'un cas très particulier de résultats récents comme le théorème de Grosshans [7], sur les invariants de certains sous-groupes de groupes réductifs, que l'on sait relier aux invariants du groupe réductif, auxquels on peut alors appliquer le théorème de finitude de Nagata.

Les invariants et covariants des formes binaires sont le principal objet de la "théorie classique des invariants" du XIX^e siècle, et leur description est à peu près compléte jusqu'à $d=8$, et pour les covariants simultanés des deux formes jusqu'à $d_1=d_2=5$. Mais en fait, dès que $d\geq 6$, ou $d_1\geq 4$, on tombe sur des algèbres dont la "présentation finie" est d'une complication extrême, et a été peu calculée. Bien que la série de Poincaré d'une telle algèbre soit en principe connue (par exemple [2]), il n'existe de "système de paramètres" multihomogènes que dans un nombre fini très restreint de cas ([1]).

Récemment le calcul effectif de ces algèbres par générateurs et relations a soulevé l'intérêt de mécaniciens (cf. [6]), qui s'en servent pour mettre sous forme réduite les hamiltoniens de certains systèmes dynamiques.

On décrit ici un procédé de calcul en trois étapes, sous le point de vue "$K[V]^N$". Les démonstrations sont indépendantes de la théorie classique, comme des prolongements récents, et certains résultats semblent nouveaux (prop. 3, prop. 6).

Au paragraphe II on prolonge l'action d'une matrice nilpotente en une représentation de $sl(2,k)$ pour en déduire la surjectivité de certaines restrictions (prop. 2)

La première étape du calcul est la construction d'une base du corps des fractions rationnelles invariantes, et c'est l'objet du paragraphe III (prop. 3).

Au paragraphe IV on décrit une façon unique d'écrire un invariant dans un localisé (prop. 4) qui fournit le principal outil de calcul.

La deuxième étape consiste à calculer assez d'invariants pour "séparer les orbites séparables" et définir le nilcône. Ceci fait l'objet du paragraphe V, ou l'on décrit la stratification canonique de l'action (prop. 6). On obtient ainsi un "quotient approché" qui est une variété quasi affine déjà plongée.

Enfin l'algèbre complète d'invariants est obtenue à partir de là par un procédé de cloture intégrale, qui fournit le vrai quotient, normalisé du précédent : c'est la dernière étape, décrite au paragraphe VI.

Tous les procédés de calcul utilisés s'expriment par des algorithmes mécanisables, au moins en principe, même le dernier, et ont été testés en petite dimension.

II LA REPRESENTATION DE sl(2,k) ASSOCIEE

Soit M une matrice nilpotente nxn à coefficients dans un corps k commutatif de caractéristique nulle.

Notons $x = (x_0,\dots,x_q)$, avec $x_r = (x_{r,1},\dots,x_{r,n_r})$ les coordonnées d'un vecteur de K_n dans une base où la matrice M est sous la forme de Jordan

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_q \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ est de dimension } {}^{n}/_{r}$$

avec $0 \le r \le q$, $n_0 + \dots + n_q = n$, et $\Gamma = \{\exp tM \mid t \in k\}$.

L'algèbre $\mathcal{L}$ des invariants algèbriques (resp. le corps $\mathcal{K}$ des invariants rationnels) de M est alors le noyau dans K[x] (resp. dans K(x)) du champ de vecteurs

$$D = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=2}^{n_r} x_{r,s-1}\, \partial_{r,s} \right] \qquad \left[\text{on note } \partial_{r,s} = \frac{\partial}{\partial x_{r,s}}\right]$$

Si on associe au monôme $\prod_{r=0}^{q} \left[\prod_{s=1}^{n_r} x_{r,s}^{\alpha_{r,s}} \right]$ les (q+2) entiers

$$p_r = \sum_{s=1}^{n_r} \alpha_{r,s} \text{ pour } 0 \le r \le q \text{ (degré partiel en } x_r)$$

et

$$k = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=2}^{n_r} (s-1)\alpha_{r,s} \right] \text{ (qu'on appellera "masse" du monôme)}$$

on obtient une $\mathbb{N}^{q+2}$-graduation de $K[x] = \mathfrak{P}_{(n)}$ par

$$\mathfrak{P}_{(n)} = \bigoplus_{\substack{(p)\in\mathbb{N}^{q+1} \\ k\in\mathbb{N}}} \mathfrak{P}_{(n)}^{(p),k}$$

où $(n) = (n_0,\dots,n_q)$, $(p) = (p_0,\dots,p_q)$ et $\mathfrak{P}_{(n)}^{(p),k}$ est le sous-espace des polynômes homogènes de "degré" (p) et de masse k.

Comme $D\mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} \subset \mathfrak{P}^{(p),k-1}_{(n)}$, l'algèbre $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(n)}$ est aussi $\mathbb{N}^{q+2}$ - graduée : $\mathcal{L}_{(n)} = \oplus\, \mathcal{L}^{(p),k}_{(n)}$, avec $\mathcal{L}^{(p),k}_{(n)} = \mathcal{L}_{(n)} \cap \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}$.

Posons

$$M'_r = \begin{bmatrix} 0 & (n_r-1) & & & & (0) \\ & 0 & 2(n_r-2) & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & s(n_r-s) & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & & 0 & (n_r-1) \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} , \quad T_r = \begin{bmatrix} n_r-1 & & & (0) \\ & n_r-3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_r+1-2s \\ & & & & \ddots \\ (0) & & & & -n_r+1 \end{bmatrix}$$

puis

$$M' = \begin{bmatrix} M'_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M'_q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} T_0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_q \end{bmatrix}$$

On a $[T,M'] = 2M'$, $[T,M] = -2M$, $[M',M] = T$, si bien que les formules

$$\rho\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = T , \quad \rho\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = M , \quad \rho\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M'$$

se prolongent en une représentation $\rho = \rho_{(n)}$ de $sl(2,k)$ dans K^n, somme directe des représentations irréductibles de dimensions $n_0,\dots,n_q$. L'action qui s'en déduit de $sl(2,k)$ dans $\mathfrak{P}_{(n)}$ admet pour générateurs infinitésimaux correspondant à M, M', et T les champs de vecteurs D, D', et H, avec

$$D' = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=1}^{n_r-1} s(n_r-s)x_{r,s+1}\, \partial_{r,s} \right] \quad \text{et}$$

$$H = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=1}^{n_r} (n_r+1-2s)x_{r,s}\, \partial_{r,s} \right]$$

Comme $D'\mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} \subset \mathfrak{P}^{(p),k+1}_{(n)}$ et $H_{|\mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}} = (m-2k).\mathrm{id}_{\mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}}$

avec $m = m(n,p) = \sum_{r=0}^{q} (n_r-1)p_r$,

$\mathfrak{P}^{(p)}_{(n)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}$ est un sl(2,k)-sous-module de $\mathfrak{P}_{(n)}$ de dimension finie, donc sur lequel l'action de sl(2,k) s'intègre en une action de SL(2,k), qui n'est autre que l'action classique "simultanée" sur q+1 formes binaires de degrés $n_0-1,\dots,n_q-1$.

D'après la théorie classique des représentations de sl(2,k), (cf. par exemple [4], Th. 1.8.4), chaque $\mathfrak{P}^{(p)}_{(n)}$ se décompose en somme directe de sous-modules irréductibles E_j, tels que, si E est l'un d'entre eux de dimension l+1, on a sur une base convenable

$$De_j = e_{j+1} \ , \ D'e_j = j(l+1-j)e_{j-1} \ , \ He_j = (l-2j)e_j$$

La dernière relation implique (identité d'Euler) que $e_j \in \mathfrak{P}^{(p),\frac{m+l}{2}-j}_{(n)}$, et c'est dire que E est une somme de droites prises dans chaque $\mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}$, k parcourant un intervalle de $\mathbb{Z}$ de longueur l+1 et centré sur $\frac{1}{2}$ m(n,p) ; sur chacune de ces droites, D et D' sont de rang maximal, 1 ou 0. Il s'ensuit en sommant sur tous les E_j l'énoncé suivant :

Proposition 1 : a) $D : \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} \longrightarrow \mathfrak{P}^{(p),k-1}_{(n)}$ est surjectif pour $k\leq\frac{m}{2}$, injectif pour $k>\frac{m}{2}$

b) $D' : \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} \longrightarrow \mathfrak{P}^{(p),k+1}_{(n)}$ est injectif pour $k<\frac{m}{2}$, surjectif pour $k\geq\frac{m}{2}$.

c) $H : \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} \longrightarrow \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)}$ est l'homothétie de rapport m-2k.

Corollaire 1 : a) $\dim \mathcal{L}^{(p),k}_{(n)} = \dim \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} - \dim \mathfrak{P}^{(p),k-1}_{(n)}$ si $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$

0 sinon

b) $\dim \mathcal{L}^{(p)}_{(n)} = \sup_k \dim \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n)} = \dim \mathfrak{P}^{(p),[\frac{m}{2}]}_{(n)}$

Définissons des applications linéaires surjectives

$$\pi_r : \mathfrak{P}^{(p),k}_{(n_0,\ldots,n_q)} \longrightarrow \mathfrak{P}^{(p),k-p_r}_{(n_0,\ldots,n_r-1,\ldots,n_q)} \text{ par } \pi_r = \tau_r \circ \rho_r$$

où ρ_r est la restriction à l'hyperplan $\{x_{r,1}=0\}$, et τ_r la substitution de $x_{r,j-1}$ à $x_{r,j}$ $(2 \leq j \leq n_r$; ρ_r conserve la masse, τ_r la diminue de $p_r)$.

Lemme 1 : π_r va de $\mathcal{L}^{(p),k}_{(n_0,\ldots,n_q)}$ dans $\mathcal{L}^{(p),k-p_r}_{(n_0,\ldots,n_r-1,\ldots,n_q)}$, et y est surjective pour $k \leq \frac{1}{2}(m-n_r+1)$.

Preuve :

Si $P = x_{r,1}Q(x_0;\ldots;x_r;\ldots;x_q)+R(x_0;\ldots;x_{r,2};\ldots;x_{r,n_r};\ldots;x_q) \in \mathcal{L}^{(p),k}_{(n)}$

on a $0 = DP = x_{r,1}\left[DQ + \partial_{r,2}R\right] + D_r R$, avec

$$D_r = \sum_{s \neq r}\left(x_{s,1}\partial_{s,2}+\ldots+ x_{s,n_s-1}\partial_{s,n_s}\right)+\left(x_{r,2}\partial_{r,3}+\ldots+ x_{r,n_r-1}\partial_{r,n_r}\right),$$

d'où

$$0 = D_r R = \tau_r^{-1} \circ \sum_{s \neq r}\left(x_{s,1}\partial_{s,2}+\ldots+ x_{s,n_s-1}\partial_{s,n_s}\right) +$$

$$\left(x_{r,1}\partial_{r,2}+\ldots+ x_{r,n_r-2}\partial_{r,n_r-1}\right) \circ \tau_r(R)$$

et donc $\tau_r(R) = \tau_r \circ \rho_r(P) = \pi_r(P) \in \mathcal{L}^{(p),k-p_r}_{(n_0,\ldots,n_r-1,\ldots,n_q)}$.

Réciproquement si l'on part de $S \in \mathcal{L}^{(p),k-p_r}_{(n_0,\dots,n_r-1,\dots,n_q)}$, on a

$\partial_{r,2} \circ \tau_r^{-1}(S) \in \mathfrak{P}^{(p_0,\dots,p_r-1,\dots,p_q),k-1}_{(n_0,\dots,n_r,\dots,n_q)}$, et par la proposition 1,

(a), on peut trouver $Q \in \mathfrak{P}^{(p_0,\dots,p_{r-1},\dots,p_q),k}_{(n_0,\dots,n_r,\dots,n_q)}$ tel que

$DQ = -\,\partial_{r,2} \circ \tau_r^{-1}(S)$, ceci dès que

$$k \leq \frac{1}{2} \quad \sum_{s\neq r} (n_s-1)p_s + (n_r-1)(p_r-1) \quad = \frac{1}{2}\,(m-n_r+1).$$

Posant alors $P = x_{r,1}Q + \tau_r^{-1}(S)$, il vient $\pi_r(P) = S$, et

$$\begin{aligned} DP &= x_{r,1}\left[DQ+\partial_{r,2}\circ\tau_r^{-1}(S)\right] + D_r \circ \tau_r^{-1}(S) \\ &= \tau_r^{-1}\left[\sum_{s\neq r}\left(x_{s,1}\partial_{s,2}+\dots+x_{s,n_s-1}\partial_{s,n_s}\right) + \right. \\ &\qquad \left.\left(x_{r,1}\partial_{r,2}+\dots+x_{r,n_{r-2}}\partial_{r,n_r-1}\right)\right] S \quad = 0, \end{aligned}$$

soit $P \in \mathcal{L}^{(p),k}_{(n)}$.

<u>Proposition 2</u> : Le produit commutatif $\pi_0^{m_0} \circ\dots\circ \pi_q^{m_q}$ est surjectif de $\mathcal{L}^{(p),k}_{(n_0,\dots,n_q)}$ sur $\mathcal{L}^{(p),k-m_0p_0-\dots-m_qp_q}_{(n_0-m_0,\dots,n_q-m_q)}$ dès que $k \leq \inf\frac{1}{2}(m-n_r+1)$ l'inf portant sur les $r\in\{0,\dots,q\}$ tels que $m_r>0$.

Preuves : Que les π_r commutent est clair. L'application considérée est le produit des

$$\pi_r^{m_r} : \mathcal{L}^{(p),k-m_0p_0-\dots-m_{r-1}p_{r-1}}_{(n_0-m_0,\dots,n_{r-1}-m_{r-1},n_r,\dots,n_q)} \longrightarrow \mathcal{L}^{(p),k-m_0p_0-\dots-m_rp_r}_{(n_0-m_0,\dots,n_r-m_r,n_{r+1},\dots,n_q)}$$

pour tous les r tels que $m_r > 0$, et chacune est à son tour le produit des

$$\pi_r : \mathcal{L}^{(p),k-m_0p_0-..-m_{r-1}p_{r-1}-(j-1)p_r}_{(n_0-m_0,..,n_{r-1}-m_{r-1},n_r-j+1,n_{r+1},..,n_q)}$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}^{(p),k-m_0p_0-..-m_{r-1}p_{r-1}-jp_r}_{(n_0-m_0,..,n_{r-1}-m_{r-1},n_r-j,n_{r+1},..,n_q)}$$

pour $j = 1,..,m_r$. Or chacune de ces dernières est surjective, d'après le lemme 1, dès que

$$2\ k-m_0p_0-..-m_{r-1}p_{r-1}-(j-1)p_r \le \left[\sum_{s=0}^{r-1}(n_s-m_s-1)p_s\right]+\left[\sum_{s=r+1}^{q}(n_s-1)p_s\right]$$

$$+ (n_r-j)p_r - (n_r-j+1) + 1$$

soit $2k \le \left[\sum_{s=0}^{q}(n_s-1)p_s\right] - n_r+1 + \sum_{s=0}^{r-1}m_sp_s + (j-1)\ (p_r+1)$, en particulier dès que $2k \le m-n_r+1$.

Supposons $n_0 = \sup\limits_{0 \le r \le q} n_r \ge 2$ et posons

$$Z = x_{0,1} \ ; \ Y_{2j} = x_{0,j+1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{j} (-1)^i x_{0,j+1-i} x_{0,j+1+i} \qquad \left(1 \le j \le \frac{n_0 - 1}{2}\right),$$

$$Y_{2j+1} = -x_{0,2} x_{0,j+1}^2 + \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} x_{0,i+1}$$

$$2x_{0,2} x_{0,2j+1-i} - (2j+1-2i) x_{0,1} x_{0,2j+2-i} \qquad \left(1 \le j \le \frac{n_0}{2} - 1\right)$$

$$X_{r,0} = x_{r,1} \ ; \ X_{r,j} = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1} x_{0,i} x_{r,j+2-i} \quad (1 \le j \le n_r - 1 \ ; \ 1 \le r \le q)$$

$$B = Z, Y_2, \ldots, Y_{n_0-1} \ ; \ X_{1,0}, \ldots, X_{1,n_1-1} \ ; \ldots ; \ X_{q,0}, \ldots, X_{q,n_q-1}$$

On a $\#B = n-1$, $Z \in \mathcal{L}_{(n)}^{(1,0..,0),0}$, $X_{r,0} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(0,..,1,..,0),0}$

$Y_{2j} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(2,0,..,0),2j}$, $Y_{2j+1} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(3,0,..,0),2j+1}$,

$X_{r,j} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(1,0..,0,1,0.0),j}$ $(j \ge 1)$

Proposition 3 : Les éléments de B sont algébriquement indépendants, et $K = k(B)$

Preuve : L'application $x \xmapsto{\alpha} (x_{0,2}, B)$ est birationnelle de k^n dans lui-même, son jacobien est de la forme $a.(x_{0,1})^b$ avec a, b entiers. Elle induit un isomorphisme de $k(x)$, qui transporte D sur $Z \dfrac{\partial}{\partial x_{0,2}}$.

Exemple : Si $q=1$, $n_0=5$, $n_1=4$, en écrivant y_j au lieu de $x_{0,j}$ et x_j au lieu de $x_{1,j}$, on obtient comme base du corps des invariants rationnels les huit polynômes :

$Z = y_1 \in \mathcal{L}_{5,4}^{(1,0)0}$ $\qquad$ $X_0=x_1\in\mathcal{L}_{5,4}^{(0,1)1}$

$Y_2 = y_2^2 - 2y_1y_3 \in \mathcal{L}_{5,4}^{(2,0)2}$ $\qquad$ $X_1=x_1y_2-x_2y_1\in\mathcal{L}_{5,4}^{(1,1)1}$

$Y_3 = y_2^3-3y_1y_2y_3+3y_1^2y_4 \in \mathcal{L}_{5,4}^{(3,0)3}$ $\qquad$ $X_2=x_1y_3-x_2y_2+x_3y_1\in\mathcal{L}_{5,4}^{(1,1)2}$

$Y_4=y_3^2-2y_2y_4+2y_1y_5\in\mathcal{L}_{5,4}^{(2,0)4}$ $\qquad$ $X_3=x_1y_4-x_2y_3+x_3y_2-x_4y_1\in\mathcal{L}_{5,4}^{(1,1)3}$

Remarques : 1) On peut vérifier que la base B minimise les degrés d'un système de générateurs de $\mathcal{K}$: il y en a q de degré 1, $\left[\frac{n_0-1}{2}\right] + n_1+\ldots+ n_q - q$ de degré 2, et seulement $\left[\frac{n_0}{2}\right] - 1$ de degré 3.

2) On ne suppose plus que $n_0 = \sup n_r$, mais $n_r \geq 2$; si l'on pose de même, pour $1 \leq j \leq \frac{1}{2}(n_r-1)$

$$Y_{r,2j} = x_{r,j+1}^2+2\sum_{i=1}^{j}(-1)^i x_{r,j+1-i}x_{r,j+1+i} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(0,..,2,..,0)2j},$$

et pour $1 \leq j \leq \frac{1}{2}n_r -1$

$$Y_{r,2j+1}=-x_{r,2}x_{r,j+1}^2+\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}x_{r,i+1}$$

$$2x_{r,2}x_{r,2j+1-i}-(2_j+1-2i)x_{r,1}x_{r,2j+2-i} \quad \in \mathcal{L}_{(n)}^{(0,..,3,..,0)2j+1}$$

$$Z,Y_2,..,Y_{n_0-1};X_{1,0},X_{1,1},Y_{1,2},..,Y_{1,n_1-1};..;X_{q,0},X_{q,1},Y_{q,2},..,Y_{q,n_q-1}$$

est encore une base de $\mathcal{K}$, et la preuve est analogue à celle de la proposition 3.

Enfin l'énoncé suivant est une simple application de la proposition 2 :

<u>Corollaire 2</u> :

(a) $(n_r-2m_r-1)\alpha \geq n_r-1 \Rightarrow X^{\alpha}_{r,0} \in \pi_r^{m_r}(\mathcal{L}_{(n)}) \qquad (0 \leq r \leq q)$

(b) $(n_r-2m_r-1)\alpha + (n_r-2m_r-3)s \geq n_r-1 \Rightarrow X^{\alpha}_{r,0}Y_{r,s} \in \pi_r^{m_r}(\mathcal{L}_{(n)})$

(c)
$$(n_r-2m_r-1)\alpha + (n_t-2m_t-3)s \geq \sup(n_r,n_t)-1 \Rightarrow$$
$$X^{\alpha}_{r,0}Y_{t,s} \in \pi_r^{m_r} \circ \pi_t^{m_t}(\mathcal{L}_{(n)})$$

(d)
$$(n_r-2m_r-1)\alpha + (n_r+n_t-2m_r-2m_t-2s-2) \geq \sup(n_r,n_t)-1 \Rightarrow$$
$$X^{\alpha}_{r,0}X_{r,t,s} \in \pi_r^{m_r}\,\pi_t^{m_t}(\mathcal{L}_{(n)})$$

$$\text{avec } X_{r,t,s} = \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i+1} x_{r,i}\, x_{t,s+2-i} \in \mathcal{L}^{(0,..,1,..,1,..,0)s}_{(n)}$$

IV EXPRESSION RATIONNELLE DES INVARIANTS ALGEBRIQUES

Avec les notations du paragraphe précédent, posons encore

$Y'_{2j} = Z^{2j-2}$, $Y'_{2j+1} = Z^{2j-2}Y_{2j+1}$, $X'_{r,j} = Z^{j-1}X_{r,j}$

$B' = Z, Y'_2, .., Y'_{n_0-1} ; X'_{1,0}, .., X'_{1,n_1-1} ; .. ; X'_{q,0}, .., X'_{q,n_q-1}$,

$B'' = B' - \{Z\}$

On a maintenant $Z \in \mathcal{L}_{(n)}^{(1,0,-,0)0}$, $Y'_j \in \mathcal{L}_{(n)}^{(j,0,-,0)j}$

$X'_{r,j} \in \mathcal{L}_{(n)}^{(0,-,0,j,0,-,0)j}$ $(1 \le j \le q,\ 0 \le j \le n_r - 1)$

<u>Proposition 4</u> : a) $k[B'] \subset \mathcal{L}_{(n)} \subset k(Z)[B'']$

b) Tout élément de $\mathcal{L}_{(n)}^{(p)k}$ s'écrit de façon unique Z^{p_0-k} $P(B'')$, où P est un polynôme multihomogène de degré $(k, p_1, .., p_q)$ et quasihomogène de masse k, quand on donne à Y'_j et $X'_{r,j}$ la masse j.

Preuve : L'application $(x_{0,2}, .., x_{0,n_0} ; x_1 ; .. ; x_q) \overset{\beta}{\longmapsto} (x_{0,2}, B'')$ est un automorphisme (bialgébrique) de $k_1[x_{0,2}, .., x_{0,n_0} ; x_1 ; .. ; x_q]$, avec $k_1 = k\ (x_{0,1})$, et $\beta^*(D) = x_{0,1} \dfrac{\partial}{\partial x_{0,2}}$; donc

$$\mathcal{L}_{(n)} \subset k\left[x_0 ; \ldots ; x_q\right] \cap k_1(B'')$$
$$\subset k_1\left[x_{0,2}, \ldots, x_{0,n_0} ; x_1 ; .. ; x_q\right] \cap k_1(B'')$$
$$= k_1\left[x_{0,2}, B''\right] \cap k_1(B'') = k_1[B'']$$

d'où le cas, la première inclusion étant claire. Si $R \in \mathcal{L}_{(n)}^{(p)k}$, il s'écrit donc $R = Q(Z)^{-1}$ $P(B')$, où P et Q sont premiers entre eux et homogènes ; donc Q est monomial et on peut supposer $Q = Z^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$. Le monôme $\mu = \left[\prod_{j=2}^{n_0-1} Y'^{\beta_j}_j\right] \prod_{r=1}^{q} \left[\prod_{j=0}^{n_r-1} X'^{\alpha_{r,j}}_{r,j}\right]$ $(\beta_j ; \alpha_{r,j} \in \mathbb{N})$

est de degré $(k, p_1, \dots, p_q)$ et de masse k, avec pour $1 \le r \le q$

$$p_r \sum_{j=1}^{n_q-1} \alpha_{r,j} \quad \text{et} \quad k = \sum_{j=2}^{n_0-1} j\beta j + \sum_{r=1}^{q} \left[\sum_{j=1}^{n_r-1} j\alpha_{r,j} \right]$$

Donc tous les monômes de P sont de la forme $Z^{\ell}.\mu$, avec $\ell-\alpha = p_0-k$

Comme P et Q sont premiers, $\ell = 0$ et $\alpha = k - p_0$.

<u>Remarque</u> : Le (b) donne le principal outil de calcul pratique "degré par degré" d'un système de générateurs de $\mathcal{L}(n)$: ayant déterminé tous les générateurs nécessaires jusqu'à un certain degré $(p_0, \dots, p_r-1, \dots, p_q)$, on calcule la dimension du sous-espace de $\mathcal{L}^{(p)}_{(n)}$ qu'ils engendrent, et on compare avec la dimension de $\mathcal{L}^{(p)}_{(n)}$ donnée par le corollaire 1. Les syzygies se lisent aussi le plus commodément sur les expressions (b). On obtient ainsi un algorithme rapide de détermination des degrés et masses (p),k des générateurs. On peut alors les calculer explicitement, toujours en cherchant d'abord leurs expressions rationnelles (b).

Exemple : Pour $\mathcal{L}_{(5,4)}$ et en suivant les notations du §III, on trouve que les générateurs de degré total ≤ 3 de $\mathcal{L}_{(5,4)}$ sont, outre les élément de (B), Z, X_0, Y_2, Y_4, X_1, X_2, X_3, et Y_3 :

$$G_{022} = Z^{-2}(X_1^2 - X_0^2Y_2 - 2X_0X_2Z)$$
$$= x_2^2 - 2x_1x_3$$

$$G_{306} = Z^{-3}(Y_3^2 - Y_2^3 + 3Y_2Y_4Z^2)$$
$$= 2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 6y_2^2y_5 + 9y_1y_4^2 - 12y_1y_3y_5$$

$$G_{213} = Z^{-1}(X_0Y_3 - X_1Y_2)$$
$$= x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_1(3y_1y_4 - y_2y_3)$$

$$G_{214} = Z^{-2}(X_0Y_2^2 - X_1Y_3 + X_2Y_2Z)$$
$$= x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_2(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_1(2y_3^2 - 3y_2y_4)$$

$$G_{215} = Z^{-3}(X_0Y_2Y_3 - X_1Y_2^2 + X_2Y_3Z + X_1Y_4Z^2 - X_3Y_2Z^2)$$
$$= x_4(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_3(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) + x_1(2y_2y_5 - y_3y_4)$$

$$G_{123} = Z^{-2}(X_0^2Y_3 - X_0Y_1Y_2 + X_1X_2Z - 3X_0X_3Z^2)$$
$$= (x_2^2 - 2x_1x_3)y_2 + (3x_1x_4 - x_2x_3)y_1$$

$$G_{124} = Z^{-3}(X_0^2Y_2^2 + X_0X_1Y_3 - 2X_1^2Y_2 + 3X_0X_2Y_2Z - 3X_1X_3Z^2 + 2X_2^2Z^2)$$
$$= (x_2^2 - 2x_1x_3)y_3 + (3x_1x_4 - x_2x_3)y_2 + (2x_3^2 - 3x_2x_4)y_1$$

$$G'_{124} = Z^{-3}(X_0^2Y_2^2 - X_1^2Y_2 + 2X_0X_2Z - X_0^2Y_4Z^2 - 2X_1X_3Z^2 + X_2^2Z^2)$$
$$= (x_3^2 - 2x_2x_4)y_1 + 2x_1(x_4y_2 - x_3y_3 + x_2y_4 - x_1y_5)$$

$$G_{033} = Z^{-3}(X_0^3Y_3 - X_1^3 + 3X_0X_1X_2Z - 3X_0^2X_3Z^2)$$
$$= x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$$

V LA STRATIFICATION CANONIQUE

Posons $n'_r = \left[\dfrac{n_r}{2}\right]$ pour $0 \le r \le q$ et notons F le sous-espace de $k^{n_0+..+n_q}$ d'équations $x_{0,1}=\ldots= x_{0,n'_0} =\ldots= x_{q,1}=\ldots= x_{q,n'_q} = 0$

Proposition 5 : $\mathcal{L}_{(n)}\big|_F \subset k\left[x_{r_1,n'_{r_1}+1},\ldots,x_{r_s,n'_{r_s}+1}\right]$

où $\{r_1,\ldots,r_s\}$ est l'ensemble des $r\in\{0,\ldots,q\}$ tels que n_r est impair.

Preuve : Soit $P \in \mathcal{L}^{(p),k}_{(n)}$ non nul, et

$$x_{0,n'_0+1}^{\alpha_{0,n'_0+1}} \ldots x_{0,n_0}^{\alpha_{0,n_0}} \ldots x_{q,n'_q+1}^{\alpha_{q,n'_q+1}} \ldots x_{q,n_q}^{\alpha_{q,n_q}}$$

un monôme qui figure dans $P_{|F}$. On a $p_r = \alpha_{r,n'_r+1} + \ldots + \alpha_{r,n_r}$ et

$$K = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=n'_r+1}^{n_r} (s-1)\alpha_{r,s} \right],$$ d'où par le corollaire 1, (a) :

$$0 \le \sum_{r=0}^{q} (n_r-1)p_r-2k = \sum_{r=0}^{q} \left[\sum_{s=n'_r+1}^{n_r} (n_r+1-2s)\alpha_{r,s} \right]$$

Comme $n_r = 2n'_r$ ou $2n'_r + 1$, on a $n_r + 1 - 2s \le 0$ pour $s\ge n'_r+1$ et l'inegalité ci-dessus implique $\alpha_{r,s} = 0$ dès que n_r est pair, où dès que n_r est impair et $s>n'_r+1$.

Avec les notations du §II, on a pour $t\in k$, $\exp tM\in\Gamma$ et $\exp tM(x_0;\ldots;x_q) = (x_0(t);\ldots;x_q(t))$, avec pour $0 \le r \le q$

$$x_r(t) = \left(x_{r,1}, x_{r,2}+tx_{r,1},\ldots x_{r,n_r}+tx_{r,n_r-1}+\ldots+\frac{t^{n_r-1}}{(n_r-1)!}\, x_{r,1}\right)$$

On vérifie aisément les assertions suivantes : les orbites Γ dans $k^{n_0+\dots+n_q}$ se groupent en les familles $\mathcal{F}_{m_0,\dots,m_q}$ $(1\le m_r\le n_r ; 0\le r\le q)$; l'obite O d'un point $x = (x_0;\dots;x_q)$ appartient à $\mathcal{F}_{m_0,\dots,m_q}$ si et seulement si : $\forall r\in\{0,\dots q\}$, $m_r = \inf\{j|x_{r,j}\neq 0\}$; elle est de dimension 1 sauf si $m_r = n_r$ pour tout r.

Supposons qu'il existe r_0 tel que $m_{r_0} < n_{r_0}$ et choisissons des constantes arbitraires

$$(*)\quad \begin{array}{ll} a_{r,m_r},\dots,a_{r,n_r-1} \ ;\ \text{avec } a_{r,m_r}\neq 0 \ (\text{si } m_r\le n_r-1) & \\ a_{r,m_r} \ (\text{si } m_r = n_r) & (0\le r\le q) \\ b_r \ (0\le r\le q,\ r\neq r_0) & \end{array}$$

et notons $O_{(*)}$ la courbe algébrique dans $k^{n_0+\dots+n_q}$ d'équations

$$x_{r,1}=\dots= x_{r,m_r-1}=0 \ ;\ x_{r,m_r} = a_{r,m_r}$$

$$\tau_r^{m_r-1}(Y_{r,2}) = a_{r,m_r+1};\dots;\ \tau_r^{m_r-1}(Y_{r,n_r-m_r}) = a_{r,n_r-1} (\text{si } m_r\le n_r-2)$$

$$\tau_{r_0}^{m_{r_0}-1}\circ\tau_r^{m_r-1}(X_{r,1}) = b_r \quad (0\le r\le q \ ;\ r\neq r_0 \ ;\ m_r\le n_r-1)$$

Alors toute orbite de Γ de dimension 1 est l'une des courbes $O_{(*)}$, et tout choix (*) de constantes définit une et une seule orbite de la famille $\mathcal{F}_{m_0,\dots,m_q}$. Enfin les autres orbites, formant $\mathcal{F}_{n_0,\dots,n_q}$, sont des points.

Proposition 6 : Supposons qu'il existe $r \in \{0,\dots,q\}$ tel que $n_r>1$. L'ouvert $U = k^{n_0+\dots+n_q}-F$ est la réunion des orbites séparées par l'anneau $\mathcal{L}_{(n)}$ des invariants.

Preuve : U est la réunion de toutes les orbites (de dimension 1) appartenant aux familles $\mathcal{F}_{m_0,\dots,m_q}$ telles que $m_{r_0} \le n'_{r_0}$ pour un certain r_0.

La description donnée ci-dessus de ces orbites, jointe au corollaire 2, montre qu'on peut trouver assez d'éléments de $\mathcal{L}_{(n)}$ pour séparer chaque orbite de U des autres et de F.

Que celle de F ne soient pas séparables résulte de la proposition 5 et d'une considération de dimension, sauf dans le cas où tous les n_r impairs valent 1, sauf l'un d'eux, soit n_{r_1}, qui vaut 3. Mais dans ce cas $\mathcal{L}_{(n)} = K\left[x^2_{r_1,2}, x_{r_2,1},\dots,x_{r_s,1}\right]$ et les points dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $x_{r_1,2} = \pm 1$ appartiennent à deux orbites différentes qui ne sont pas séparées par $\mathcal{L}_{(n)}$.

<u>Remarque</u> : On a toujours codim F ≥ 2, sauf si tous les n_r valent 1, sauf l'un d'entre eux, disons n_0, qui vaut 1,2, ou 3. Dans tout autre cas $\mathcal{L}_{(n)}$ s'identifie donc à l'anneau des fonctions algébriques (régulières) sur U invariantes sous l'action de Γ.

D'après [5], §2.4.2, la restriction de l'action de Γ à l'ouvert U admet un quotient, c'est à dire qu'il existe une variété algébrique quasi affine $V_{(n)}$ et un morphisme surjectif et universellement ouvert $\varphi : U \longrightarrow V_{(n)}$ dont les fibres sont les orbites de Γ dans U, et tel que les fonctions algébriques régulières sur $V_{(n)}$ s'identifient par φ^* aux fonctions algébriques régulières sur U invariantes par Γ, c'est à dire aux polynômes de l'anneau $\mathcal{L}_{(n)}$. Comme la restriction de l'action de Γ au sous-espace F se décrit de la même façon, en remplaçant $(n) = (n_0,\dots,n_q)$ par $(n_0-n'_0,\dots,n_q-n'_q)$, on peut recommencer et on obtient que la deuxième stratification canonique au sens de Dixmier et Raynaud

([5], §2) existe, et se compose de $l(n) + 1$ strates, où $l(n)$ est défini par

$$2^{l(n)-1} < \sup_r n_r \leq 2^{l(n)}$$

et les $l(n)$ premières strates sont des ouverts de la forme U ci-dessus par une suite décroissante de valeurs de (n), la dernière étant le sous-espace de dimension q d'équations $x_{r,s}=0$ dès que $s < n_r$.

Exemple : Dans l'exemple déjà étudié aux paragraphes III et IV de $\mathcal{L}_{(5,4)}$, il suffit pour séparer les orbites séparables de choisir Z, X_0, Y_2, Y_4, X_1, X_2, X_3, G_{022}, Y_3, G_{306}, G'_{124} et G_{033} déjà cités, et de leur ajouter deux éléments :

$$
\begin{aligned}
G_{046} = Z^{-6}\Big(&-X_0^4Y_2^3-X_0^4Y_3^2+3X_0^2X_1^2Y_2^2+2X_0X_1^3Y_3-3X_1^4Y_2-6X_0^3X_2Y_2^2Z \\
&-6X_0^2X_1X_2Y_3Z+12X_0X_1^2X_2Y_2Z+6X_0^3X_3Y_3Z^2-12X_0^2X_2^2Y_2Z^2 \\
&-6X_1^3X_3Z^2+3X_1^2X_2^2Z^2+18X_0X_1X_2X_3Z^3-8X_0X_2^3Z^3-9X_0^2X_3^2Z^4\Big) \\
= {}& 3x_2^2x_3^2-6x_2^3x_4-8x_1x_3^3+18x_1x_2x_3x_4-9x_1^2x_4^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{148} = Z^{-7}\Big(&-3X_0^4Y_2Y_3^2+6X_0^3X_1Y_2^2Y_3-3X_0^2X_1^2Y_2^3+3X_0^2X_1^2Y_3^2-6X_0X_1^3Y_2Y_3 \\
&+3X_1^4Y_2^2+2X_0^3X_2Y_2^3Z-4X_0^3X_2Y_3^2Z+6X_0^2X_1X_2Y_2Y_3Z-6X_0X_1^2X_2Y_2^2Z \\
&+2X_1^3X_2Y_3Z+3X_0^4Y_2^2Y_4Z^2+12X_0^3X_3Y_2Y_3Z^2-6X_0^2X_1^2Y_2Y_4Z^2 \\
&-12X_0^2X_1X_3Y_2^2Z^2+9X_0^2X_2^2Y_2^2Z^2-12X_0X_1^2X_3Y_3Z^2+3X_1^4Y_4Z^2 \\
&+12X_1^3X_3Y_2Z^2-9X_1^2X_2^2Y_2Z^2+12X_0^3X_2Y_2Y_4Z^3+12X_0^2X_2X_3Y_3Z^3 \\
&-12X_0X_1^2X_2Y_4Z^3-12X_0X_1X_2X_3Y_2Z^3+12X_0X_2^3Y_2Z^3 \\
&+12X_0^2X_2^2Y_4Z^4-9X_0^2X_3^2Y_2Z^4+9X_1^2X_3^2Z^4-12X_1X_2^2X_3Z^4+4X_2^4Z^4\Big) \\
= {}& 6\left(x_2^4-4x_1x_2^2x_3+4x_1^2x_3^2\right)y_5 - 6\left(x_2^3x_3-2x_1x_2x_3^2-3x_1x_2^2x_4+6x_1^2x_3x_4\right)y_4 \\
&+2\left(3x_2^2x_3^2-4x_1x_3^3+3x_2^3x_4+9x_1^2x_4^2\right)y_3 \\
&-2\left(2x_2x_3^3-3x_2^2x_3x_4-6x_1x_3^2x_4+9x_1x_2x_4^2\right)y_2 \\
&+\left(4x_3^4-12x_2x_3^2x_4+9x_2^2x_4^2\right)y_1
\end{aligned}
$$

VI L'ANNEAU DES INVARIANTS ALGEBRIQUES

Lemme 2 : Pour $P \in \mathfrak{P}_{(n)}$ l'application $g \longmapsto gP$ de Γ dans $\mathfrak{P}_{(n)}$ est injective dès qu'elle n'est pas constente.

Preuve : Si $gP = P$ avec $g = \exp t_0 M$, $t_0 \in k^*$, on a pour tout $a \in \mathbb{Z}$ $g^a P = \exp\,(a t_0 M)P = P$. Comme M est nilpotente, pour tout $x \in k^n$ fixé, l'application $t \longmapsto \left[(\exp\,t\,M)P\right](x) - P(x)$ est un polynôme qui s'annule sur tous les multiples de t_0 ; donc il est nul.

Proposition 7 : Les facteurs irréductibles d'un élément de $\mathcal{L}_{(n)}$ sont dans $\mathcal{L}_{(n)}$. En particulier $\mathcal{L}_{(n)}$ est factoriel.

Preuve : Soit $P \in \mathcal{L}_{(n)} - \{0\}$, $P = P_1, \dots, P_s$ sa décomposition irréductible, et $g \in \Gamma - \{id\}$.

Comme $\left[gP_1\right] \dots \left[gP_s\right] = gP = P = P_1 \dots P_s$, l'action de g permute $P_1, \dots, P_s$, et il existe donc un entier r tel que g^r les conserve. On a $g^r \neq id$, et la conclusion résulte donc du lemme.

Soit Φ un système fini d'éléments de $\mathcal{L}_{(n)}$ suffisant pour séparer les orbites séparables de Γ dans k^n. (La preuve de la proposition 6 rend clair qu'on peut construire un tel système avec au plus $\frac{1}{2} n^2$ éléments). D'après la proposition 5 (et avec ses notations), le "nilcône" de l'action de Γ, c'est à dire le cône où tous les éléments de $\mathcal{L}_{(n)}$ sans terme constant s'annulent, est le sous-espace

$$F' = F \cap x_{r_1, n'_{r_1}+1} = \dots = x_{r_s, n'_{r_s}+1} = 0$$

Posons $\Phi' = \Phi \cup Y_{r_1, n_{r_1}}, \dots, Y_{r_s, n_{r_s}}$ et $\mathcal{L}' = k\,[\Phi']$

D'après le théorème de Hilbert ([8], §4) les éléments de $\mathcal{L}_{(n)}$ sont tous entiers sur $\mathcal{L}'$. Comme $\mathcal{L}_{(n)}$ est factoriel par la proposition 7, il est intégralement clos, et c'est donc la cloture intégrale de $\mathcal{L}'$.

Enfin par la proposition 4, cette cloture est contenue dans $K(Z)[\Phi']$.

Un algorithme "fini" dû à Stolzenberg, existe pour calculer la cloture intégrale d'un tel anneau.

Ainsi $V_{(n)}$ est la normalisée de la variété quasi affine $V'_{(n)}=\Phi'(U)$ déjà plongée dans $k^{\#\Phi'}$. Mais la dimension de plongement de $V_{(n)}$ est asymptotiquement beaucoup plus élevée que celle de $V'_{(n)}$ (à croissance au moins en exp $\sqrt{n}$).

Déjà dans l'exemple déjà étudié de $\mathcal{L}_{(5,4)}$, un système de générateurs complet de $\mathcal{L}_{(5,4)}$ n'a pas moins de 60 éléments (les 35 premiers, de degré ≤ 5 ont été calculés dans [3]).

Dans la pratique on peut aussi vérifier la complétude d'un système de générateurs calculé "à l'aveugle" par la méthode du paragraphe IV de trois autres façons :

- en calculant la série de Poincaré de $\mathcal{L}_{(n)}$, par exemple par la formule de [2], et constatant qu'elle coïncide avec celle de l'anneau engendré ; ceci est évidemment facilité par la détermination préalable d'un système de paramètres (multi homogène quand c'est possible).

- par récurrence sur les dimensions $n_0, \ldots, n_q$, en étudiant les images par les applications π_r du §II des générateurs que l'on a, qui tombent dans un autre anneau du même type, et relevant les éléments de $\mathrm{Im}(\pi_r)$.

- en consultant l'abondante littérature du XIX^e siècle, où beaucoup de cas ont été étudiés dans le cadre des covariants des formes binaires.

Aucune des ces méthodes n'est rapide !

REFERENCES

[1] **BRION M.** *"Invariants de plusieurs formes binaires"*
Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), p. 429-445.

[2] **BRION M.** *"Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple"*
Annales Inst. Fourier, 33 (1983), p. 1-27.

[3] **CEREZO A.** *"Table des invariants algèbriques et rationnels d'une matrice de petite dimension"*
Preprint n° 146. Nice (1987)

[4] DIXMIER J. *"Algèbres enveloppantes"*
Gauthier-Villars, Paris (1974)

[5] **DIXMIER J. et M. RAYNAUD** *"Sur le quotient d'une variété algèbrique par un groupe algèbrique"*
Math. Analysis and Appl. Advances in Math. Suppl. studies, part A, vol 7A, p. 327-344

[6] **ELPHICK C., E. TIRAPEGUI, M. BRACHET, P. COULLET, G. IOOSS.**
"A simple global characterization for normal forms of singular vector fields"
Preprint n° 109. Nice (1986)

[7] **GROSSHANS F.** *"The invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups"*

Inventiones Math. 73 (1983) p. 1-9.

[8] **HILBERT D.** *"Uber die vollen Invariantensysteme"*

Math. Annalen 42 (1983) p. 313-373.