CHAPITRE III : LA TRANSFORMATION DE FOURIER

30 REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on sait diagonaliser dans une même base toute une famille d'opérateurs linéaires, dès qu'ils commutent entre eux, et sont diagonalisables; de plus tout autre opérateur qui leur commute y est aussi diagonalisé (si c'est possible).

Soit E un espace de fonctions $f: G \to \mathbb{C}$, où G est un groupe abélien. G agit sur lui-même par translations ($\tau_a: x \mapsto x+a$), donc aussi sur E ($\tau_a f(x) = f(x-a)$). Une base qui diagonalise les translations est formée de fonctions propres : $\forall a \in G\ \exists \lambda(a) \in \mathbb{C}\ \forall x \in G\ \ f(x+a) = \lambda(a) f(x)$.
D'où $f(a) = \lambda(a) f(0)$ puis $\lambda(a+b) f(0) = f(a+b) = \lambda(a) f(b) = \lambda(a)\lambda(b) f(0)$, et dès que $f(0) \neq 0$ (sinon $f \equiv 0$ n'est pas "propre"), $\lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b)$ et $\lambda(0) = 1$.
f est donc proportionnelle à un <u>caractère</u> du groupe G, c'est-à-dire un morphisme $G \xrightarrow{\lambda} (\mathbb{C}^*, \times)$. Si $\mathrm{Im}\,\lambda \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ on dit que le caractère est <u>unitaire</u> (dès que $\lambda \neq 0$, $|\lambda|$ est aussi un caractère, et $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ est un caractère unitaire. Si l'on parvient à décomposer toute $f \in E$ en "combinaison" de caractères, tout opérateur $E \to E$ qui commute aux translations sera diagonalisé (si c'est possible) automatiquement.

L'ensemble des caractères est lui-même un groupe "dual" G^*, muni du produit point par point, et comme dans le cas des espaces vectoriels, on soupçonne que $G^{**} \simeq G$ assez souvent, par exemple quand G est un groupe topologique, et G^* le groupe des caractères unitaires continus.

L'ensemble des coefficients de la décomposition de f est une nouvelle fonction $\hat{f}$ sur G^*, appelée transformée de Fourier de f, et bien sûr on espère que $\hat{\hat{f}}$ s'identifie à f ("inversion" de Fourier)

Naturellement dès que G est infini, c'est à une généralisation de la notion de combinaison linéaire qu'il faut penser : une intégrale, pour une mesure adaptée à chaque groupe, invariante par translation, qu'on appelle la "mesure de Haar" du groupe.

Les cas les plus classiques de tels groupes G sont d'abord $(\mathbb{R}^n, +)$, et quelques groupes associés : $\mathbb{Z}^n$ et $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n$ (le tore); c'est eux qui font l'objet de ce chapitre.

(La même théorie pour un groupe G <u>non</u> commutatif s'appelle l'"analyse harmonique" : les caractères sont alors remplacés par les "représentations irréductibles" du groupe.)

Tout ce qui est dit dans ce chapitre est donc de nature <u>globale</u> : ça ne se localise pas. Il s'agit de la "transformation de Fourier" classique (cas de $\mathbb{R}^n$), et des "séries de Fourier" (cas de $\mathbb{T}^n$).
Les caractères sont alors les exponentielles imaginaires.

§1 L'ESPACE $\mathcal{S}$ DE SCHWARTZ, ET SON DUAL $\mathcal{S}'$

L'"espace de Schwartz" $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ telles que : $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \quad p_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)|<+\infty$

On le munit de la topologie engendrée par les semi-normes $p_{\alpha,\beta}$. C'est la même que celle définie par les semi-normes

$$p_{m,m'}(f)=\sum_{|\alpha|\le m}\ \sum_{|\beta|\le m'}\sup|x^\alpha\partial^\beta f(x)| \qquad (m,m'\in\mathbb{N})$$

ou encore les $\quad q_{m,m'}(f)=\sqrt{\sum_{|\alpha|\le m'}\sup(1+|x|^m)^2|\partial^\alpha f(x)|}$

(il y a beaucoup de variantes, dont l'équivalence est laissée en exercice ; on pourrait même remplacer les sup par des normes $\mathbb{L}^1$ ou $\mathbb{L}^2$: cf chap I, §7, n°7, et la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$ ci-dessous). $\mathcal{S}$ est donc métrisable, et on peut vérifier qu'il est complet.

<u>Proposition : $(\varphi,\psi)\longmapsto\varphi*\psi$ et $(\varphi,\psi)\longmapsto\varphi\psi$ sont des applications bilinéaires bien définies, et continues de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$</u>

Preuve : Remarquons d'abord que comme $x^\alpha=\sum_{0\le\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}(x-y)^\beta y^{\alpha-\beta}$, pour $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$,
pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, on peut trouver des constantes C_α et $C'_\alpha>0$ telles que
$\forall x,y\in\mathbb{R}^n, \qquad |x^\alpha|\le C_\alpha(1+|x-y|^{|\alpha|})+C'_\alpha(1+|y|^{|\alpha|})$
Pour $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$, $\quad\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ il vient donc

$$|x^\alpha\partial^\beta(\varphi*\psi)|=|x^\alpha|\int\partial^\beta\varphi(x-y)\psi(y)dy$$
$$\le C_\alpha\int(1+|x-y|^{|\alpha|})|\partial^\beta\varphi(x-y)||\psi(y)|dy+C'_\alpha\int|\partial^\beta\varphi(x-y)|(1+|y|^{|\alpha|})|\psi(y)|dy$$
$$\le\left\{\begin{array}{l}C_\alpha\left(\sup(1+|x|^\alpha)|\partial^\beta\varphi(x)|\right)\left(\sup(1+|y|^N)|\psi(y)|\right)\\ +C'_\alpha\left(\sup|\partial^\beta\varphi|\right)\left(\sup(1+|y|^{|\alpha|})(1+|y|^N)|\psi(y)|\right)\end{array}\right\}\int\frac{dy}{1+|y|^N}$$

où l'intégrale est convergente dès que $N>n$.
Quant à $|x^\alpha\partial^\beta(\varphi\psi)|$, il se majore par la formule de Leibniz. ∎

On appellera ici <u>tempérées</u> les fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ qui sont à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées :
$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n\ \exists\, C_\alpha>0$ et $m_\alpha\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n\quad |\partial^\alpha f(x)|\le C_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}$

<u>Proposition : Les opérateurs différentiels linéaires à coefficients tempérés sont définis et continus de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$</u>

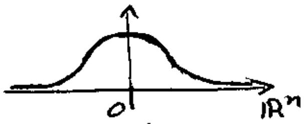
Preuve : Il suffit de le vérifier pour une dérivation (évident), et pour la multiplication $\varphi\mapsto f\varphi$ par une fonction tempérée f :
Par Leibniz il suffit de vérifier que, pour tous $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$,
$$\sup_{\mathbb{R}^n}|x^\alpha||\partial^\beta f(x)||\partial^\gamma\varphi(x)|\le\left(\sup\frac{|\partial^\beta f(x)|}{(1+|x|^{m_\beta})}\right)\left(\sup|x|^\alpha(1+|x|^{m_\beta})|\partial^\gamma\varphi(x)|\right)<\infty. \ ∎$$

<u>Proposition : Les injections $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sont continues et d'image dense.</u>

Preuve : Clairement $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{E}$. La continuité de $\mathcal{D}\hookrightarrow\mathcal{S}$ signifie :

$\forall K \Subset \mathbb{R}^n\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n\ \exists\, m, C\ \forall \varphi \in \mathcal{D}_K : \sup|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le C \sum_{|\gamma|\le m} \sup|\partial^\gamma \varphi|$
et résulte donc de ce que $\sup_K |x^\alpha| < \infty$.

La continuité de $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ signifie:
$\forall K \Subset \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ \exists\, C, m, m'\ \forall \varphi \in \mathcal{S} : \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \le C \sum_{|\beta|\le m} \sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^{m'})|\partial^\beta \varphi(x)|$
Elle est claire, avec $m'=0$, $m=|\alpha|$ (et $C=1$).
La densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ est claire, puisque $\mathcal{D}$ est déjà dense dans $\mathcal{E}$.
Enfin, si $\varphi \in \mathcal{S}$, posons pour $p \in \mathbb{N}$ $\varphi_p = (\rho_1 * \chi_{\overline{B}(0,p)})\varphi$.
Les dérivées de $\rho_1 * \chi_{\overline{B}(0,p)}$ sont majorées par des constantes indépendantes de p (dérivées de ρ_1), et nulles dans $\overline{B}(0,p-1)$, ainsi que la fonction $\rho_1 * \chi_{\overline{B}(0,p)} - 1$. Il suffit donc, par la formule de Leibniz, de vérifier que $\sup_{|x|\ge p-1} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ pour tous α, β fixés dans $\mathbb{N}^n$.
Or $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le \left(\sup_{\mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|}(1+|x|)|\partial^\beta \varphi(x)|\right) \cdot \frac{1}{1+|x|}$, d'où la conclusion que $\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{S}$. ■



<u>Exemple:</u> La "<u>gaussienne</u>" $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(a>0)$
Rappelons que $|x|^2$ est un polynôme. Les majorations sont claires.

La dernière proposition donne immédiatement, par transposition, des injections: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{S}'$ est le dual de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires <u>continues</u> de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$. De plus celles-ci sont <u>continues</u> pour la topologie faible, et d'image dense (faiblement aussi)

En particulier les éléments de $\mathcal{S}'$ s'identifient à des distributions, qu'on appelle les <u>distributions tempérées</u>

De même l'avant-dernière proposition se transpose aussi: <u>les opérateurs différentiels linéaires à coefficients tempérés sont faiblement continus de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.</u>

Achevons ce paragraphe par des exemples de distributions tempérées:

- <u>toute distribution à support compact est tempérée</u> (puisque $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$)
- <u>toute fonction localement intégrable à croissance lente définit une distribution tempérée</u>:

Preuve: Si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\exists\, C>0, m\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ |f(x)| \le C(1+|x|^m)$, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:
$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)\,dx\right| \le C \sup_{\mathbb{R}^n}\left((1+|x|^m)(1+|x|^{n+1})|\varphi(x)|\right) \cdot \int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}}$$
d'où la même majoration pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par densité. ■
(en particulier les "<u>fonctions tempérées</u>" sont des distributions tempérées!)

<u>Remarque</u>: Il n'est pourtant pas nécessaire que $f \in \mathbb{L}^1_{loc}$ soit à croissance lente pour que T_f soit tempérée. Ainsi sur $\mathbb{R}$, $x \overset{f}{\longmapsto} \exp(ie^x)$ est tempérée puisque $f \in C^\infty$ et $|f|=1$; donc aussi $(T_f)' = T_{f'}$, mais f' n'est plus à croissance lente!

— <u>les parties finies des fractions rationnelles sont tempérées</u> puisqu'on peut les décomposer en somme d'une distribution à support compact, et d'une fonction tempérée.

<u>Remarque</u>: Puisque $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$, la "tempérance" d'une distribution ne dépend que de son comportement à l'infini : intuitivement, c'est une condition de "croissance" : par exemple $e^{|x|^2}$ n'est <u>pas</u> tempérée (que vaudrait $\langle e^{|x|^2}, e^{-|x|^2}\rangle$?) Mais la précédente remarque doit rendre prudent ! En fait $T \in \mathcal{D}'$ est tempéré si et seulement si elle se prolonge (et alors de façon unique) en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$...

(§2) LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Les caractères unitaires du groupe topologique $\mathbb{R}^n$ sont les exponentielles imaginaires : $x \mapsto e^{i\langle\xi,x\rangle}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, formant un groupe $\mathbb{R}^{n*}$ isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\boxed{(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle}\varphi(x)\,dx} \quad \left(\text{On note aussi } \xi.x = \langle\xi,x\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i\right)$$

<u>Proposition</u>: <u>$\mathcal{F}$ est une application linéaire bien définie et continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$</u>. On l'appelle <u>transformation de Fourier</u> dans $\mathcal{S}$. $\hat{\varphi}$ est la "transformée de Fourier" de φ.

Preuve : Par dérivation sous le signe somme, intégration par parties, et Leibniz :

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| = \left|\int \xi^\alpha(-ix)^\beta e^{-i\langle\xi,x\rangle}\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int \left(e^{-i\langle\xi,x\rangle}\right)^{(\alpha)}(x^\beta\varphi(x))\,dx\right|$$

$$= \left|\int e^{-i\langle\xi,x\rangle}\left(x^\beta\varphi(x)\right)^{(\alpha)}dx\right| \leq \int \left|\left(x^\beta\varphi(x)\right)^{(\alpha)}\right|dx \leq C^{te}\left(\int \frac{dx}{1+|x|^{n+1}}\right).\sup(1+|x|)^{|\beta|+n+1}\sum_{\gamma\leq\alpha}|\partial^\gamma\varphi(x)|. \blacksquare$$

<u>Remarques</u>: On vient déjà d'utiliser les formules

$$\boxed{\widehat{\partial_x^\alpha\varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi)} \quad \text{et} \quad \boxed{\widehat{x^\beta\varphi(x)}(\xi) = i^\beta\partial_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)} \quad (\varphi \in \mathcal{S}; \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n)$$

De plus : <u>$\mathcal{F}$ transforme convolution en produit</u> : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$ $\boxed{\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\,\hat{\psi}}$

<u>Preuve</u> : par Fubini et changement de variable, puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$:

$$\widehat{\varphi*\psi}(\xi) = \int e^{-i\xi.x}\left(\int\varphi(x-y)\psi(y)\,dy\right)dx = \int\left(e^{-i\xi.y}\psi(y)\right)\left(\int e^{-i\xi.(x-y)}\varphi(x-y)\,dx\right)dy$$

$$= \left(\int e^{-i\xi.z}\varphi(z)\,dz\right)\left(\int e^{-i\xi.y}\psi(y)\,dy\right) = \hat{\varphi}(\xi)\,\hat{\psi}(\xi). \blacksquare$$

<u>Exemple fondamental : la gaussienne</u>

Si $f(x) = e^{-a|x|^2}$, avec $a>0$, en notant $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, ou $\frac{\partial}{\partial\xi_j}$ selon le cas, $1\leq j\leq n$, on a $\partial_j f(x) = -2a x_j f(x)$, d'où, par les formules ci-dessus :

$\partial_j\hat{f}(\xi) = -i\,\widehat{x_j f(x)}(\xi) = \frac{i}{2a}\widehat{\partial_j f}(\xi) = -\frac{1}{2a}\xi_j\hat{f}(\xi)$, équation différentielle en la fonction $\hat{f}$ de la variable ξ_j, dont la solution est $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi_1,..\xi_{j-1},0,\xi_{j+1},..\xi_n)\,e^{-\frac{\xi_j^2}{4a}}$.

Itérant ce raisonnement il vient : $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)\,e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$.

Comme $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}du\right)^n = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$ (cf. ch. I §7, exercice 1),

il vient : $\underline{\underline{\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}}}$, et pour $a = \frac{1}{2}$: $\underline{\underline{\widehat{e^{-\frac{|x|^2}{2}}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}}}$

Remarque: La transformation de Fourier des fonctions intégrables est connue depuis longtemps, ainsi que toutes les propriétés ci-dessus, lorsque celles-ci gardent un sens: si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi.x} f(x)dx$ est convergente, et la même preuve que ci-dessus donne encore $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ pour $f, g \in \mathbb{L}^1$.

Mais le maniement de $\mathcal{F}$ dans ce cadre est délicat pour deux raisons:

- en général $\hat{f} \notin \mathbb{L}^1$
- on aimerait calculer $\hat{f}$, même pour $f \notin \mathbb{L}^1$ (par exemple une partie finie)

Toutefois, on a le résultat (sans réciproque, hélas)

Théorème (de Riemann-Lebesgue): Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est une fonction continue tendant vers zéro à l'infini (donc uniformément continue)

Preuve: D'abord $|\hat{f}(\xi)| = |\int e^{-i\xi.x} f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx < \infty$. De même si $f_p \to f$ dans $\mathbb{L}^1$, $\hat{f_p} \to \hat{f}$ uniformément: $|\hat{f}_p(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \int |f_p(x) - f(x)|dx = \|f_p - f\|_{\mathbb{L}^1} \to 0$

De plus si $f \in \mathbb{L}^1$, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0$ tel que $\int_{|x|>R} |f(x)|dx < \varepsilon$. Pour $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, il vient

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi')| \leq \int_{|x|\leq R} |e^{-i(\xi-\xi').x} - 1||f(x)|dx + 2\int_{|x|>R} |f(x)|dx$$

$\leq C^{te} \|f\|_{\mathbb{L}^1} |\xi - \xi'| + 2\varepsilon$, d'où la continuité uniforme; enfin $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{L}^1$, et il existe $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B}(0,A)$ et $\|\varphi - f\|_{\mathbb{L}^1} < \varepsilon$; pour $|\xi| > A$, $|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)| + |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \|f - \varphi\|_{\mathbb{L}^1} + |\hat{\varphi}(\xi)|$

Or $|\hat{\varphi}(\xi)| \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$, puisque $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. ■

C'est pour remédier à ces inconvénients qu'on définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée, faiblement, c'est-à-dire par transposition: pour $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$, on définit $\hat{T} = \mathcal{F}T$ par:

$$\boxed{\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle}$$

$\mathcal{F}$ devient donc une application linéaire faiblement continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$, qui prolonge la transformation de Fourier de $\mathcal{S}$ (et même de $\mathbb{L}^1$):

Si $T = T_f$, avec $f \in \mathbb{L}^1$, et $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \hat{T_f}, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int f(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \iint f(\xi)\varphi(x)e^{-i\xi.x}dx d\xi \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \int \varphi(x)\left(\int f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi\right)dx = \int \varphi(x)\hat{f}(x)dx = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle. \blacksquare$$

Par transposition aussi, ou par densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ et continuité faible, on vérifie alors que: $\forall T \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\boxed{\left(\widehat{\partial_x^\alpha T}\right)_\xi = (i\xi)^\alpha \hat{T}_\xi \quad \text{et} \quad \left(\widehat{x^\beta T}\right)_\xi = i^\beta \partial_\xi^\beta \hat{T}_\xi}$

Le produit de convolution de deux distributions n'est pas défini en général (ni leur produit "ponctuel"), mais voici un cas particulier important: ($\tau_a = \delta_a *$)

$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{\left(\widehat{\tau_a T}\right)_\xi = e^{-ia\xi}\hat{T}_\xi}$ Preuve: pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \widehat{\tau_a T}, \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \hat{\varphi} \rangle = \langle T_\xi, \hat{\varphi}(\xi + a) \rangle = \langle T_\xi, (\widehat{e^{-ia.x}\varphi(x)})(\xi) \rangle$$

$$= \langle \hat{T}, e^{-iax}\varphi(x) \rangle = \langle e^{-iax}\hat{T}, \varphi \rangle. \blacksquare$$

Exemples $\boxed{\hat{\delta} = 1 \; ; \; \widehat{\delta^{(\alpha)}} = (i\xi)^\alpha \; ; \; \hat{\delta}_a = e^{-ia\xi}}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n, a \in \mathbb{R}^n)$

car $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi \rangle$; le reste s'en déduit par les formules ci-dessus. ■

On notera aussi $\overline{\mathcal F} = \mathcal F\circ\vee = \vee\circ\mathcal F$, où $\vee : \mathcal S' \to \mathcal S'$ ou $\mathcal S\to\mathcal S$ est définie par $\check\varphi(x)=\varphi(-x)$ et $\langle\check T,\varphi\rangle = \langle T,\check\varphi\rangle$ (clairement $\check T_f = T_{\check f}$). Comme $\vee$ (à prononcer "Tchech") est clairement un isomorphisme de $\mathcal S$, $\mathcal S'$ (et de tous les autres !), $\overline{\mathcal F}$ a les mêmes propriétés que $\mathcal F$ (à des signes près dans les formules précédentes).

<u>Lemme</u>: Si $T\in\mathcal D'(\mathbb R^n)$ et $x_jT=0$ pour $1\le j\le n$, $T=C\delta$ avec $C\in\mathbb C$

Preuve: D'abord $\operatorname{supp}T\subset\bigcap_j\{x\in\mathbb R^n\mid x_j=0\}=\{0\}$, et $x^\alpha T=0$ pour tout $\alpha\neq0$.
Donc (ch. I §5) $T=\sum_{|\beta|\le m}c_\beta\delta^{(\beta)}$ et donc $\sum_{|\beta|\le m}c_\beta x^\alpha\delta^{(\beta)}=0$

Comme $\langle x^\alpha\delta^{(\beta)},\varphi\rangle=(-1)^{|\beta|}(x^\alpha\varphi(x))^{(\beta)}(0)=\sum_{0\le\gamma\le\inf(\alpha,\beta)}\frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!}\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\left(x^{\alpha-\gamma}\varphi^{(\beta-\gamma)}(x)\right)(0)$

$=\frac{(-1)^{|\beta|}\beta!}{(\beta-\alpha)!}\varphi^{(\beta-\alpha)}(0)$ si $\alpha\le\beta$ et 0 sinon,

si $m=\sup_{c_\beta\neq0}|\beta|$ et $|\beta_0|=m$ avec $c_{\beta_0}\neq0$, en prenant $\alpha=\beta_0$ on trouve $c_{\beta_0}\varphi(0)=0$, pour tout $\varphi\in\mathcal D$, d'où $c_{\beta_0}=0$; donc $\alpha\neq\beta_0$, autrement dit $m=0$. ■

<u>Proposition</u>: $\boxed{\hat 1=(2\pi)^n\delta}$

Preuve: Pour $j=1,\dots,n$, on a $\partial_j1=0$, donc $\xi_j\hat1=0$, et par le lemme $\hat1=C\delta$
Mais $C=\langle C\delta,e^{-\frac{|x|^2}{2}}\rangle=\langle\hat1,e^{-\frac{|x|^2}{2}}\rangle=\langle1,(2\pi)^{n/2}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\rangle=(2\pi)^{\frac n2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)^n$
$=(2\pi)^n$ (cf. Ch I §7 exercice 1). ■

Théorème: $\mathcal F$ est un isomorphisme de $\mathcal S(\mathbb R^n)$, et un isomorphisme faible de $\mathcal S'(\mathbb R^n)$. De plus $\mathcal F^{-1}=(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal F}=(2\pi)^{-n}\mathcal F\circ\vee=(2\pi)^{-n}\vee\circ\mathcal F$

Preuve: comme $\langle\overline{\mathcal F}\mathcal FT,\varphi\rangle=\langle T,\mathcal F\overline{\mathcal F}\varphi\rangle$, et $\langle T,\overline{\mathcal F}\mathcal F\varphi\rangle=\langle\mathcal F\overline{\mathcal F}T,\varphi\rangle$,
il reste seulement à vérifier que, pour $\varphi\in\mathcal S$, $\hat{\hat\varphi}(x)=(2\pi)^n\varphi(-x)$. Or:
$\hat{\hat\varphi}(x)=\int e^{-ix\xi}\hat\varphi(\xi)d\xi=\langle1_\xi,e^{-ix\xi}\hat\varphi(\xi)\rangle=\langle1,\widehat{\tau_x\varphi}\rangle$
$=\langle\hat1,\tau_x\varphi\rangle=\langle(2\pi)^n\delta,\tau_x\varphi\rangle=(2\pi)^n\langle\delta_y,\varphi(y-x)\rangle=(2\pi)^n\varphi(-x)$. ■

<u>Remarques anodines</u>: Dans la littérature physico-mathématique, on trouve beaucoup de "transformations de Fourier" du type $\hat f(\xi)=\int e^{i\varphi(x,\xi)}f(x)dx$, où φ est une forme bilinéaire définie positive, par exemple $\varphi(x,\xi)=h\langle\xi,x\rangle$, où h est la constante de Planck... Bien entendu, elles ont toutes les <u>mêmes</u> propriétés, à des constantes près dans les formules !

Les physiciens font un grand usage de la transformation de Fourier. On trouve des recueils (énormes) de "tables de Fourier" donnant explicitement $\hat T$ en face de T, pour la plupart des fonctions et distributions "usuelles". C'est à la physique <u>quantique</u> surtout que $\mathcal F$ est indispensable, même dans les principes.

<u>Remarques plus "terre à terre" (donc plus importantes)</u>

1) Il faut ici dire un mot des <u>transformées de Fourier partielles</u>: si $0<p<n$, et $x=(y,z)$, avec $y\in\mathbb R^p$, $z\in\mathbb R^{n-p}$, on posera, pour $\varphi\in\mathcal S(\mathbb R^n)$
$\tilde\varphi(\eta,z)=\int_{\mathbb R^p}e^{-i\langle\eta,y\rangle}\varphi(y,z)dy$. On obtient un isomorphisme de $\mathcal S(\mathbb R^n)$ qui se transpose (et se prolonge !) en un isomorphisme faible de $\mathcal S'(\mathbb R^n)$:

les preuves sont les <u>mêmes</u> que ci-dessus, et les formules aussi, "mutatis mutandis" ! Par exemple $\hat{1} = (2\pi)^p \delta_{\mathbb{R}^p} \otimes 1_{\mathbb{R}^{n-p}} \ldots$

2) Le théorème donne donc la "<u>formule d'inversion de Fourier</u>"

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

qui est la "décomposition en ondes planes" (= en caractères) d'une fonction. Elle est à prendre "au sérieux" dès que $\hat{\varphi} \in \mathbb{L}^1$ et "au sens faible" pour $\varphi \in \mathcal{S}'$!

3) Par cette formule d'inversion, il est clair que Fourier <u>échange</u> convolution et multiplication : de $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, on déduit aussitôt que $\forall f, g \in \mathcal{S}$ $\boxed{\widehat{fg} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}}$. En effet, si $f = \hat{\varphi}$ et $g = \hat{\psi}$, on a

$$\widehat{fg} = \widehat{\hat{\varphi}\hat{\psi}} = \widehat{\widehat{\varphi * \psi}} = (2\pi)^n (\varphi * \psi)^\vee = (2\pi)^n \check{\varphi} * \check{\psi} = (2\pi)^n \cdot \left((2\pi)^{-n} \hat{\hat{\varphi}}\right) * \left((2\pi)^{-n} \hat{\hat{\psi}}\right)$$
$$= (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}.$$

4) Cette propriété ($\widehat{S * T} = \hat{S}\hat{T}$ et $\widehat{ST} = (2\pi)^{-n} \hat{S} * \hat{T}$) s'étend bien sûr (par densité, ou par transposition) à tous les cas où les deux termes de la formule ont un sens : par exemple, si $S \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$, on verra au §4 que $\hat{S}$ est une fonction tempérée, ce qui donne un sens à $\hat{S}\hat{T}$; eh bien $S * T$ est bien dans $\mathcal{S}'$ (exercice), et $\widehat{S * T} = \hat{S}\hat{T}$!...

5) On a des injections continues et denses $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$, d'où aussi $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{E}'$. Y-a-t-il un espace "<u>charnière</u>" entre fonctions et distributions, qui serait son propre dual ? Oui ! et c'est l'objet du paragraphe suivant.

---

§3 $\boxed{\text{FOURIER DANS } \mathbb{L}^2}$

$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire (<u>sesquilinéaire</u>) $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$; donc $\mathbb{L}^{2\prime} \simeq \mathbb{L}^2$ et on a des injections continues et denses (faiblement pour les deux dernières) :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

<u>Preuves</u> : $\mathcal{S} \subset \mathbb{L}^2$ car pour $\varphi \in \mathcal{S}$ $\|\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2} = \int |\varphi(x)|^2 dx \leq \left(\int \frac{dx}{(1+|x|^n)^2}\right)\left(\sup (1+|x|^n)|\varphi(x)|\right)^2$

De même $\mathbb{L}^2$ est contenu dans $\mathcal{S}'$ (comme d'ailleurs $\mathbb{L}^1$, ce qu'on a vu au paragraphe précédent, et même tous les $\mathbb{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty]$: preuves analogues), car pour $f \in \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$ (Cauchy-Schwarz), et $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\int |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int \frac{dx}{(1+|x|^n)^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sup (1+|x|^n)|\varphi(x)|\right)$$

d'où la continuité de toutes ces injections. Les densités sont toutes claires ou connues sauf celle de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{L}^2$; mais $\mathcal{D}$ est déjà dense dans $\mathbb{L}^2$ comme dans tous les $\mathbb{L}^p$... ∎

Comme $\mathbb{L}^2 \subset \mathcal{S}'$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f \in \mathbb{L}^2$ est déjà définie a priori (faiblement) ; mais en fait $\hat{f} \in \mathbb{L}^2$, et mieux :

Théorème: La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un <u>isomorphisme</u> de $\mathbb{L}^2$ (de même que $\overline{\mathcal{F}}$), d'inverse $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$. De plus $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}$ est une <u>isométrie</u> (de même que $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$). Enfin on a la "<u>formule de Plancherel</u>": $\forall f,g\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ $\quad (\hat{f},\hat{g})=(2\pi)^n\cdot(f,g)$

Remarque: $(f,g)=\langle f,\overline{g}\rangle=\langle\overline{f},g\rangle=\overline{(g,f)}$ (pour $f,g\in\mathcal{S}$ au moins)

<u>Preuve</u>: Pour $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$, on a:

$(\hat{\varphi},\hat{\psi})=\int\hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}}(\xi)d\xi=\langle 1,\hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}\rangle=\langle 1,\hat{\varphi}\,\hat{\check{\overline{\psi}}}\rangle=\langle 1,\widehat{\varphi*\check{\overline{\psi}}}\rangle$

$=\langle\hat{1},\varphi*\check{\overline{\psi}}\rangle=(2\pi)^n\langle\delta,\varphi*\check{\overline{\psi}}\rangle=(2\pi)^n\int\check{\overline{\psi}}(-x)\varphi(x)dx=(2\pi)^n(\varphi,\psi)$

Donc $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire $(\ ,\ )$ de deux fonctions de $\mathcal{S}$, et par suite la norme $\mathbb{L}^2$ d'une fonction de $\mathcal{S}$: $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2}=(\varphi,\varphi)^{1/2}$.

Si maintenant $f\in\mathbb{L}^2$, et si $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ convergente vers f dans $\mathbb{L}^2$, (φ_p) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$, donc aussi $(\hat{\varphi}_p)$, puisque $\|\hat{\varphi}_p-\hat{\varphi}_q\|=(2\pi)^{n/2}\|\varphi_p-\varphi_q\|$. Soit $g\in\mathbb{L}^2$ sa limite. Pour $\psi\in\mathcal{S}$, il vient: $\langle g,\psi\rangle=(g,\overline{\psi})=\lim\limits_{p\to\infty}(\hat{\varphi}_p,\overline{\psi})=\lim\langle\hat{\varphi}_p,\psi\rangle$

$=\lim\langle\varphi_p,\hat{\psi}\rangle=\lim(\varphi_p,\overline{\hat{\psi}})=(f,\overline{\hat{\psi}})=\langle f,\hat{\psi}\rangle=\langle\hat{f},\psi\rangle$.

C'est dire que la distribution tempérée $\hat{f}$ s'identifie à $g\in\mathbb{L}^2$, et de plus $\|\hat{f}\|_{\mathbb{L}^2}=\lim\|\hat{\varphi}_p\|_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{n/2}\lim\|\varphi_p\|_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{n/2}\|f\|_{\mathbb{L}^2}$. La formule d'inversion étant déjà connue dans $\mathcal{S}'$, se restreint à $\mathbb{L}^2$, et les deux premières assertions sont démontrées. Enfin $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ conservant la norme, elle conserve aussi le produit scalaire qui s'en déduit par "polarisation":

$2\,\mathrm{Re}\,(f,g)=\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2$ et $2\,\mathrm{Im}\,(f,g)=\|f+ig\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2$, d'où la formule de Plancherel. ∎

On va maintenant déterminer les <u>valeurs et fonctions propres</u> de l'opérateur unitaire $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}:\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$

Rappelons qu'un espace de Hilbert H est dit <u>séparable</u> s'il admet une <u>base hilbertienne</u> dénombrable $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (et toutes le sont alors), c'est-à-dire une suite "<u>orthonormée</u>": $\forall p,q.\ p\neq q\Rightarrow(e_p,e_q)=0$, et $\|e_p\|=1$ et "<u>totale</u>": $\forall f\ (\forall p\ (f,e_p)=0)\Rightarrow f=0$.

Un tel espace H est <u>isomorphe</u> à l'espace ℓ^2 des suites $c=(c_p)$ de nombres complexes "<u>de carré sommable</u>" ($\sum|c_p|^2<\infty$) muni du produit scalaire $(c,c')=\sum c_p\overline{c'_p}$. L'isomorphisme est $(c_p)\mapsto\sum c_pe_p=f\in H$. En particulier $c_p=(f,e_p)$, et $\|f\|^2=\sum|c_p|^2$.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et $x\in\mathbb{R}^n$, posons $\underline{h_\alpha(x)=e^{\frac{|x|^2}{2}}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})}$

Clairement h_α est le produit de $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ par un polynôme de degré $|\alpha|$, et donc $h_\alpha\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus pour $\varepsilon_j=(0\ldots0,\underset{(j)}{1},0\ldots0)$, $1\leq j\leq n$, et $\beta\in\mathbb{N}^n$

$(*)\ \partial^{\beta+\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})=\partial^\beta(-2x_je^{-|x|^2})=-2x_j\partial^\beta(e^{-|x|^2})-2\beta_j\partial^{\beta-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})$

par la formule de Leibniz (même si $\beta_j=0$).

Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, avec $\alpha_j>0$, calculons alors le produit scalaire

$$(k_\alpha,k_\beta)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})\,\partial^\beta(e^{-|x|^2})\,dx \qquad \text{(par parties)}$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}\partial^{\alpha-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,e^{|x|^2}\big(2x_j\partial^\beta(e^{-|x|^2})+\partial^{\beta+\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\big)\,dx$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}\partial^{\alpha-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,e^{|x|^2}(-2\beta_j)\,\partial^{\beta-\varepsilon_j}(e^{-|x|^2})\,dx \qquad \text{(par (*))}$$

$$=2\beta_j\,(k_{\alpha-\varepsilon_j},k_{\beta-\varepsilon_j}), \text{ même pour } \beta_j=0$$

Dès que $\alpha\neq\beta$, par exemple $\alpha_j>\beta_j$, en itérant le calcul précédent β_j fois, on voit que $(k_\alpha,k_\beta)=0$. Par contre:

$$(k_\alpha,k_\alpha)=2^{|\alpha_1|}\alpha_1!\,(k_{\alpha-\alpha_1\varepsilon_1},k_{\alpha-\alpha_1\varepsilon_1})=\dots=2^{|\alpha|}\alpha!\,(k_0,k_0)$$

Comme $(k_0,k_0)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\pi^{\frac{n}{2}}$ (ch. I, §7, exercice n°1),

finalement: $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ $\boxed{(k_\alpha,k_\beta)=\pi^{\frac{n}{2}}2^{|\alpha|}\alpha!\,\delta_{\alpha,\beta}}$ (avec $\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1 \text{ si } \alpha=\beta\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$)

On définit la "suite" des <u>fonctions d'Hermite</u> $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ par:

<u>$h_\alpha(x)=\lambda_\alpha k_\alpha(x)=\lambda_\alpha e^{\frac{|x|^2}{2}}\partial^\alpha(e^{-|x|^2})$ pour $x\in\mathbb{R}^n$, avec $\lambda_\alpha=(\pi^{n/2}2^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2}$</u>

Théorème: Les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (qui est donc séparable!)

Preuve: Le calcul précédent montre déjà que la famille $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ est orthonormée; il reste à voir qu'elle est totale. Soit $f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $(f,h_\alpha)=0$. Comme $h_\alpha(x)=P_\alpha(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, où P_α est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\lambda_\alpha(-2x)^\alpha$ (donc les P_α forment d'une base de l'espace des polynômes), f est orthogonale à toutes les fonctions de la forme $P(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, où P est un polynôme.

Posons $F(z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-z\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx$; pour tout $z\in\mathbb{C}^n$, l'intégrale est bien définie, et dérivable en z sous le signe somme, puisque $P(x)e^{-z\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout polynôme P (Cauchy-Schwarz)

Donc F est une série entière de polyrayon de convergence infini:

$F(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{F^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}z^\alpha$, avec $F^{(\alpha)}(0)=\int_{\mathbb{R}^n}(-1)^{|\alpha|}x^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx=0$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, d'où $F\equiv0$ et en particulier $F(i\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)\,dx=0$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$. C'est dire que la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)$, qui est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (Cauchy-Schwarz), est nulle. Comme $\mathcal{F}$ est injective dans $\mathcal{S}'$, donc dans $\mathbb{L}^1$, $e^{-\frac{|x|^2}{2}}f(x)$ est nulle presque partout, donc f aussi, et $f=0$ dans $\mathbb{L}^2$! ∎

Cette base est formée de fonctions propres de la transformation de Fourier; plus précisément:

<u>Proposition</u>: $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\boxed{\hat{h}_\alpha=(2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|}h_\alpha}$

Preuve: On montre par récurrence que: $\widehat{k_\alpha} = (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|}k_\alpha$ (*)

Comme $k_{\alpha+\varepsilon_j}(x) = \partial_j k_\alpha(x) - x_j k_\alpha(x)$, il vient, en supposant (*), (cf. §2):

$$\widehat{k_{\alpha+\varepsilon_j}}(x) = i x_j \widehat{k_\alpha}(x) - i\partial_j \widehat{k_\alpha}(x) = -i\left(\partial_j \widehat{k_\alpha}(x) - x_j \widehat{k_\alpha}(x)\right)$$
$$= (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha|+1}\left(\partial_j k_\alpha(x) - x_j k_\alpha(x)\right) = (2\pi)^{n/2}(-i)^{|\alpha+\varepsilon_j|}k_{\alpha+\varepsilon_j}(x).$$

Et pour $\alpha=0$ $\widehat{k_0}(x) = \widehat{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}(x) = (2\pi)^{n/2}e^{-\frac{|x|^2}{2}} = (2\pi)^{n/2}k_0(x)$. ■

Corollaire: L'application $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F} : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme isométrique, de valeurs propres les racines quatrièmes de l'unité $\pm i, \pm 1$, diagonalisé dans la base des fonctions d'Hermite.

§4 LE THÉORÊME DE PALEY-WIENER

On a vu que $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$, $\mathcal{F}\mathcal{S}' = \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^2$. Mais il y a peu d'autres espaces de fonctions ou distributions dont on sache bien caractériser l'image par la transformation de Fourier (en particulier les $\mathcal{F}\mathbb{L}^p$ pour $p \neq 2$; cf. le théorême de Riemann-Lebesgue, au §2, pour $p=1$). C'est pourtant le cas pour certains espaces de fonctions ou distributions à support compact. On donne ici le résultat pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}'$. On rappelle qu'une fonction entière est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}^n$. On note ici $\mathcal{E}'_R$ (resp. $\mathcal{D}_R$) pour $R>0$ l'espace des distributions (resp. fonctions C^∞) à support compact contenu dans $\overline{B}(0,R)$. On utilisera qu'un élément de $\mathcal{E}'_R$ se laisse majorer par une semi-norme de $\mathcal{E}$ "portée par $\overline{B}(0,R)$", c'est-à-dire de la forme $p(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{\overline{B}(0,R)} |\partial^\alpha \varphi|$. (cf. Remarque 1 du Ch. II §1, p. 17)

Théorême ("de Paley-Wiener"): $\forall R>0$

(a) $\mathcal{F}\mathcal{D}_R \subset \mathcal{S}$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui se prolongent en fonctions entières $U(\xi)$ telles que

(*) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |U(\xi)| \le \dfrac{C_N}{(1+|\xi|)^N} e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$

(b) $\mathcal{F}\mathcal{E}'_R \subset \mathcal{S}'$ est l'espace des fonctions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ qui se prolongent en fonctions entières $U(\xi)$ telles que

(**) $\exists N \in \mathbb{N}, C>0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |U(\xi)| \le C(1+|\xi|)^N e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$

Commentaires: - Dans (*) ou (**), on peut écrire $(1+|\xi|^N)$ au lieu de $(1+|\xi|)^N$, ou encore le remplacer par $(1+|\mathrm{Re}\,\xi|)^N$ ou $(1+|\mathrm{Re}\,\xi|^N)$ (exercices!)

- Le (b) justifie la remarque (4) du §2 (p. 35), compte tenu de la deuxième proposition du §1 (p. 30).
- Ce théorême admet beaucoup de variantes, pour d'autres espaces de fonctions (comme $\mathbb{L}^2_R$); ou d'autres "bases" (d'autres groupes G que $\mathbb{R}^n$, par exemple $\mathbb{Z}^n$)
- Il est utile dans de nombreuses démonstrations, par exemple le théorême de Malgrange: tout o.d.l. à coefficients constants admet une solution élémentaire tempérée. On en donnera deux exemples d'application ci-dessous.

Preuve : (1) Soit $T \in \mathcal{E}'_R$; pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, la distribution (de la variable x) $T * e^{i<\xi,x>}$ est une fonction C^∞ de la variable x, et aussi du paramètre ξ (cf. chap II, §3 et 4) : c'est la fonction $x \mapsto <T_y, e^{i<\xi,x-y>}>$, donc $(T * e^{i<\xi,x>})(0) = <T_y, e^{-i<\xi,y>}>$ est une fonction C^∞, soit $U(\xi)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}$,
$<U(\xi), \varphi(\xi)> = <<T_x, e^{-i<\xi,x>}>, \varphi(\xi)> = <T_x \otimes \varphi(\xi), e^{-i<\xi,x>}>$
$= <T_x, <\varphi(\xi), e^{-i<\xi,x>}>> = <T, \hat{\varphi}> = <\hat{T}, \varphi>$. Donc $\underline{\hat{T} = U}$

(2) Pour $\xi \in \mathbb{C}^n$, posons $U(\xi) = <T_x, e^{-i<\xi,x>}>$. On obtient une fonction différentiable de ξ ; donc holomorphe dans $\mathbb{C}^n$, dont la restriction à $\mathbb{R}^n$ est $U = \hat{T}$: c'est donc l'unique prolongement de $\hat{T}$ à $\mathbb{C}^n$ en fonction entière.

(3) Comme $T \in \mathcal{E}'_R$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que
$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\quad |<T, \varphi>| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\partial^\alpha \varphi|$.

En particulier : $|U(\xi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\partial^\alpha e^{-i<\xi,x>}| = C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{\bar{B}(0,R)} |\xi^\alpha| |e^{-i<\xi,x>}|$
$\leq C^{ste} (1 + |\xi|)^N e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$, soit $(**)$.

(4) Si de plus T est C^∞ (c'est-à-dire $T \in \mathcal{D}_R$), pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha T$ est une fonction continue à support dans $\bar{B}(0,R)$, d'où :
$|\xi^\alpha| |U(\xi)| = |\xi^\alpha <T_x, e^{-i<\xi,x>}>| = |<T_x, i^{|\alpha|} \partial_x (e^{-i<\xi,x>})>|$
$= |<(-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha T, e^{-i<\xi,x>}>| \leq C^{ste} \sup_{\bar{B}(0,R)} |e^{-i<\xi,x>}| \leq C^{ste} e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}$,
et en sommant ces inégalités sur tous les α pour $|\alpha| \leq N$, il vient $(*)$.

(5) Réciproquement, soit U une fonction entière vérifiant $(*)$. $U|_{\mathbb{R}}$ est C^∞ et à décroissance rapide puisque, par la formule de Cauchy, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$,
$U^{(\alpha)}(z) = \frac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \int_{\prod_{i=1}^n \{|\xi_i - z_i| = \varepsilon\}} \frac{U(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{\alpha+\varepsilon}}$, avec $\varepsilon = (1, \dots, 1)$, d'où $\sup |U^{(\alpha)}| \leq C_\alpha \sup |U|$;
donc $U|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}$, et si l'on pose $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\xi,x>} U(\xi)\,d\xi = \hat{U}^{-1}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il reste à montrer que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \bar{B}(0,R)$. Pour tout $t > 0$, le théorème des résidus permet d'écrire $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\xi+itx,x>} U(\xi + itx)\,d\xi$, d'où
$|\varphi(x)| \leq (2\pi)^{-n} e^{-t|x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} |U(\xi+itx)|\,d\xi \leq (2\pi)^{-n} e^{-t|x|^2} C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{Rt|x|}}{(1+|\xi|)^N}\,d\xi$ (d'après $(*)$)
$\leq C^{ste} e^{t|x|(R-|x|)}$, et si $|x| > R$, ceci tend vers 0 quand $t \to +\infty$, donc $\varphi(x) = 0$, ce qui clôt la preuve de (a).

(6) Soit ρ_p la suite régularisante du chap I, §1. D'après (4), $\hat{\rho}_p$ se prolonge en fonction entière telle que :
$(***)$ $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists C_N > 0\ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |\hat{\rho}_p(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N} e^{\frac{1}{p}|\mathrm{Im}\,\xi|}$, puisque $\mathrm{supp}\,\rho_p \subset \bar{B}(0, \frac{1}{p})$

(7) Soit enfin U une fonction entière vérifiant $(**)$. Sa restriction à $\mathbb{R}^n$ est une fonction C^∞ à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées d'après la formule de Cauchy (par la même majoration qu'au (5)), donc $U|_{\mathbb{R}^n}$ est une fonction tempérée, qui définit (§1, p. 31) une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$. $\rho_p * T$ est une suite de fonctions C^∞ qui tend vers T faible-

ment quand $p \to \infty$. Mais $\widehat{\rho_p * T} = \hat{\rho}_p \hat{T} = \hat{\rho}_p U|_{\mathbb{R}^n}$ est une fonction entière telle que, d'après (**) et (***) :

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists C' \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |\hat{\rho}_p(\xi) U(\xi)| \leq \frac{C'}{(1+|\xi|)^N} e^{(R+\frac{1}{p})|\mathrm{Im}\,\xi|}$$

(il suffit de prendre $C' = C\, C_{N+N_0}$, où C et N_0 sont donnés par (**)).
D'après (5), ceci signifie que $\rho_p * T \in \mathcal{D}_{R+\frac{1}{p}}$. Comme $\rho_p * T \to T$ faiblement, ceci implique $\mathrm{supp}\, T \subset \bar{B}(0,R)$, d'où le (b). ∎

<u>Corollaire 1</u> : <u>Toute distribution à support compact est une combinaison linéaire de dérivées (au sens des distributions) de fonctions continues ; donc aussi une dérivée d'une fonction continue.</u>

Preuve : Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{T}$ est une fonction tempérée par le théorème de P.W. En particulier $\exists N \in \mathbb{N}, C > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ |\hat{T}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N$. Posons $V(\xi) = \dfrac{\hat{T}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{N'}}$; Pour N' assez grand ($> N + \frac{n}{2}$), $V \in \mathbb{L}^1$, et c'est donc la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction continue f (théorème de Riemann-Lebesgue, §1).
De $(1+|\xi|^2)^{N'} V(\xi) = \hat{f}(\xi)$, on déduit par $\mathcal{F}^{-1}$: $T = (1-\Delta)^{N'} f$, où Δ est l'opérateur de Laplace, $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$, d'où la première assertion.
La deuxième s'en déduit en remarquant que les primitives (partielles) d'une fonction continue sont continues ; T est donc la dérivée d'ordre $(2N', 2N', \dots, 2N')$ d'une fonction continue. ∎

<u>Corollaire 2</u> : <u>Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut s'écrire $T = T_+ + T_-$, avec $T_\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\, T_+ \subset [0, +\infty[$ et $\mathrm{supp}\, T_- \subset]-\infty, 0]$.</u>

Preuve : Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\alpha \equiv 1$ au voisinage de l'origine. Visiblement, $1 - \alpha = \alpha_+ + \alpha_-$, avec $\alpha_\pm \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\, \alpha_+ \subset]0, +\infty[$, $\mathrm{supp}\, \alpha_- \subset]-\infty, 0[$.
Comme $\alpha T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe un o.d.l. à coefficients constants $P(\partial)$, par le corollaire 1, et une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, tels que $\alpha T = P(\partial) f$. Comme $\chi_{[0,+\infty[} f$ et $\chi_{]-\infty,0[} f$ sont dans $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ et de somme f, on peut écrire

$$T = \alpha T + \alpha_+ T + \alpha_- T = \underbrace{\left\{P(\partial)(\chi_{[0,+\infty[} f) + \alpha_+ T\right\}}_{T_+} + \underbrace{\left\{P(\partial)\chi_{]-\infty,0[} f + \alpha_- T\right\}}_{T_-}. \ \blacksquare$$

<u>Remarques</u> : 1) Une telle décomposition n'est certes pas unique : on peut "déplacer" de T_+ à T_- une distribution portée par $\{0\}$, donc de la forme $\sum_{\alpha \leq m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}$.

2) Les généralisations du corollaire 2 sont évidentes, à tout découpage de $\mathrm{supp}\, T$ en intervalles fermés, deux à deux d'intersection d'intérieur vide.

3) Le corollaire 2 se généralise aussi clairement à plusieurs variables, en découpant $\mathrm{supp}\, T$ en morceaux limités par des hypersurfaces lisses par morceaux....

4) Le corollaire 1 signifie (utiliser une partition de l'unité pour localiser), qu'à force de dériver les fonctions continues (au sens des distributions !), on obtient <u>toutes</u> les distributions !

§5 DISTRIBUTIONS SUR LE TORE

Le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ est un groupe-quotient de $\mathbb{R}^n$, compact puisque c'est l'image de $[0,2\pi]^n$ par la projection canonique $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n$ (il est bien sûr muni de la topologie-quotient). Il est d'usage de noter $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ la "variable" déduite de la variable canonique x de $\mathbb{R}^n$ (modulo 2π). Si $\theta_0\in\mathbb{T}^n$ $V_{\theta_0}=\{\theta\in\mathbb{T}^n \mid \forall j=1,\dots,n,\ \theta_j-\theta_{0,j}\notin\pi\mathbb{Z}\}$, et $\pi(\tilde\theta_0)=\theta_0$, π est un difféomorphisme de $U_{\tilde\theta_0}=\prod_{j=1}^{n}]\tilde\theta_0-\pi,\tilde\theta_0+\pi[$ sur V_{θ_0} ; un choix de $(n+1)$ V_{θ_0} convenables donne un atlas de cartes de la variété $\mathbb{T}^n$, qui permet de définir toutes les notions locales (fonctions continues, C^k, C^∞, distributions, ...) sur $\mathbb{T}^n$. Elles coïncident avec les mêmes notions sur $\mathbb{R}^n$ via π : par exemple $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)\Leftrightarrow f\circ\pi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$...

On notera encore, pour $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\partial_j f = \frac{\partial}{\partial\theta_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ\pi)$ (cette dernière, périodique, définit $\partial_j f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$; et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\circ\dots\circ\partial_n^{\alpha_n}$ pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\alpha\in\mathbb{N}^n$.

Un o.d.l. linéaire sur le tore est de la forme $P(\theta,\partial)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(\theta)\partial^\alpha$, où les a_α sont $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Enfin $\mathbb{T}^n$ est muni de sa "mesure de Haar" canonique $d\theta$:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)d\theta = (2\pi)^{-n}\int_{a_1}^{a_1+2\pi}\int_{a_2}^{a_2+2\pi}\cdots\int_{a_n}^{a_n+2\pi}(f\circ\pi)(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

pour laquelle la fonction 1 est "de masse" 1 : $\int_{\mathbb{T}^n} d\theta = 1$

On définit alors les espaces $\mathbb{L}^p(\mathbb{T}^n)$ ... et ce sont toujours des espaces de Banach, $\mathbb{L}^2$ étant même de Hilbert.

Comme $\mathbb{T}^n$ est compact, $\mathcal{D}(\mathbb{T}^n)=\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)=\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$: c'est l'espace des fonctions C^∞ sur le tore, muni de la topologie (métrisable complète) engendrée par les semi-normes $p_\alpha(f)=\sup_{\mathbb{T}^n}|\partial^\alpha f|$ $(\alpha\in\mathbb{N}^n)$, ou encore $p_m(f)=\sum_{|\alpha|\le m}\sup|\partial^\alpha f|$ $(m\in\mathbb{N})$

Soit $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)=\mathcal{E}'(\mathbb{T}^n)=\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ son dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\xrightarrow{T}\mathbb{C}$ majorées par Cp_m, pour $C>0$, et appelées <u>distributions</u> sur le tore. On montre, comme sur $\mathbb{R}^n$ (chap. I) que tout o.d.l. différentiel linéaire est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, d'où en posant, pour $T\in\mathcal{S}'$, $\varphi\in\mathcal{S}$ $\langle PT,\varphi\rangle=\langle T,{}^tP\varphi\rangle$, avec ${}^tP=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\,\cdot)$, si $P=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(\theta)\partial^\alpha$, ce qui donne à $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ sa structure de $\mathcal{P}$-module (ch I, §4), et c'est encore un faisceau (ch. I, §5). De plus on a des injections continues et denses :

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)}\hookrightarrow \underset{\text{(compacité)}}{\mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)} = \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n),$$

la dernière étant l'application $f\mapsto T_f$, avec $\langle T_f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)\varphi(\theta)d\theta$ $(\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n))$.

Pour $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, on pose $f*g(\theta)=\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta-\theta')g(\theta')d\theta'=\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta')g(\theta-\theta')d\theta'$ et clairement $P(\partial)(f*g)=(P(\partial)f)*g=f*(P(\partial)g)$

Si $S,T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ on définit $S\otimes T$ comme la seule distribution sur $\mathbb{T}^{2n}$ telle que $\forall\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\langle S\otimes T,\varphi\otimes\psi\rangle=\langle S,\varphi\rangle\langle T,\psi\rangle$ et on montre que $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n})$, $\langle S\otimes T,\varphi\rangle=\langle S_\theta,\langle T_{\theta'},\varphi(\theta+\theta')\rangle\rangle=\langle T_{\theta'},\langle S_\theta,\varphi(\theta+\theta')\rangle\rangle$ (cf. ch. II, § 3 et 4) ; enfin $S*T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ est définie par :

$\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S_\theta\otimes T_{\theta'},\varphi(\theta+\theta')\rangle$

Ce produit de convolution est <u>toujours</u> défini, commutatif, bilinéaire, et associatif, continu de $\mathcal{S}'\times\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ (faiblement), généralise celui des fonctions qui est continu de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, admet la mesure de Dirac à l'origine $\delta=\delta_0$ comme élément neutre, et si $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\varphi * T$ est la fonction $C^\infty(\mathbb{T}^n)$: $\theta\mapsto\langle T_{\theta'}, f(\theta-\theta')\rangle$. En particulier l'image par π de la suite régularisante $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est toujours une suite régularisante qui tend vers δ faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, si bien que : $\forall T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, $\rho_p * T\xrightarrow[p\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\rho_p * T\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ est clairement une algèbre commutative unitaire pour la convolution. (Ouf !)

Toutes les preuves, analogues à celles sur $\mathbb{R}^n$ (chap. I et II), mais beaucoup plus faciles à cause de la compacité de $\mathbb{T}^n$, sont ici laissées en exercices.

Remarque : Il est utile de voir comment s'adaptent à un autre groupe topologique localement compact, $\mathbb{Z}^n$, les notions de distribution, convolution, ..., définies dans ce cours dans le cas de $\mathbb{R}^n$, puis brièvement de $\mathbb{T}^n$: comme $\mathbb{Z}^n$ est discret, on perd la notion de différentiabilité, et les compacts sont les parties finies ; enfin la "mesure de Haar" de $\mathbb{Z}^n$ est la somme des mesures de Dirac en chaque point. D'où :

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{E}(\mathbb{Z}^n)=\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\mid c_\alpha\in\mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}^n)=\mathcal{E}'(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\mid c_\alpha=0 \text{ sauf pour un nombre fini de } \alpha\}$$

$$\mathbb{L}^p(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|c_\alpha|^p<\infty\}\ (1\le p<\infty),\ \text{et } \mathbb{L}^\infty(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|c_\alpha|<\infty\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \forall N\in\mathbb{N},\ \sup(1+|\alpha|^N)|c_\alpha|<\infty\}\ (\text{suites "à décroissance rapide"})$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)=\{(c_\alpha)\mid \exists N\in\mathbb{N}, C>0\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n\ |c_\alpha|\le C(1+|\alpha|^N)\}\ (\text{..."à croissance lente"})$$

Bien entendu, les différentes dualités entre ces espaces s'obtiennent toutes à l'aide du produit scalaire $\langle(c_\alpha),(c'_\alpha)\rangle=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha c'_\alpha$, et les injections suivantes sont toutes continues et denses par les topologies évidentes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^1(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^2(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathbb{L}^\infty(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{Z}^n)$$

Enfin le produit de convolution (non toujours défini) s'obtient par

$$(c_\alpha)*(c'_\alpha)=\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha-\beta}c'_\beta\Big)=\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_\beta c'_{\alpha-\beta}\Big),\ \text{tandis que } (c_\alpha)\cdot(c'_\alpha)=(c_\alpha c'_\alpha).$$

Dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ ces deux produits sont commutatifs, associatifs, et continus.

§6 LES SÉRIES DE FOURIER

Proposition : Les exponentielles imaginaires $\theta\overset{e_\alpha}{\mapsto}e^{i\alpha\cdot\theta}$, pour $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$

Preuve : $(e_\alpha, e_\beta)=\int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\alpha-\beta)\cdot\theta}d\theta=\delta_{\alpha,\beta}$, et la famille est orthonormée. Comme les e_α sont denses dans $C^0(\mathbb{T}^n)$ par le théorème de Stone-Weierstrass pour la norme uniforme, donc a fortiori dans $\mathbb{L}^2$, la famille est totale. ■

Pour $f\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$ et $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, on pose $\hat f(\alpha)=(f,e_\alpha)=\langle f,\bar e_\alpha\rangle=\langle f,e_{-\alpha}\rangle$.

Proposition : L'application $f\mapsto\hat f$ est un isomorphisme isométrique de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{Z}^n)=\ell^2$: la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat f(\alpha)e_\alpha$ est convergente dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$, vers f et $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|\hat f(\alpha)|^2=\|f\|^2_{\mathbb{L}^2}$. Enfin, pour $f,g\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$, on a :

$$(f,g)_{\mathbb{L}^2}=\int_{\mathbb{T}^n} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat f(\alpha)\overline{\hat g(\alpha)}=(\hat f,\hat g)_{\ell^2}\quad(\text{formule "de Plancherel"})$$

Preuve : les deux premières assertions se déduisent de la proposition précédente, et la formule de Plancherel s'ensuit par "polarisation". ■

Bien entendu on munit $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$ de sa topologie d'espace métrisable complet (les semi-normes sont les sup des dérivées, puisque $\mathbb{T}^n$ est compact), et $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ de celle engendrée par les semi-normes qui le définissent : $p_N((c_\alpha)) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(1+|\alpha|^N)|c_\alpha|$.

Proposition : $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha\theta}$ est convergente vers $f(\theta)$ absolument uniformément et même normalement, et se dérive terme à terme ; on l'appelle le "développement de f en série de Fourier."

Preuve : Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, $1\le j\le n$, $\alpha_j\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n}\alpha_j f(\theta)e^{-i\alpha.\theta}d\theta = \int_{\mathbb{T}^n} i\partial_j f(\theta)e^{-i\alpha.\theta}d\theta$, d'où en itérant, pour $\beta\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha^\beta||\hat{f}(\alpha)| \le \sup|\partial^\beta f|$, et finalement $(1+|\alpha|^N)|\hat{f}(\alpha)| \le c^{ste}\sum_{|\beta|\le N}\sup|\partial^\beta f|$, d'où la continuité. Inversement, si (c_α) est une suite à décroissance rapide, la série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{T}^n$, donc vers une fonction continue $f(\theta)$, et c'est encore vrai de toutes les séries dérivées (terme à terme), donc $f\in C^\infty$, et

$$\sum_{|\beta|\le N}\sup|\partial^\beta f| \le \sum_{\substack{|\beta|\le N\\ \alpha\in\mathbb{Z}^n}}|\alpha^\beta c_\alpha| \le c^{ste}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{(1+|\alpha|)^{n+1}}\Big).\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}(1+|\alpha|)^{n+N}|c_\alpha|. \ ■$$

Remarques : Le "produit de convolution" naturel sur $\mathbb{Z}^n$ est le "produit de Cauchy" : $(c_\alpha)(c'_\alpha) = \Big(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha-\beta}c'_\beta\Big)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$; il est bilinéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\times\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, et pour $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, on vérifie aisément que

$$\forall\alpha\in\mathbb{Z}^n \ \boxed{\widehat{f*g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)\hat{g}(\alpha) \quad \text{et} \quad \widehat{fg}(\alpha) = (\hat{f}(\cdot) * \hat{g}(\cdot))_\alpha}$$

Enfin, on a déjà utilisé que, pour $\beta\in\mathbb{N}^n$, $\boxed{\widehat{\partial^\beta f}(\alpha) = (i\alpha)^\beta\hat{f}(\alpha)}$

On définit alors les "coefficients de Fourier" d'une distribution :

Théorème : L'application $T\mapsto(\hat{T}(\alpha))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ définie par $\hat{T}(\alpha) = \langle T_\theta, e^{-i\alpha.\theta}\rangle$ est un isomorphisme faible de $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, qui prolonge ceux de $\mathcal{S}$ et de $\mathbb{L}^2$, et d'inverse : $(c_\alpha)\mapsto\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$, la série convergeant faiblement. L'identité $T_\theta = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\hat{T}(\alpha)e^{i\alpha\theta}$ est le "développement de T en série de Fourier."

Preuve : Si $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$, tels que pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$ $|\langle T,\varphi\rangle| \le C\sum_{|\beta|\le m}\sup|\partial^\beta\varphi|$; en particulier $|\hat{T}(\alpha)| \le C\sum_{|\beta|\le m}\sup|(-i\alpha)^\beta e^{-i\alpha\theta}| \le c^{te}(1+|\alpha|)^m$, donc $\hat{T}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$; si réciproquement (c_α) est à croissance lente, et qu'on pose, pour $N\in\mathbb{N}$ $T_N = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha e^{i\alpha.\theta}$, $T_N\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, et pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$,

$\langle T_N,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le N}\int_{\mathbb{T}^n} c_\alpha e^{i\alpha\theta}\varphi(\theta)d\theta = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha\hat{\varphi}(-\alpha)$; comme $(c_\alpha)\in\mathcal{S}'$ et $(\hat{\varphi}(-\alpha))\in\mathcal{S}$, la série $\sum c_\alpha\hat{\varphi}(-\alpha) = \langle T,\varphi\rangle$ définit une forme linéaire T, limite faible de

T_N, et $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)$, puisque $\left|\sum_\alpha c_\alpha \hat\varphi(-\alpha)\right| \le C\sum_\alpha (1+|\alpha|^N)|\hat\varphi(-\alpha)|$ pour certains $C>0$, $N\in\mathbb{N}$, et donc $\le C\left(\sum_\alpha \frac{1+|\alpha|^N}{(1+|\alpha|)^{N+n+1}}\right)\sup\{(1+|\alpha|)^{N+n+1}|\hat\varphi(-\alpha)|\}$

$$\le C^{ste} \sup \sum_{|\beta|\le N+n+1} \sup|\partial^\beta\varphi|$$

Enfin $\hat T(\alpha) = \langle T, e^{-i\alpha\cdot\theta}\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle \sum_{|\beta|\le N} c_\beta e^{i\beta\cdot\theta}, e^{-i\alpha\cdot\theta}\rangle = c_\alpha$

La continuité faible, dans les deux sens, se déduit aussitôt du calcul suivant. ∎

Formule "de Plancherel" : $\forall T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n), \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$, $\boxed{\langle \hat T,\hat\varphi\rangle = \langle T,\check\varphi\rangle}$

Preuve: $\langle T,\check\varphi\rangle = \langle \sum_\alpha \hat T(\alpha)e^{i\alpha\cdot\theta}, \check\varphi(\theta)\rangle = \sum_\alpha \hat T(\alpha)\langle e^{i\alpha\cdot\theta},\varphi(-\theta)\rangle$

$= \sum_\alpha \hat T(\alpha)\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\alpha\cdot\theta}\left(\sum_\beta\hat\varphi(\beta)e^{-i\beta\cdot\theta}\right)d\theta = \sum_\alpha\hat T(\alpha)\sum_\beta\hat\varphi(\beta)\int_{\mathbb{T}^n}e^{i(\alpha-\beta)\cdot\theta}d\theta = \sum_\alpha \hat T(\alpha)\hat\varphi(\alpha)$

$=\langle\hat T,\hat\varphi\rangle$. ∎

Remarques et exemples: 1) Bien entendu une série de Fourier faiblement convergente se dérive aussi terme à terme, d'où: $\forall T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n), \beta\in\mathbb{N}^n$ $\boxed{\widehat{\partial^\beta T}(\alpha) = (i\alpha)^\beta\hat T(\alpha)}$

2) Le produit de convolution est toujours bien défini sur $\mathbb{T}^n$ (compacité) et on a $\forall S,T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n), \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n$ $\boxed{\widehat{S*T}(\alpha) = \hat S(\alpha)\hat T(\alpha)}$

Preuve: $\widehat{S*T}(\alpha) = \langle S*T, e^{-i\alpha\cdot\theta}\rangle = \langle S_\theta,\langle T_{\theta'}, e^{-i\alpha(\theta+\theta')}\rangle\rangle$

$=\langle S_\theta, \langle T_{\theta'}, e^{-i\alpha\cdot\theta'}\rangle e^{-i\alpha\cdot\theta}\rangle = \hat S(\alpha)\hat T(\alpha)$. ∎

3) $\boxed{\hat\delta(\alpha)=1\ ;\ \widehat{\delta^{(\beta)}}(\alpha) = (i\alpha)^\beta\ ;\ \hat\delta_{\theta_0}(\alpha) = e^{-i\alpha\cdot\theta_0}}$ (pour $\alpha\in\mathbb{Z}^n$; $\beta\in\mathbb{N}^n$; $\theta_0\in\mathbb{T}^n$)

$\boxed{\hat 1(\alpha) = \begin{cases}1 & \text{si } \alpha=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\ ;\ \widehat{e^{i\alpha_0\theta}}(\alpha) = \begin{cases}1 & \text{si } \alpha=\alpha_0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$ $(\forall ..)$

4) Que devient le "théorème de Riemann-Lebesgue sur $\mathbb{T}^n$ et sur $\mathbb{Z}^n$?

— Si $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)$, $\hat f(\alpha)\xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{}0$ (exercice d'intégration !)

— Si $\sum_\alpha|c_\alpha|<\infty$, $\sum c_\alpha e^{i\alpha\cdot\theta} = f(\theta)\in C^0(\mathbb{T}^n)$ (convergence uniforme).

5) Écriture "trigonométrique": Si $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{T})$, et $T_\theta = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}c_\alpha e^{i\alpha\cdot\theta}$, on peut récrire: $T = c_0 + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}\underbrace{(c_\alpha+c_{-\alpha})}_{a_\alpha}\cos\alpha\cdot\theta + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^*}i\underbrace{(c_\alpha - c_{-\alpha})}_{b_\alpha}\sin\alpha\cdot\theta$,

où les familles (b_α) et (a_α) sont à croissance lente, et les séries faiblement convergentes (ou mieux, si $T\in\mathbb{L}^2$ ou $T\in\mathcal{S}\ldots$), et la réciproque est aussi claire.

On observera que $c_0 = \langle T_\theta, 1\rangle$, $a_\alpha = \langle T_\theta, 2\cos\alpha\cdot\theta\rangle$ et $b_\alpha = \langle T_\theta, 2\sin\alpha\cdot\theta\rangle$ pour $\alpha\ne 0$; en particulier si $T=T_f$, avec $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T}^n)$, on a $c_0 = \int_{\mathbb{T}} f(\theta)d\theta$, $a_\alpha = 2\int_{\mathbb{T}} f(\theta)\cos\alpha\cdot\theta\,d\theta$, $b_\alpha = 2\int_{\mathbb{T}}f(\theta)\sin\alpha\cdot\theta\,d\theta$, et $|a_\alpha|,|b_\alpha|\xrightarrow[|\alpha|\to\infty]{}0$ (encore "Riemann-Lebesgue"!). Mais la convergence ponctuelle des séries de Fourier est un vieux sujet classique et délicat: même si f est continue, elle n'est pas en général la somme de sa série de Fourier! Bien sûr, les distributions servent ici à voiler, plutôt qu'à résoudre, des problèmes d'analyse fine.

(L'hypothèse $n=1$ faite ici n'est pas essentielle)

On ne citera ici (sans preuve) que le résultat le plus classique (on trouvera un autre énoncé en exercice), en dimension 1 :

<u>Théorème ("de Jordan")</u> : Si f est <u>à variation bornée</u> sur le tore (c'est-à-dire localement somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante !) et par suite $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{T})$, sa série de Fourier $\sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\theta}$ est convergente en tout point vers la demi-somme de ses limites à gauche et à droite.

6) L'écriture "trigonométrique" des séries de Fourier rend plus claires certaines discussions ; par exemple :

T paire $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, b_\alpha = 0$; T impaire $\Leftrightarrow c_0 = 0$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, a_\alpha = 0$

T réelle $(T = \overline{T}) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, a_\alpha$ et $b_\alpha \in \mathbb{R}$; et $c_0 \in \mathbb{R}$ ....

§7 LIEN AVEC LES DISTRIBUTIONS PÉRIODIQUES

On appelle ici <u>périodique</u> une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui a un système complet de périodes (contenant une base de $\mathbb{R}^n$) ; par une transformation affine, on peut alors se ramener au cas où son groupe de périodes contient $2\pi\mathbb{Z}^n$, ce qu'on suppose dans la suite.

<u>Proposition</u> : <u>Toute distribution périodique est tempérée</u>

Preuve : Notons $P(x,a)$ le pavé $\prod_{j=1}^{n}]x_j - \frac{a}{2}, x_j + \frac{a}{2}[$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $a > 0$.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ périodique, et $C > 0, m \in \mathbb{N}$ tels que, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp}\psi \subset P(0,4\pi)$, on ait $|\langle T, \psi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \psi|$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{P}(0, 2\pi N)$.
Quand x_0 parcourt l'ensemble fini $E = (2\pi\mathbb{Z}^n) \cap \overline{P}(0, 2\pi(N+2))$, les pavés $P(x_0, 4\pi)$ forment un recouvrement ouvert de $\operatorname{supp}\varphi$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\operatorname{supp}\chi \subset P(0,4\pi)$ et $\sum_{x_0 \in 2\pi\mathbb{Z}^n} \tau_{x_0}\chi \equiv 1$ (il suffit de choisir $\tilde{\chi}$ valant 1 sur $\overline{P}(0,2\pi)$, puis de poser $\chi = \tilde{\chi}\left(\sum \tau_{x_0}\tilde{\chi}\right)^{-1}$) La fonction $\sum_{x_0 \in E} \tau_{x_0}\chi$ vaut alors 1 au voisinage de $\operatorname{supp}\varphi$, et par suite

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle T, (\tau_{x_0}\chi)\varphi\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle \tau_{-x_0}T, \chi(\tau_{-x_0}\varphi)\rangle = \sum_{x_0 \in E} \langle T, \chi(\tau_{-x_0}\varphi)\rangle,$$

et comme $\operatorname{supp}\chi(\tau_{-x_0}\varphi) \subset P(0,4\pi)$, il vient :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \sum_{x_0 \in E} C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha(\chi \cdot \tau_{-x_0}\varphi)| \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{x_0 \in E} \sup_{\overline{P}(x_0, 4\pi)} |\partial^\alpha \varphi|$$

Si $|x_0| > 4\pi n$, on a $\inf_{x \in \overline{P}(x_0, 4\pi)} |x| \geq (|x_0| - 2\pi\sqrt{n}) \geq \frac{|x_0|}{2}$, d'où

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \left[\left(\sum_{\substack{x_0 \in E \\ |x_0| \leq 4\pi n}} \sup |\partial^\alpha \varphi| + \left\{ \sum_{\substack{x_0 \in E \\ |x_0| > 4\pi n}} \left(\frac{|x_0|}{2}\right)^{-n-1} \right\} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(|x|^{n+1} |\partial^\alpha \varphi(x)|\right) \right) \right],$$

majoration qui montre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Théorème : La transformation de Fourier est bijective de l'espace des distributions périodiques sur l'espace des combinaisons linéaires (∞) de mesures de Dirac aux points entiers, $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha \delta_\alpha$, dont la famille (c_α) des coefficients est à croissance lente.

Preuve : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ périodique : pour $1\le j\le n$ on a $\tau_{2\pi\varepsilon_j} T = T$, pour $\varepsilon_j = (0 \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$, donc $\hat{T}_\xi = e^{-2i\pi\xi_j}\hat{T}_\xi$; de $(e^{-2i\pi\xi_j} - 1)\hat{T} = 0$, on déduit $\operatorname{supp}\hat{T} \subset \mathbb{Z}^n$.

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $U \cap \mathbb{Z}^n = \{\alpha\}$, et $\varphi \in \mathcal{D}(U)$; pour $1 \le j \le n$, $\langle(\xi_j - \alpha_j)\hat{T}, \varphi\rangle = \langle(e^{-2i\pi\xi_j} - 1)\hat{T}, \frac{(\xi_j-\alpha_j)\varphi}{e^{-2i\pi\xi_j}-1}\rangle = 0$, donc $(\xi_j - \alpha_j)\hat{T}|_U = 0$, et on conclut que $\hat{T}|_U$ est proportionnelle à δ_α par le lemme p. 34.

Inversement, pour toute famille de nombres complexes $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$, la série $\sum c_\alpha \delta_\alpha$ est faiblement convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, mais sa somme T n'est tempérée que si les (c_α) sont à croissance lente : sinon une sous-suite $(c_{\alpha_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini assez vite pour qu'on puisse construire une fonction de $\mathcal{S}$ valant $(c_{\alpha_j})^{-1}$ aux points α_j. Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont faiblement continues, $\mathcal{F}^{-1}T = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (2\pi)^{-n} c_\alpha e^{i\alpha x}$ est encore une série faiblement convergente, donc vers une distribution périodique. ■

Notons $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions périodiques, muni de la topologie induite ; clairement $\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tau} \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)$

Proposition : L'application $\sigma : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$, définie par $\sigma(\varphi) = \sum_{\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}^n} \tau_\alpha\varphi$ est linéaire continue et surjective. La transposée ${}^t(\tau\circ\sigma) : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une injection faiblement continue, d'image le sous-espace $\mathcal{D}'_p(\mathbb{R}^n)$ des distributions périodiques

Preuve : Chaque point de $\mathbb{R}^n$ ne rencontre les supports que d'un nombre fini de $\tau_\alpha\varphi$, et toujours le même, d'où $\sup|\partial^\alpha\sigma(\varphi)| \le C^{te}\sup|\partial^\alpha\varphi|$.
Pour la surjectivité, on peut utiliser la même fonction χ que dans la preuve de la première proposition du paragraphe (p. 45) : si $\psi \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$, $\psi = \left(\sum_{\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}^n}(\tau_\alpha\chi)\right)\psi = \sum_{\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}^n} \tau_\alpha(\chi\psi) = \sigma(\chi\psi)$. Le reste est à peu près clair ! ■

Remarque : A l'aide des identifications précédentes, on peut confondre les notions de développement en série de Fourier des fonctions et distributions sur le tore, avec les mêmes développements des fonctions et distributions périodiques sur $\mathbb{R}^n$, issus du théorème ci-dessus.

§8 THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1) Utiliser la transformation de Fourier pour démontrer :
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \{\exists \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \psi' = \varphi\} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$

2) Donner des énoncés précis confirmant l'adage : « la transformation de Fourier échange les propriétés de régularité et de décroissance à l'infini ».

3) Calculer la transformée de Fourier de $x \xmapsto{f} e^{-|x|} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, puis celles de $\frac{1}{1+x^2}$, et $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$; en déduire $(e^{-|x|})^{*n}$
Montrer que $f - f'' = 2\delta$, et trouver $F_n \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ solution élémentaire de $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^n$

4) Calculer, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ les transformées de Fourier de $\chi_{[a,b]}$ et de sa dérivée, puis celles de $\operatorname{Sin} x$ et $\operatorname{Cos} x$. Comment calculer celles de $\operatorname{Sin}^p x$ et $\operatorname{Cos}^p x$ $(p \in \mathbb{N})$

5) Montrer, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: $\hat{\check{T}} = \check{\hat{T}} = \check{\hat{T}} = \hat{\check{T}}$
a) En déduire les parties paire et impaire, réelle et imaginaire de $\hat{T}$ en fonctions de celles de T.
b) Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une matrice inversible. Calculer $\widehat{\varphi \circ A}$ en fonction de $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Même question pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

6) Montrer, pour $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, que $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et $\widehat{S*T} = \hat{S}\hat{T}$
En déduire que si $T \in \mathcal{E}'$ et $P(\partial)$ est un o.d.l. non nul à coefficients constants, $P(\partial)T = 0 \Rightarrow T = 0$.

7) On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est <u>homogène</u> de degré $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\lambda > 0$ $T_{\lambda x} = \lambda^a T_x$ (Cf. ch. II, §2 pour $T_{\lambda x}$)
a) Montrer que si T est homogène de degré a, elle est solution de "l'équation d'Euler" $xT' - aT = 0$. En déduire que $T|_{\mathbb{R}^*}$ est C^∞, puis que T est tempérée.
b) Montrer que si T est homogène de degré a, $\hat{T}$ l'est de degré $-a-1$. Et T' ?
c) Vérifier que H, δ, $\delta^{(a)}$ et $Pf\frac{1}{x^n}$ sont homogènes ; de quel degré ?
d) Et sur $\mathbb{R}^n$?

8) a) Utilisant les résultats du (5) et du (7), calculer les transformées de Fourier de $vp\frac{1}{x}$ (remarquer que $x \cdot vp\frac{1}{x} = 1$), puis de H ; de même celles de xH et de $Pf\frac{1}{x^2}$
b) Si $T_\varepsilon = H(x)e^{-\varepsilon x}$ $(\varepsilon > 0)$, montrer que $T_\varepsilon \to H$ faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
Calculer $\widehat{T_\varepsilon}$, puis $\widehat{T_\varepsilon^{*n}}$. En déduire $\widehat{H^{*n}}$ et $\widehat{Pf\frac{1}{x^n}}$
c) Soit R une fraction rationnelle d'une variable. On rappelle que $Pf R = \frac{1}{2}(R(x+i0) + R(x-i0))$. Expliquer comment calculer la transformée de Fourier des distributions associées à R.

9) Calculer $\widehat{\operatorname{Sin}|x|}$ et $\widehat{\frac{\operatorname{Sin} x}{x}}$. (Penser à une équation différentielle, ou à $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Sin}|x| e^{-\varepsilon|x|}$, par exemple)

10) Calculer $(\sqrt{|x|})'$, $x \cdot (\sqrt{|x|})'$, puis $\widehat{\sqrt{|x|}}$.

10) On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}$, et $g(x) = -x^3 f(x)$

a) Montrer que f est intégrable et continue, que $g \in \mathcal{S}'$ et calculer $\hat{g}$.

b) Quelle équation différentielle vérifie $\hat{f}$? En trouver une solution F, particulière, à support dans $[-1,1]$.

c) Montrer que $\hat{f} = F$ (directement, ou parce que f est continue)

11) a) Montrer que les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solutions de $T' + 2\lambda x T = 0$ (pour $\lambda \in \mathbb{C}$) sont toutes tempérées si et seulement si $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

b) Quelle équation différentielle vérifie alors $\hat{T}$?

c) Calculer $\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2})$ pour $\operatorname{Re}\lambda > 0$ d) Calculer $\mathcal{F}(e^{ix^2})$

e) Calculer $\mathcal{F}\left(e^{-(x^2+y^2)+2iy}\right)$ (qui est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$).

12) a) Démontrer l'inégalité "de Hölder" : $\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$
$f * g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et : $(*)$ $\|f*g\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} \|g\|_{\mathbb{L}^2}$ (d'abord $f \in \mathcal{S}$ ...)

b) Démontrer que cette inégalité n'est pas en général optimale pour f fixée : $\exists f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\sup\limits_{\substack{g \in \mathbb{L}^2 \\ \neq 0}} \frac{\|f*g\|_{\mathbb{L}^2}}{\|g\|_{\mathbb{L}^2}} < \|f\|_{\mathbb{L}^1}$
(prendre $n=1$ et $f = x e^{-\frac{x^2}{2}}$)

13) Les "convoluteurs" de $\mathcal{S}'$: on appelle ainsi tout opérateur $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ faiblement continu, qui commute aux translations : $\forall a \in \mathbb{R}, T \in \mathcal{S}' : A(\tau_a T) = \tau_a A(T)$

a) Soit A un convoluteur, et $\hat{A} = \mathcal{F}^{-1} \circ A \circ \mathcal{F}$. Montrer que
$\forall T \in \mathcal{S}', \forall a \in \mathbb{R}$ $\hat{A}(e^{ia\xi} T_\xi) = e^{ia\xi} (\hat{A}T)_\xi$

b) Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, montrer que $\frac{e^{ia\xi}-1}{ia} \varphi(\xi) \to \varphi(\xi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quand $a \to 0$
En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, T \in \mathcal{S}'$ $\hat{A}(\xi^p T_\xi) = \xi^p (\hat{A}T)_\xi$

c) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists \lambda(a) \in \mathbb{C}$: $\hat{A}\delta_a = \lambda(a)\delta_a$ (remarquer que $(\xi - a)\delta_a = 0$)

d) Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction quelconque, telle que $f(h)\delta_{a+h} \to f(0)\delta_a$ quand $h \to 0$ ($a \in \mathbb{R}$ donné), faiblement dans $\mathcal{S}'$. Montrer que f est continue en 0.

e) Déduire du lemme que la fonction λ définie au (c) est continue sur $\mathbb{R}$.

f) Montrer que $(\xi - a)\delta'_a = -\delta_a$, pour $a \in \mathbb{R}$. En déduire l'existence de $\mu(a) \in \mathbb{C}$ tel que $\hat{A}\delta'_a = \lambda(a)\delta'_a - \mu(a)\delta_a$

g) Utilisant le lemme, montrer que λ est dérivable, et $\mu(a) = \lambda'(a)$
Montrer par récurrence que λ est C^∞, et $\hat{A}(\delta_a^{(p)}) = \sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j \lambda^{(j)}(a)\, \delta_a^{(p-j)}$

h) Montrer que $\hat{A}$ est la multiplication par λ : $T \mapsto \lambda T$. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que λ est à croissance lente.

i) En remarquant que $\lambda^{(p)} T = (\lambda^{(p-1)} T)' - \lambda^{(p-1)} T'$ pour $p \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{S}'$ montrer (par récurrence sur p) que λ est une fonction tempérée.

j) Réciproquement, si λ est une fonction tempérée, B la multiplication par λ, et $A = \mathcal{F} \circ B \circ \mathcal{F}^{-1}$, montrer que A est un convoluteur de $\mathcal{S}'$.

k) Montrer que la convolution par $\hat{\lambda}$ est définie et continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.
(Par exemple dès que $\lambda = R$ est une fraction rationnelle sans pôle réel)

l) Refaire tout cela à n variables.

m) Que dire des "convoluteurs" de $\mathcal{S}$, ou de $\mathbb{L}^2$??

14) Les développements d'Hermite des distributions tempérées

a) Démontrer les lemmes préliminaires suivants:

(1) Si $f \in L^2$ ainsi que toutes ses dérivées au sens des distributions, alors $f \in \mathcal{S}$ (montrer d'abord que $\hat{f} \in L^1$ ...)

(2) Si $(f_p) \to f$ et $(f_p') \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $g = f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(3) Si $(n^p a_n) \in \ell^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, (a_n) est à décroissance (on note $(a_n) \in \mathfrak{s}$, et de même $\mathfrak{s}'$ est l'espace des suites à croissance lente)

b) On rappelle que $(a_n) \overset{(*)}{\longmapsto} \sum a_n h_n(x)$ est un isomorphisme de ℓ^2 sur $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que si $(a_n) \in \mathfrak{s}$, $\sum a_n h_n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et réciproquement. Montrer que $(*)$ se restreint en un isomorphisme de $\mathfrak{s}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour quelle topologie de $\mathfrak{s}$?)

c) On appelle coefficients d'Hermite de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ les nombres

$$t_n = \langle T, h_n \rangle \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (t_n) est à croissance lente, et que la série $\sum t_n h_n$ est faiblement convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ et $a_n = \langle \varphi, h_n \rangle$, calculer $\langle T, \varphi \rangle$ en fonction des t_n et des a_n. En déduire que l'application $(t_n) \longmapsto \sum t_n h_n$ est un isomorphisme faible de $\mathfrak{s}'$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

d) On note $P_n(x)$ le n-ième polynôme d'Hermite: $P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$

Montrer les relations de récurrence: $P_{n+1}(x) - 2x P_n(x) + 2n P_{n-1}(x) \equiv 0$; $P_{n+1}(x) = 2x P_n(x) - P_n'(x)$; d'où $P_n' = 2n P_{n-1}$; et $P_n''(x) - 2x P_n'(x) + 2n P_n(x) = 0$. En déduire $h_n(0)$, puis $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx$.

e) Calculer les coefficients d'Hermite de $\hat{T}$ en fonction de ceux de $T = \sum t_n h_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Et ceux de $\check{T}$ et de $\overline{T}$? Et ceux de $\partial_\pm T = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm \partial) T$, et de $\Theta T = (\partial_- \circ \partial_+ + \partial_+ \circ \partial_-) T = (x^2 - \partial^2) T$? Enfin ceux de xT et de T' ?

f) Calculer les développements d'Hermite de δ et de 1, puis des distributions de support $\{0\}$, et des fonctions polynômes.

g) Montrer qu'il existe quatre "projecteurs orthogonaux" $\pi_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ linéaires faiblement continus, pour $j = 0, 1, 2, 3$, tels que, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: $T = \pi_0(T) + \pi_1(T) + \pi_2(T) + \pi_3(T)$ et $\check{\pi_j(T)} = (-1)^j \pi_j(T)$, $\widehat{\pi_j(T)} = \sqrt{2\pi}\,(-i)^j \pi_j(T)$, $\pi_j^2 = \pi_j$, $\pi_j \circ \pi_k = 0$ pour $j \neq k$. Les calculer en fonction de $\wedge$, $\vee$ et $-$, puis calculer les coefficients des $\pi_j(T)$ en fonction de ceux de T.

h) Réécrire tout cela sur $\mathbb{R}^n$.

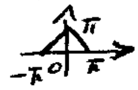
15) La "formule de Poisson": $\boxed{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \delta_{2\pi\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} e^{i\alpha x}}$

(les deux séries convergeant faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)

La déduire des § 6 et 7. La retrouver en "fouriérisant" leur périodicité.

En déduire, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\alpha)$.

Est-ce vrai pour des φ un peu plus "générales" ?

16) Calculer la série de Fourier de la fonction périodique sur $\mathbb{R}$ dont voici le graphe sur $[-\pi,\pi]$: 

. En déduire $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

17) Calculer les séries de Fourier des distributions périodiques qui valent $\mathrm{Sh}\,\alpha x$ et $\mathrm{Ch}\,\alpha x$ (sur $]-\pi,\pi[$) ; $\delta_{\theta_0}-\delta_{-\theta_0}$; δ_π

18) a) Développer en série de Fourier les fonctions qui valent x, et x^3 sur $[-\pi,\pi[$. En déduire $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}$. Peut-on déduire ces développements de celui de δ_π ?

b) On pose $f(x)=\frac{1}{3}$ pour $0<x<\frac{\pi}{3}$, 0 pour $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{1}{3}$ pour $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$.
Trouver une série de Sinus et Cosinus qui converge vers f sur chacun de ces intervalles. Quelle est sa somme en $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$?
Retrouver ce développement en dérivant f au sens des distributions.

c) Construire la "courbe" d'équation $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin ny\,\cos nx}{n^3}=0$ (dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$)

19) En développant $e^{\alpha e^{2i\pi x}}$, prouver que $\int_0^1 e^{2\alpha\cos 2\pi x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}$ $(\alpha\in\mathbb{C})$
(Utiliser que les $e^{2i\pi nx}$ sont une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.)

20) Développer la fonction périodique qui vaut $\mathrm{Ch}\,\lambda x$ sur $[-\pi,\pi]$, pour $\lambda\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ fixé. Peut-on retrouver ce développement en calculer $f''-\lambda^2 f$, où f est la fonction précédente.
En déduire une série de somme $\frac{\mathrm{Ch}\,\pi\lambda}{\mathrm{Sh}\,\pi\lambda}$; en intégrant, en déduire un développement en produit infini de la fonction $\lambda\mapsto\mathrm{Sh}\,\lambda$.

21) Calculer le développement de Fourier de $|\sin^3 x|$. Le retrouver en calculant $(\partial^2+1)(\partial^2+9)|\sin^3 x|$.

22) On pose $f(x)=\log|\sin x|$. Montrer que $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et calculer sa dérivée au sens des distributions, notée $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$. Montrer que $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$ est périodique, impaire, et que $\sin x\cdot vp\,\mathrm{Cotg}\,x=\cos x$. En déduire le développement de Fourier de $vp\,\mathrm{Cotg}\,x$. Résoudre dans $\mathcal{D}'_p(\mathbb{R})$ l'équation $\sin x\,T=\cos x$.
Et pour $\cos x\cdot T=\sin x$?

23) On considère dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T})$ l'équation : (*) $S'-\lambda S=S_0$
avec $S_0\in\mathcal{S}'(\mathbb{T})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ donnés.

a) On suppose $\lambda\notin i\mathbb{Z}$. Montrer que (*) a une et une seule solution ; la calculer (sous forme de série) lorsque $S_0=\delta$.

b) Montrer que les solutions de $S'-\lambda S=0$ sur $\mathbb{T}-\{0\}\simeq\,]0,2\pi[$ (dans $\mathcal{D}'(]0,2\pi[)$) sont des fonctions localement intégrables, puis résoudre (*) pour $S_0=\delta$ par prolongement à $\mathbb{T}$. Interpréter l'identité obtenue.

c) On suppose maintenant $\lambda=in_0$, avec $n_0\in\mathbb{Z}$. A quelle condition (*) a-t-elle des solutions, et lesquelles ?

d) Quelles sont les valeurs et vecteurs propres de $S\mapsto S'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T})$?

24) Une "équation aux différences finies" : Pour $(b_{p,q})\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$ trouver $(a_{p,q})\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^2)$ telle que : $a_{p+1,q}+a_{p-1,q}+a_{p,q+1}+a_{p,q-1}-4\lambda a_{p,q}=b_{p,q}$ (pour $\lambda\in\mathbb{C}$)
(Interpréter comme une équation de division sur $\mathbb{T}^2$)

25) E.d.p.l. à coefficients constants sur le tore

Soit $P(\partial) = P(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta_n})$, où $P(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme.

On introduit les deux conditions :

(C) : $\exists\, m \in \mathbb{N}, C > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n \quad \frac{1}{|P(i\alpha)|} \leq C(1+|\alpha|)^m$

(C') : P vérifie (C), sauf pour un nombre fini de valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

a) Démontrer : $\{P\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{T}^n)\} \Rightarrow (C) \Rightarrow \{P\mathcal{S}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{T}^n) \text{ et } P\mathcal{S}'(\mathbb{T}^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{T}^n)\}$

b) Montrer que (C') caractérise les opérateurs "hypoelliptiques" ; c'est-à-dire :
$\forall S \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}, \quad PS = \varphi \Rightarrow S \in \mathcal{S}$

c) Si $n=1$, (C') est vraie pour tout $P \neq 0$.

d) Pour $n=2$, on considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'opérateur $P_a = \frac{\partial}{\partial\theta_1} - a\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{i}{2}$
Montrer que P_a vérifie (C') si $a \in \mathbb{Q}$. Et (C) ?
((Montrer que P_a vérifie (C) si a est irrationnel algébrique !))
On pose maintenant $a = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^j}{k(j)}$, avec $k(0)=1$ et $k(j+1) = 2^{k(j)}$
Montrer que P_a ne vérifie ni (C) ni (C').

26) La convergence "facile" des séries de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^1)$ ne doit pas cacher la difficulté d'étude de leur convergence en des sens plus classiques. En voici des exemples. On dit que $f \in C^0(\mathbb{R})$, de période 2π est "à variation bornée" si $\sum_{k=0}^{\ell} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ est borné indépendamment de la subdivision de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par les (x_k). (f est alors sur $\mathbb{R}$ la différence de deux fonctions croissantes, et en particulier $f \in \mathbb{L}^1_{loc}$, donc $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, même si $f \notin C^0$!)

a) Si f est à variation bornée, et $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$, montrer que $c_n = O(\frac{1}{n})$ (considérer la subdivision par les $\frac{k\pi}{n}$)

b) Mais $c_n \neq o(\frac{1}{n})$ en général : pour $x \in [0, 2\pi[$, si le développement en base trois de $\frac{x}{2\pi}$ s'écrit $0,\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{\ell-1} 1 \dots$, avec $\varepsilon_j = 0$ ou 2, on pose $g(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$, puis on prolonge g par continuité à $[0, 2\pi[$, enfin on pose $f(x) = g(x) - \frac{x}{2\pi}$ pour $x \in [0, 2\pi[$, et $f(x+2k\pi) = f(x)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est continue et à variation bornée, mais que, pour $m \in \mathbb{N}$, $c_{3^m}(f) = \frac{1}{3^m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ix}dx\right) \neq 0$ et conclure.

c) Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \log n}$ est la série de Fourier d'une fonction continue, en montrant qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ (raisonner séparément sur $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ et sur $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; sur le deuxième intervalle séparer $\sum_{N}^{N'-1} \frac{\sin nx}{n \log n}$ et $\sum_{N'}^{\infty}$ (id), avec $\frac{1}{N'} < x \leq \frac{1}{N'-1}$ et utiliser que pour $0 < x \leq \pi$, $|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq \frac{\pi}{x}$

d) Montrer que cependant cette série n'est absolument convergente en aucun point de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$! (Minorer $|\sin nx|$ par $\sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}$)