CHAPITRE IV : LAPLACE, SOBOLEV, et DIRICHLET

§1 OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Définition : On dit qu'un opérateur différentiel linéaire $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, dont les coefficients a_α sont C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est elliptique (dans U) si et seulement si :

$$\forall x\in U\ \forall \xi\in\mathbb{R}^n\quad \boxed{\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha=0 \Rightarrow \xi=0}$$

Théorème ("Régularité elliptique") : Un opérateur elliptique est hypoelliptique (d'où le nom "hypoelliptique" ; la récipoque étant fausse. La définition est donnée au chap II, §6 : p. 25)

On ne démontre ici ce théorème que dans le cas particulier important où l'opérateur P est à coefficients constants, et homogène : $P(\partial)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\partial^\alpha$, avec $m\in\mathbb{N}$ et des $a_\alpha\in\mathbb{C}$. C'est alors un corollaire de la proposition suivante, compte tenu du théorème du ch II, §6 (et de la remarque qui le suit) :

Proposition : Soit $P\neq 0$ un tel opérateur, elliptique. Il existe $E\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PE-\delta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $E|_{\mathbb{R}^n-\{0\}}\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n-\{0\})$.

Preuve : On peut évidemment supposer $m\geq 1$. Pour $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et $N\in\mathbb{N}$, la fonction $\partial^\alpha\left(\frac{1}{P^N(i\xi)}\right)$ est C^∞ hors de l'origine, et homogène de degré $-mN-|\alpha|$; de plus, comme P est elliptique, sa restriction à la boule-unité est majorée en module par un nombre $c=c_{\alpha,N}>0$, d'où

$$(*)\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n-\{0\}\qquad \left|\partial^\alpha\left(\frac{1}{P^N(i\xi)}\right)\right|\leq c|\xi|^{-mN-|\alpha|}$$

Soit $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)\equiv 1$ pour $|\xi|\leq 1$, et posons $F(\xi)=\frac{1-\chi(\xi)}{P^N(i\xi)}$.
F est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, et $(*)$ pour $\alpha=0$ montre que $F\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ dès qu'on a choisi N assez grand : par le théorème de Riemann-Lebesgue, on a donc $F=\hat{f}$, pour une certaine fonction continue f. Mais $(*)$ implique aussi que $|(i\xi)^\alpha\partial^\alpha F(\xi)|\leq c|\xi|^{-mN}$ pour $|\xi|$ assez grand (là où χ est nulle), et $(i\xi)^\alpha\partial^\alpha F(\xi)$ est encore dans $\mathbb{L}^1$, de sorte que $\partial^\alpha((ix)^\alpha f(x))$ est continue, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, et par suite f est C^∞ en dehors de l'origine. De plus

$$\widehat{P(\partial)^N f}=P(i\xi)^N F=1-\chi\ ,\ \text{donc}\ P(\partial)\{P(\partial)^{N-1}f\}=\delta-\varphi$$

où $\varphi=\mathcal{F}^{-1}(\chi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Posons $E=\psi(P(\partial)^{N-1}f)$, où $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\equiv 1$ au voisinage de l'origine. Il vient :

$PE-\delta=P[(\psi-1)P(\partial)^{N-1}f]-\varphi$ est C^∞ puisque $P(\partial)^{N-1}f$ l'est en dehors de l'origine. Comme E et δ sont à support compact, $PE-\delta\in\mathcal{D}$. ■

Cette preuve couvre en particulier les cas de "l'opérateur de Laplace" (1749-1827) sur $\mathbb{R}^n$, appelé laplacien et noté $\Delta=\sum_{i=1}^n\partial_i^2$, et de l'opérateur "de Cauchy-Riemann" sur $\mathbb{R}^2_{x,y}$, noté $\partial_{\bar z}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$, dont l'ellipticité est claire.

Mais la connaissance d'une "bonne" solution élémentaire explicite a d'autres applications que la "régularité" de l'opérateur (cf. Ch. II, §6)

On sait déjà que la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \longmapsto \dfrac{1}{\pi(x+iy)}$ est une solution élémentaire de $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ (cf. Ch II, §6, remarque 3, p.26, et ch. I, §7, ex.22)

Comme $\frac{1}{\pi z}$ est analytique sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ∂_z est hypoelliptique (d'ailleurs hypoelliptique analytique, et toute "distribution holomorphe" (c'est-à-dire dans le noyau de $\partial_{\bar z}$) dans un ouvert de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, y est en fait une fonction holomorphe au sens usuel.

Bien entendu l'opérateur $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ a des propriétés analogues: $\frac{1}{\pi \bar z}$ en est une solution élémentaire, et son noyau est formé des fonctions antiholomorphes.

Comme $4\partial_z\partial_{\bar z} = \partial_x^2 + \partial_y^2$, le laplacien, pour $n=2$, est hypoelliptique analytique ; on en connait déjà la solution élémentaire $\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}$ (mêmes références que pour ∂_z, ci-dessus), et son noyau est formé des "fonctions harmoniques" (sommes d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe).

---

§2 LAPLACIEN ET ROTATIONS

Le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est elliptique. On appelle harmonique toute distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $\Delta T = 0$, et c'est donc toujours une fonction C^∞ (et même analytique) dans U. Pour $n=3$, il intervient dans toutes les équations différentielles de base de la physique, pour décrire des phénomènes "stationnaires" c'est-à-dire des états d'équilibre (indépendants du temps).

Lemme 1: ("laplacien radial") Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ ne dépend que de $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, alors Δf aussi, et : $\boxed{\Delta f(r) = \dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \dfrac{(n-1)}{r}\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}}$

Preuve: De $r^2 = \sum x_i^2$ on tire $r\,dr = \sum x_i\,dx_i$, d'où $\dfrac{x_i}{r} = \dfrac{\partial r}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n)$

Par suite : $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f(r) = f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r)\dfrac{x_j}{r}$, puis

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(r) = \frac{f'(r)}{r} + x_j\left(\frac{f'(r)}{r}\right)' \cdot \frac{x_j}{r} = \frac{1}{r}f'(r) + \frac{x_j^2}{r^2}f''(r) - \frac{x_j^2}{r^3}f'(r), \text{ et}$$

$$\Delta f(r) = \frac{n}{r}f'(r) + \frac{\sum x_j^2}{r^2}f''(r) - \frac{\sum x_j^2}{r^3}f'(r) = \frac{(n-1)}{r}f'(r) + f''(r). \blacksquare$$

Ce lemme exprime une propriété d'invariance par rotations de Δ, qui est aussi invariant par réflexions, donc par tout le groupe orthogonal $O(n)$: changer x_i en $-x_i$ ne change pas Δ. (En physique, ceci exprime "l'isotropie" de l'espace). D'ailleurs l'opérateur transformé de Δ par Fourier est l'opérateur $T_\xi \longmapsto -|\xi|^2 T_\xi$, et $O(n)$ est justement le groupe d'invariance de la forme quadratique $|\xi|^2$!

Comme $O(n)$ est un groupe topologique compact il existe une mesure sur $O(n)$ invariante par translations à gauche et à droite : sa "mesure de Haar" dg, unique si on impose que $\int_{O(n)} dg = 1$.

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il vient alors (invariance + dérivation sous l'intégrale):

$$(*) \quad \int_{O(n)} (\Delta_x f)(gx)\,dg = \int_{O(n)} \Delta_x (f(gx))\,dg = \Delta_x \int_{O(n)} f(gx)\,dg$$

Notons a_n l'aire de la sphère-unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$, et ds sa "mesure de surface" (cf. ch I, §7, n°26): on a $a_n = \int_{S^{n-1}} ds$, et par homogénéité $dx_1 \ldots dx_n = r^{n-1}\,dr\,ds$

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, notons $\tilde{f}$ sa "moyenne sur les sphères": $\tilde{f}(x) = \frac{1}{a_n}\int_{s \in S^{n-1}} f(|x|s)\,ds$

($(r = |x|, s)$ est un "système de coordonnées sphériques" sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$)

Lemme 2: $\boxed{\widetilde{\Delta f} = \Delta \tilde{f}}$

Preuve: Pour $g \in O(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(gx) = \tilde{f}(x)$, d'où $\tilde{f}(x) = \int_{O(n)} \tilde{f}(gx)\,dg$.

Mais $\int_{O(n)} f(gx)\,dg$ est constante sur chaque sphère, d'où

$\int_{O(n)} f(gx)\,dg = \widetilde{\int_{O(n)} f(gx)\,dg} = \int_{O(n)} \tilde{f}(gx)\,dg = \tilde{f}(x)$, et finalement, grâce à $(*)$:

$$\Delta \tilde{f}(x) = \Delta\left(\int_{O(n)} f(gx)\,dg\right) \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_{O(n)} \Delta f(gx)\,dg = \widetilde{\Delta f}(x). \blacksquare$$

Proposition: Pour $n > 2$, la fonction $E(r) = \frac{-1}{(n-2)a_n\, r^{n-2}}$ est une solution élémentaire du laplacien. (Pour $n = 2$, $E(r) = \frac{1}{2\pi}\log r$). Elle est localement intégrable, ainsi que sa dérivée, sur $\mathbb{R}^n$, et analytique sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$

Preuve: Seule la première assertion demande une preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} E(|x|)\,\Delta\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} E(r)\,\Delta\varphi(rs)\,r^{n-1}\,dr\,ds$$

$$= \int_0^{+\infty} a_n\, \widetilde{E(r)\,\Delta\varphi(r)}\, r^{n-1}\,dr = a_n \int_0^{+\infty} E(r)\,\Delta\tilde{\varphi}(r)\, r^{n-1}\,dr \quad \text{(par le lemme 2)}$$

$$= a_n \int_0^{+\infty} E(r)\left(\frac{d}{dr} + \frac{n-1}{r}\right)(\tilde{\varphi}'(r))\, r^{n-1}\,dr \quad \text{(par le lemme 1)}$$

$$= a_n \int_0^{+\infty} E(r)\,\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\tilde{\varphi}'(r)\right)dr = a_n\left\{\underbrace{\left[r^{n-1}\tilde{\varphi}'(r)E(r)\right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ dès que } n>1} - \int_0^{+\infty} E'(r)\,\tilde{\varphi}'(r)\, r^{n-1}\,dr\right\}$$

$$= -\int_0^{+\infty} \tilde{\varphi}'(r)\,dr = \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \blacksquare$$

---

§3 LES ESPACES DE SOBOLEV (SUR $\mathbb{R}^n$)

Les distributions (même tempérées) fournissent le cadre théorique de la résolution des e.d.p. linéaires, mais en pratique, leurs solutions "intéressantes" sont "presque partout" plus ou moins régulières. C'est pourquoi on intercale entre $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{S}$ d'une part, $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{S}'$ d'autre part des échelles d'espaces emboîtés formés de fonctions de plus en plus régulières, et de distributions de plus en plus singulières.

L'échelle la plus fréquentée est due à Sobolev (1908-?)

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$.

H^s est "l'espace de Sobolev" d'indice s, sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques "faciles": 1) Comme $\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1_{loc}$ (Cauchy-Schwarz), si $u \in H^s$, $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in \mathbb{L}^1_{loc}$, et par suite $\hat{u} \in \mathbb{L}^1_{loc}$ aussi.

2) H^s est en correspondance bijective linéaire naturelle avec $\mathbb{L}^2$, par $u \leftrightarrow \hat{u} \leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$; en particulier c'est un espace vectoriel ! Il en hérite sa structure d'espace de Hilbert, pour le produit scalaire $(u,v)_{H^s} = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\right)_{\mathbb{L}^2}$ qu'on notera $(u,v)_s$.
Notons que $H^0 = \mathbb{L}^2$

3) Pour tout $s < s'$, $H^{s'}$ est un sous-espace de H^s, et les injections $\mathcal{S} \hookrightarrow H^{s'} \hookrightarrow H^s$ sont continues et d'image dense

Preuves : Si $u \in H^{s'}$, $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$, d'où $H^{s'} \overset{i}{\hookrightarrow} H^s$ avec $\|i\| \leq 1$.
Si $\varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, et $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right) \left[\sup (1+|\xi|^2)^{\frac{s+n+1}{2}} |\hat{u}(\xi)|\right]^2$
donc $\mathcal{S}$ est contenu dans tous les H^s, avec des injections continues.
Enfin $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathbb{L}^2$, et si $\varphi_n \to u$ dans $\mathbb{L}^2$ ($\varphi_n \in \mathcal{S}$, $u \in \mathbb{L}^2$), $\hat{\varphi}_n \in \mathcal{S}$, $\hat{u} \in \mathbb{L}^2$ et $\hat{\varphi}_n \to \hat{u} \in \mathbb{L}^2$; donc $(1+|\xi|^2)^{-s}\hat{\varphi}_n(\xi) \to (1+|\xi|^2)^{-s}\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$, où $v \in H^s$ est quelconque. ■

Comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$, il l'est aussi dans tous les H^s, avec des injections continues.

4) Soit $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un o. d. l. à coefficients constants. Alors $\forall s \in \mathbb{R}$, $P(\partial)$ est continu de H^s dans H^{s-m}

Preuve : Pour $u \in H^s$, $\int (1+|\xi|^2)^{s-m} |\widehat{P(\partial)u}(\xi)|^2 d\xi = \|P(\partial)u\|^2_{s-m}$
$\leq \int (1+|\xi|^2)^{s-m} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)|^2\right) d\xi \leq C^{ste} \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C\|u\|_s^2$. ■

5) Posons $\Pi = 1 - \Delta : u \mapsto u - \Delta u$ (de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$). Alors Π^m est un isomorphisme de H^s sur H^{s-2m}, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$

Preuve : $|\widehat{\Pi^m u}(\xi)|^2 = (1+|\xi|^2)^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2$. ■

6) Pour $s \geq 0$, on a d'après (3) des injections continues et denses :
$$\mathcal{S} \hookrightarrow H^s \hookrightarrow \mathbb{L}^2 \hookrightarrow H^{-s} \hookrightarrow \mathcal{S}'$$
En ce sens, H^s est un espace de fonctions (au moins $\mathbb{L}^2$, donc $\mathbb{L}^1_{loc}$, cf (1)) et H^{-s} est un espace de distributions (mieux que tempérées) ; d'ailleurs chacun s'identifie au dual de l'autre (par le théorème de représentation de Riesz), au moyen de la forme sesquilinéaire $H^s \times H^{-s} \to \mathbb{C}$ définie par $(u,v)_{\pm s} = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}, (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{v}\right)_{\mathbb{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi$
qui, à une conjugaison près, n'est autre que le produit scalaire entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$: si $\varphi \in \mathcal{S} \subset H^s$ et $T \in H^{-s} \in \mathcal{S}'$, $(\varphi, T)_{\pm s} = \langle \varphi, \overline{T} \rangle$.

7) On peut préciser la remarque précédente pour les valeurs entières de s :

Proposition : Pour $m \in \mathbb{N}$, H^m est l'espace des fonctions $\mathbb{L}^2$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$, au sens des distributions sont encore dans $\mathbb{L}^2$

Preuve : Si $u \in H^m$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, avec $|\alpha| \leq m$, on a

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

donc $\partial^\alpha u \in \mathbb{L}^2$ (plus rigoureusement on écrit ces inégalités pour $u_p \in \mathcal{S}$, $u_p \to u$ dans H^m, et $(\partial^\alpha u_p)$ est alors de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$!), et inversement

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C^{ste} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C^{ste} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2}. \blacksquare$$

Remarque : Les deux majorations de cette preuve fournissent en prime :

Proposition : Sur H^m, la norme de H^m est équivalente à la norme

$$u \longmapsto \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2} \Big)^{1/2}$$

De même, la remarque (5) permet d'énoncer un résultat semblable pour H^{-m}

Proposition : H^{-m} est l'espace des distributions qui sont des combinaisons de dérivées, au sens des distributions, de fonctions $\mathbb{L}^2$

Preuve : Π^{-m} est un isomorphisme de H^{-m} sur H^m (inverse de $(1-\Delta)^m$)
Donc si $u \in H^{-m}$ $v = \Pi^{-m} u \in H^m$, et $u = (1-\Delta)^m v$ est une combinaison de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions qui sont des dérivées d'ordre $\leq m$ de v, donc dans $\mathbb{L}^2$ par la première proposition. $\blacksquare$

Remarque : de même que ci-dessus, la norme de H^{-m} est équivalente à la norme : $u \longmapsto \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha (1-\Delta)^{-m} u\|^2_{\mathbb{L}^2} \Big)^{1/2} \sim \|(1-\Delta)^{-m} u\|_{H^m}$

8) Comme la transformation de Fourier "échange régularité locale et décroissance à l'infini", la définition de H^s permet de conclure intuitivement que la régularité des éléments de H^s est fonction croissante de s. Plus précisément, on a par exemple la

Proposition : Pour $m \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$, dès que $\boxed{s > m + \frac{n}{2}\ ,\ H^s \subset C^m(\mathbb{R}^n)}$

Preuve : D'après (4) si $u \in H^s$ toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ seront dans H^{s-m}, qui est contenu dans $H^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, d'après (3). Il suffit donc de montrer la proposition pour $m = 0$. Dans ce cas, par Cauchy-Schwarz, $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \Big)$
où la dernière intégrale est convergente dès que $s > \frac{n}{2}$.
Donc $\hat{u} \in \mathbb{L}^1$ et $u \in \mathcal{F}\mathbb{L}^1 \subset C^0$ par le théorème de Riemann-Lebesgue. $\blacksquare$

9) On déduit aussitôt de (8) : $\boxed{\bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)}$ et d'autre part $\mathcal{S} \subset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$
mais ces deux inclusions sont strictes : par exemple pour $n = 1$, $\frac{1}{1+x^2} \in \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$, puisque $\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-|\xi|}$, tandis que 1 n'appartient à aucun H^s puisque $\hat{1} = 2\pi\delta \notin \mathbb{L}^1_{loc}$ (cf. (1)).

Il est clair que le fait d'appartenir à l'un des H^s est, pour une distribution tempérée, essentiellement une condition de régularité locale ; mais il y a en plus une "petite" condition de décroissance à l'infini, puisque (cf. (1)), $\mathcal{F}H^s$ est formé de fonctions localement intégrables !

10) De même l'inclusion $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset \mathcal{S}'$ est strict, car $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset \mathcal{D}'_F$ (espace des distributions d'ordre fini, car toute distribution $u\in H^s$ est d'ordre fini, par la dernière proposition de (7), tandis que $\mathcal{S}'$ contient des distributions d'ordre infini, comme par exemple, pour $n=1$, la transformée de Fourier de $(\exp(ie^x))'$ ... (exercice).

Les espaces de Sobolev sont assez utiles pour qu'on les ait étudiés de très près. Voici par exemple une caractérisation "directe" (indépendante de Fourier) qui précise la condition de "régularité" qu'ils imposent à leurs adhérents :

Théorème : Pour $u\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $s\in\,]0,1[$, $\boxed{u\in H^s \Leftrightarrow I_s(u)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\tau_x u-u\|^2_{\mathbb{L}^2}}{|x|^{n+2s}}dx<\infty}$

Remarque : Comme $\|\tau_x u-u\|^2\leq(\|\tau_x u\|+\|u\|)^2\leq 4\|u\|^2$, et que $n+2s>n$, la convergence à l'infini de l'intégrale est claire ; c'est en 0 qu'il faut que $\|\tau_x u-u\|\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ "assez vite", pour que l'intégrale converge, ce qui signifie que de "petites" translations doivent "peu" modifier u : c'est bien de régularité locale qu'il s'agit !

Preuve : Pour $\xi\in\mathbb{R}^n$, posons $J(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-ix\xi}-1|^2}{|x|^{n+2s}}dx$, intégrale qui est bien convergente (à l'infini $|e^{ix\xi}-1|^2\leq 4$ et $n+2s>n$; en zéro, $|e^{-ix\xi}-1|=O(|x|)$, la fonction à intégrer est $O\left(\frac{1}{|x|}^{n+2s-2}\right)$, et $n+2s-2<n$...!)

Pour toute rotation R de $\mathbb{R}^n$, $J(R\xi)=J(\xi)$, car R ne change ni $|x|$, ni dx ; donc J est constante sur les sphères, et on peut poser pour $|\xi|=1$, $J(\xi)=c>0$.

Pour $\lambda>0$, $J(\lambda\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-i\lambda\xi x}-1|^2}{|x|^{n+2s}}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|e^{-i\xi y}-1|^2}{|y|^{n+2s}}\lambda^{n+2s}\lambda^{-n}dy=\lambda^{2s}J(\xi)$

Finalement donc, $J(\xi)=c|\xi|^{2s}$.

Comme $\|\tau_x u-u\|^2_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{-n}\|\widehat{\tau_x u-u}\|^2_{\mathbb{L}^2}=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{-ix\xi}-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$, il vient

$$I_s(u)=(2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|e^{-ix\xi}-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2}{|x|^{n+2s}}dx\,d\xi=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}J(\xi)\,|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

$$=c(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi<c(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

donc $I_s(u)<\infty$ dès que $u\in H^s$, mais la réciproque est aussi vraie, car $\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi<\infty$, puisque $u\in\mathbb{L}^2$. ■

On en tire une caractérisation de H^s pour $s>0$: si $s=s_1+s_2$, avec $s_1\in\mathbb{N}$ et $0\leq s_2<1$, $u\in H^s$ si et seulement si : $\forall\alpha, |\alpha|=s_1$, $I_{s_2}(\partial^\alpha u)<\infty$.

On pourrait généraliser au cas $s<0$, en appliquant à u une puissance du "convoluteur" $(1-\Delta)^{-1}$ convenable ... (cf. (5) et (7) ; ... et ch. III §8, exercice 13).

---

§4 OPÉRATEURS DE TRACE ET DE RELÈVEMENT

Pour $0<p<n$, les images réciproques des fonctions C^∞ par l'injection de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}^n$: $(x_1,\dots,x_{n-p})\mapsto(x_1,\dots,x_{n-p},0,\dots,0)$ sont tout simplement les restrictions $\varphi(x_1,\dots,x_n)\mapsto\varphi(x_1,\dots,x_{n-p},0,\dots,0)$ au sous-espace $\mathbb{R}^{n-p}$; les distributions n'ont en général qu'une image directe (cf. ch. II, §2) qui est dans ce cas $T\mapsto i_*T=T\otimes\delta_{\mathbb{R}^p}$. Même une fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, n'étant définie que presque partout n'a pas en général de restriction (que vaut $H(0)$?)

Mais les fonctions de certains espaces de Sobolev ont des restrictions naturelles, qu'on appelle leurs traces.

Théorème ("de trace") : Pour $0<p\le n$, l'opérateur de restriction $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\rho}\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-p})$ admet un unique prolongement continu $\rho: H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^{n-p})$ dès que $s>\frac{p}{2}$

Preuve : Pour $p=n$, $s>\frac{n}{2}$ implique que $u\in H^s$ est continue (§3, Prop. du (β)) et $\rho(u)=u(0)$. On peut donc supposer $1\le p\le n-1$. Notons pour alléger les notations $y=(x_1,\dots,x_{n-p})$ et $z=(x_{n-p+1},\dots,x_n)$, d'où $x=(y,z)\in\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p$, et de même $\xi=(\eta,\zeta)$ pour les variables duales. On a, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par inversion de Fourier partielle

$$\widehat{\rho\varphi}(\eta)=\int_{\mathbb{R}^{n-p}}e^{-iy\eta}\varphi(y,0)\,dy=\mathcal{F}\varphi(\eta,0)=(2\pi)^{-p}\int_{\mathbb{R}^p}\hat{\varphi}(\eta,\zeta)\,d\zeta,$$

d'où $$\|\rho\varphi\|^2_{s-\frac{p}{2}}=\int_{\mathbb{R}^{n-p}}|\widehat{\rho\varphi}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{s-\frac{p}{2}}d\eta=\int_{\mathbb{R}^{n-p}}(2\pi)^{-2p}\left|\int_{\mathbb{R}^p}\hat{\varphi}(\eta,\zeta)d\zeta\right|^2(1+|\eta|^2)^{s-\frac{p}{2}}d\eta$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^p}\hat{\varphi}(\eta,\zeta)d\zeta\right|^2\le\left(\int|\hat{\varphi}(\eta,\zeta)|d\zeta\right)^2\le\left(\int_{\mathbb{R}^p}|\hat{\varphi}(\eta,\zeta)|^2(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^s d\zeta\right)\left(\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\zeta}{(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^s}\right)$$

Comme $$\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\zeta}{(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^s}=\int_{|\zeta|\le|\eta|}+\int_{|\zeta|\ge|\eta|}\le\frac{C^{ste}}{(1+|\eta|^2)^s}\left(\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^p}B(0,|\eta|)+\int_{\mathbb{R}^p}\frac{d\zeta}{\left(1+\left|\frac{\zeta}{\eta}\right|^2\right)^s}\right)$$

$$\le C^{ste}(1+|\eta|^2)^{\frac{p}{2}-s}$$ dès que $s>\frac{p}{2}$, il vient

$$\|\rho\varphi\|^2_{s-\frac{p}{2}}\le C^{ste}\int_{\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}^p}(1+|\eta|^2)^{\frac{p}{2}-s}(1+|\eta|^2)^{s-\frac{p}{2}}|\hat{\varphi}(\eta,\zeta)|^2(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^s d\eta\,d\zeta$$

$$=C^{ste}\|\varphi\|^2_s$$; d'où le résultat, par densité de $\mathcal{D}$ dans H^s. ∎

L'opérateur "de trace" ρ du théorème ci-dessus est largement surjectif ; on ne le démontre ici que pour $p=1$ et s entier ; notons $\Gamma=\mathbb{R}^{n-1}=\{(x_1,\dots,x_{n-1},0)\}\subset\mathbb{R}^n$.

Théorème ("de relèvement") : Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Il existe un opérateur R linéaire continu de $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{m-3/2}(\Gamma)\times\dots\times H^{1/2}(\Gamma)=E$ (il y a m facteurs, et E est muni de la topologie produit !) dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que, si $v=(v_0,v_1,\dots,v_{m-1})\in E$, et $u=Rv$, on ait, en notant $u|_\Gamma=\rho u$: $u|_\Gamma=v_0$, $\partial_n u|_\Gamma=v_1,\dots,\partial_n^{m-1}u|_\Gamma=v_{m-1}$. Il existe donc $C>0$ tel que pour tout $v\in E$, $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\le C\left(\|v_0\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\dots+\|v_{m-1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)$

<u>Preuve</u>: Choisissons un entier $j \in [\![0, m-1]\!]$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\partial^k\varphi(0) = \delta_{jk}$ pour $k = 0, .., m-1$ (par exemple $\varphi(x) = \frac{x^j}{j!}\psi(x)$, avec $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \equiv 1$ au voisinage de 0). Notons $y = (x_1, .., x_{n-1})$ la variable de Γ, et η la variable duale. Soit $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$ et posons

$$\widehat{R_j w}^y(\eta, x_n) = (1+|\eta|^2)^{-j/2}\varphi((1+|\eta|^2)^{1/2}x_n)\hat{w}(\eta)$$

ce qui définit une distribution tempérée des variables (η, x_n), donc par transformation de Fourier partielle inverse, une distribution $R_j w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

De plus $\partial_n^k \widehat{R_j w}^y(\eta, 0) = \hat{w}(\eta)$ si $k = j$, 0 sinon,

d'où $\partial_n^k R_j w(y, 0) = \delta_{jk} w(y)$, puis

$$\|R_j w\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C^{te} \sum_{k+|\alpha| \leq m} \iint |\partial_n^k \partial_y^\alpha R_j w(y, x_n)|^2 dy\, dx_n$$

$$\leq C^{te} \sum_{k+|\alpha| \leq m} \iint |\eta|^{2|\alpha|} |\partial_n^k \widehat{R_j w}^y(\eta, x_n)|^2 d\eta\, dx_n \quad \text{(Plancherel partiel)}$$

$$\leq C^{te} \sum_{k+|\alpha| \leq m} \iint (1+|\eta|^2)^{|\alpha|}(1+|\eta|^2)^{k-j} |\varphi^{(k)}(\underbrace{(1+|\eta|^2)^{1/2} x_n}_{=t})\hat{w}(\eta)|^2 d\eta\, dx_n$$

$$= C^{te} \sum_{k+|\alpha| \leq m} \iint (1+|\eta|^2)^{|\alpha|+k-j-\frac{1}{2}} |\varphi^{(k)}(t)\hat{w}(\eta)|^2 d\eta\, dt$$

$$\leq C^{te}\left(\sum_{k=0}^{m} \|\varphi^{(k)}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}\right)\left(\int (1+|\eta|^2)^{m-j-\frac{1}{2}} |\hat{w}(\eta)|^2 d\eta\right) \leq C^{te}\|w\|^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Par densité de $\mathcal{D}$, R_j se prolonge donc en opérateur continu de $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $\partial_n^k(R_j w)|_\Gamma = \delta_{jk} w$, pour $0 \leq k < m$.
Pour conclure il suffit donc de poser $Rv = R_0 v_0 + \cdots + R_{m-1} v_{m-1}$. ∎

<u>Remarque</u>: Cet opérateur "<u>de relèvement</u>" R est bien sûr un inverse à droite de l'opérateur "<u>de trace</u>": $tr : H^m(\mathbb{R}^n) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ défini par $u \mapsto \prod_{j=0}^{m-1} \rho(\partial_n^j u)$, où ρ est la restriction, ou "trace" définie au premier théorème.

Notons $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ l'un des deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ,

et, pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \mid \partial^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n_+)$ pour $|\alpha| \leq m\}$, muni de la norme hilbertienne $\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n_+)}\right)^{1/2}$.

Si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, son prolongement à $\mathbb{R}^n$ par 0 hors de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ est bien défini (u est une fonction $\mathbb{L}^1_{loc}$) et évidemment dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, mais en général pas mieux (id est $\notin H^j(\mathbb{R}^n)$ pour $j > 0$), à cause des <u>sauts</u> sur Γ des dérivées, de la forme $\sum_j v(y) \otimes \delta^{(j)}(x_n)$ qui ne sont pas dans $\mathbb{L}^1_{loc}$.

Par contre, nous <u>admettrons</u> ici qu'il est toujours possible de trouver un "prolongement" $\tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire tel que $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+} = u$, et que $tr\,\tilde{u}$ ne dépend que de u ; on peut même construire un opérateur continu de prolongement, et s'imposer par exemple $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > -\varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On note alors $tr\, u = tr\, \tilde{u}$ et c'est encore un opérateur linéaire continu de $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ dans E.

On note $H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ dans $H^m(\mathbb{R}^n_+)$

Proposition: $H^m_0(\mathbb{R}^n_+) = \operatorname{Ker}\left(tr : H^m(\mathbb{R}^n_+) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$

Preuve: si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, φ et toutes ses dérivées sont nulles au voisinage de Γ, et donc clairement $tr\,\varphi = 0$. Par densité, il vient que $H^m_0(\mathbb{R}^n_+) \subset \operatorname{Ker} tr$. Inversement, si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ et $tr\,u = 0$, le prolongement de u à $\mathbb{R}^n$ par 0 est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ (il n'y a plus de sauts). Les translations étant continues dans $H^m(\mathbb{R}^n)$, u est la limite dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ des $u_\varepsilon = \tau_{\vec{\varepsilon}}\, u$ quand $\varepsilon \to 0$, avec $\vec{\varepsilon} = (0,..,0,\varepsilon)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq \varepsilon\}$, u_ε est la limite d'une suite (φ_p) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, donc $u_\varepsilon \in \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)} = H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$, et à la limite $u \in H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$. ∎

§5 LOCALISATION DES ESPACES DE SOBOLEV

Proposition: $\forall s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$: $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

Idée d'une preuve: On peut le prouver directement sur la définition de H^s. On peut aussi se ramener au cas $0 \leq s < 1$, comme à la fin du §3, les dérivations, et Π en particulier conservant $\mathcal{S}$, et alors utiliser le théorème de ce paragraphe (p.57): comme $\tau_x(\varphi u) - \varphi u = \varphi(\tau_x u - u) + \tau_x(\varphi u) - \varphi \tau_x u$, il vient $\|\varphi(\tau_x u - u)\|_{L^2} \leq \sup|\varphi|\, \|\tau_x u - u\|_{L^2}$, et

$\|\tau_x(\varphi u) - \varphi\tau_x u\|_{L^2} = \|\varphi u - (\tau_{-x}\varphi)u\|_{L^2} \leq \sup|\tau_{-x}\varphi - \varphi|\,\|u\|_{L^2} \leq \sup\|\vec{\partial}\varphi\|\,|x|\,\|u\|_{L^2}$

d'où $I_s(\varphi u) \leq (\sup|\varphi|)^2 I_s(u) + (\sup\|\vec{\partial}\varphi\|)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{|x|^{n+2s-2}} \cdot \|u\|^2_{L^2} < \infty$. ∎

Définition: Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\boxed{H^s_{loc}(\Omega)}$ ("espace de Sobolev local") l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (prolongée par 0).

Proposition: Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi(x_0) \neq 0$ telle que $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H^s_{loc}(\Omega)$.

Preuve: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $K = \operatorname{supp}\varphi$. Pour chaque $x_0 \in K$ choisissons $\varphi_{x_0} \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_{x_0}(x_0) \neq 0$ et $\varphi_{x_0} u \in H^s$. Si $U_{x_0} = \{x \in \Omega \mid \varphi_{x_0}(x) \neq 0\}$, les U_{x_0} forment un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un recouvrement fini $(U_j = U_{x_j})_{j=1,..,p}$. Soit α_j une partition de l'unité associée: $\alpha_j \in \mathcal{D}(U_j)$, et $\sum \alpha_j \equiv 1$ au voisinage de K. Alors $\varphi u = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\frac{\alpha_j \varphi}{\varphi_j}\right)}_{\in \mathcal{D}} \underbrace{(\varphi_j u)}_{\in H^s} \in H^s$ par la proposition précédente. ∎

Remarque: Grâce à ces deux propositions et à l'existence de partitions de l'unité, on peut étendre l'opérateur Π du §3 en une bijection linéaire de $H^s_{loc}(\Omega)$ sur $H^{s-2}_{loc}(\Omega)$. Les espaces de Sobolev locaux forment donc une échelle continue de fonctions-distributions de plus en plus régulières quand s croît. En particulier, on peut vérifier que

$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{loc}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ et $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_{loc}(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$ (distributions d'ordre fini).

Ces espaces sont aussi "intrinsèques" (indépendants des coordonnées):

Proposition: Soit $\chi : \Omega \to \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $\chi_*(H^s_{loc}(\Omega)) = H^s_{loc}(\Omega')$.

Idée d'une preuve: On peut encore se ramener au cas $0\leq s<1$ par les idées de la fin du §3, et utiliser le même théorème. Par les propositions précédentes, il suffit de montrer que $\chi_* u \in H^s_{loc}(\Omega')$ lorsque $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, supp $u \Subset \Omega$ (et donc supp $\chi_* u \Subset \Omega'$). Le jacobien de χ étant borné sur supp u, on conclut par le théorème du §3 et la formule de changement de variable. ∎

Ceci permet de définir $H^s_{loc}(V)$, où V est n'importe quelle variété différentiable, même avec bord.
Si de plus V est compacte, avec ou sans bord, on pourra la recouvrir par un nombre fini de cartes, et en utilisant une partition de l'unité associée à ce recouvrement, (α_j), définir une norme sur $H^s_{loc}(V)$, par le produit scalaire $(u,v) = \sum (\alpha_j u, \alpha_j v)_s$. $H^s_{loc}(V)$ devient dans ce cas un espace de Hilbert $H^s(V)$, et changer de partition ne change sa norme qu'en une norme équivalente ; les opérateurs différentiels sont toujours continus, et on peut construire des isomorphismes "Π" de $H^s(V)$ sur $H^{s-2}(V)$ (qui sont des opérateurs elliptiques) ...

Nous considérerons en particulier le cas où $V=\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière Γ est une surface lisse, et qui localement est "d'un seul coté de son bord" Γ.

Utilisant des partitions de l'unité de $\overline{\Omega}$ localement finies, les propositions précédentes permettent de rendre "intrinsèques", c'est-à-dire de généraliser à Ω toutes les définitions, idées et résultats des paragraphes 3 et 4, qui traitaient le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, par exemple:

Dès que $s > m + \frac{n}{2}$, $H^s_{loc}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$, pour tout $m\in\mathbb{N}$. (§3, Prop(8))

et le théorème de trace (§4) devient (énoncé ici avec $p=1$):
Il existe un et un seul opérateur linéaire de $H^s_{loc}(\Omega) \xrightarrow{tr} H^{s-\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma)$ prolongeant la restriction à Γ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dès que $s>\frac{1}{2}$ qui est continu dès que ce sont des espaces de Hilbert (c'est-à-dire lorsque Ω est borné, donc $\overline{\Omega}$ compact - cf. ci dessus).

On laisse au lecteur le soin d'énoncer (et de démontrer!) la version "intrinsèque" du théorème de relèvement et de la dernière proposition du §4 : $H^m_0(\Omega) = \operatorname{Ker} tr$.

Enfin pour $m\in\mathbb{N}^*$ on peut encore (cf. §3, Propositions du (7)) redéfinir $H^m(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$ respectivement comme l'espace des distributions sur Ω dont toutes les dérivées d'ordre $\le m$ sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et comme l'espace de celles qui sont des combinaisons de dérivées d'ordre $\le m$ de fonctions de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Supposons Ω borné :

Si $T=\sum_{|\alpha|\le m}\partial^\alpha f_\alpha$, avec $f_\alpha\in\mathbb{L}^2(\Omega)$, on aura, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \Big|\sum_{|\alpha|\le m}\langle\partial^\alpha f_\alpha,\varphi\rangle\Big| \le \sum_{|\alpha|\le m}|\langle f_\alpha,\partial^\alpha\varphi\rangle| \le C^{te}\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha\varphi\|_{\mathbb{L}^2} \le C^{te}\|\varphi\|_{H^m(\Omega)}$$

ce qui permet d'étendre T en une forme linéaire continue sur $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}=H^m_0(\Omega)$, d'où une injection $H^{-m}(\Omega)\hookrightarrow(H^m_0(\Omega))'$ (ce sont des Hilbert)

Inversement si $T\in(H^m_0(\Omega))'$, et pour $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$|\langle T,\varphi\rangle| \le \|T\|_{op}.\|\varphi\|_m = \|T\|_{op}\Big(\sum_{|\alpha|\le m}\Big(\int_\Omega|\partial^\alpha\varphi|^2dx\Big)^{1/2}\Big)$$

$$\le \|T\|_{op}.v(\Omega)\Big(\sum_{|\alpha|\le m}\sup|\partial^\alpha\varphi|\Big)$$ dès que le volume $v(\Omega)$ de Ω est fini,

d'où une inclusion naturelle $(H^m_0(\Omega))'\hookrightarrow\mathcal{D}'(\Omega)$ dont l'image contient a priori $H^{-m}(\Omega)$; on admettra ici la

Proposition : Pour $m\in\mathbb{N}^*$ et Ω borné : $H^{-m}(\Omega)\simeq(H^m_0(\Omega))'$

(Même pour $m=0$, mais dans ce cas $H^{-m}(\Omega)=H^m_0(\Omega)=H^m(\Omega)=\mathbb{L}^2(\Omega)$!)

§6 LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Remarques préliminaires : Les équations aux dérivées partielles, même linéaires, et même à coefficients et second membre réguliers, n'ont pas toujours de solutions, même distributions, et même localement au voisinage d'un point : l'exemple le plus célèbre est l'équation de Hans Léwy sur $\mathbb{R}^3$: $L=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}+ix\frac{\partial}{\partial z}$, pour laquelle on peut démontrer :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\varphi\in\mathcal{D}(B(0,\varepsilon))\ \forall u\in\mathcal{D}'(B(0,\varepsilon))\quad Lu\ne\varphi$$

On dit que L n'est "pas localement résoluble" (par contre tout o.d.l. à coefficients constants est localement résoluble ...)

Mais celles qu'on rencontre en pratique ont toujours de "grosses" infinités de solutions, et pour isoler une solution "intéressante" (celle qui a un "sens physique" par exemple) on rajoute à l'équation des conditions que doit vérifier la solution cherchée. Il y en a essentiellement de deux types, éventuellement mélangés ("problèmes mixtes") :

- un "Problème au bord" : $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega=\Gamma$, on cherche u telle que

$$\begin{cases}Pu=f & \text{dans } \Omega \ (f \text{ donnée, } P \text{ o.d. linéaire ou non})\\ u|_\Gamma=g & (g \text{ donnée})\end{cases}$$

C'est le "problème de Dirichlet" (1805-1859) qu'on va traiter ici. Au lieu de $u|_\Gamma$, on peut s'imposer la valeur sur Γ d'une ou plusieurs dérivées de u ("problème de Neuman", ...)

– un "Problème à données initiales" : l'équation dépend d'une variable de plus, (le "temps") et on s'impose la valeur de la solution (ou de certaines de ses dérivées) au temps $t=0$ (donc sur un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$). L'exemple-type de ces problèmes est appelé "problème de Cauchy" (1789-1857), et c'est l'objet des chapitres suivants.

Comme les dates données le montrent, les théorèmes cités ici ne sont que l'habillage moderne (et assez efficace) de résultats souvent plus anciens, d'un siècle au moins !

On considère ici un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est une hypersurface lisse compacte, dont le complémentaire a deux composantes connexes : Ω est donc la composante "intérieure" (bornée).

On se donne une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, une autre $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (Γ est une variété compacte), et on cherche les distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que : $\boxed{\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ et } u|_\Gamma = g}$

C'est le problème de Dirichlet classique. Le théorème de trace du § 5 permet de donner un sens précis à $u|_\Gamma$ dès que $u \in H^s(\Omega)$ avec $s > \frac{1}{2}$. Si par exemple $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, et $u|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$. Comme $\overline{\Omega}$ et Γ sont compacts, tous les résultats du § 5 s'appliquent pleinement : les opérateurs de trace et de relèvement sont continus. Le problème admet alors une solution et une seule :

Théorème : $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, $\forall g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\exists 1$ $u \in H^1(\Omega)$, $\Delta u = f$ et $u|_\Gamma = g$.
De plus il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω telle que :
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right)$$

Preuve : Traitons d'abord le cas particulier où $g=0$. Dans ce cas, si $u \in H^1(\Omega)$ est solution, on a $u|_\Gamma = 0$, donc $u \in H^1_0(\Omega)$. Or on peut trouver $C_1 > 0$ tel que,
$$(*) \quad \forall u \in H^1_0(\Omega) \qquad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

En effet, par densité, il suffit de prouver (*) pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, or pour un tel u (prolongé à $\mathbb{R}^n$ par $\{0\}$) $\operatorname{supp} u \subset [a,b]^n$, pour certains a, b ne dépendant que de l'ouvert borné Ω, et, par exemple, $u(x) = \int_a^{x_n} \partial_n u(y,t)\,dt$ (on note $x = (y, x_n)$), d'où par Cauchy-Schwarz :
$$|u(x)|^2 \leq \left| \int_a^{x_n} \partial_n u(y,t)\,dt \right|^2 \leq (x_n - a) \int_a^{x_n} |\partial_n u(y,t)|^2 dt \leq (x_n - a) \int_a^b |\partial_n u(y,t)|^2 dt.$$
Intégrant en x : $\int |u(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int |\partial_n u(y,t)|^2 dt\,dy \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|\partial_n u\|^2_{L^2(\Omega)}$, d'où (*).

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
$$-\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \bar{u}\, \partial_j \varphi \right) dx = \int_\Omega (\Delta \bar{u}) \varphi\, dx = \langle \Delta \bar{u}, \varphi \rangle = \langle \bar{f}, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}', \mathcal{D})} = (\varphi, f)_{\pm 1} \quad (\text{cf. § 3, rem. (6)}).$$
L'application $(v, w) \mapsto \overset{B}{\int_\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \bar{w}\, \partial_j v \right) dx$ est une forme sesquilinéaire sur $H^1_0(\Omega)$, définie positive d'après (*) (puisque $(v,v) = 0 \Rightarrow \sum_j \|\partial_j v\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow v = 0$), donc un produit scalaire. Par le théorème de Riesz, il existe donc un seul $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, $(v, f) = B(v, u)$; pour $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors $\langle \varphi, \bar{f} \rangle = \langle \varphi, \overline{\Delta u} \rangle$, d'où $\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc dans $H^1_0(\Omega)$. De plus, en

identifiant $(H_0^1(\Omega))'$ à $H^{-1}(\Omega)$ (dernière proposition du §5), $\|u\|_{H^1} \leq C^{ste}\|f\|_{H^{-1}}$, la constante ne dépendant que de cette identification (donc de Ω).

Si l'on se pose maintenant le problème général ($\Delta u = f$, $u|_\Gamma = g$), l'opérateur de relèvement $R : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ est continu, et si $v = Rg$, on a donc $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C^{ste}\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. De plus $\Delta v \in H^{-1}(\Omega)$

Soit w la solution trouvée ci-dessus au problème : $\Delta w = f - \Delta v$ et $w|_\Gamma = 0$, et posons $u = v + w$. On a $u \in H^1(\Omega)$ et $u|_\Gamma = v|_\Gamma + w|_\Gamma = g + 0 = g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

De plus
$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1} &\leq \|w\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq C^{ste}(\|f - \Delta v\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1})\\ &\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}} + \|\Delta v\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1})\\ &\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}} + \|v\|_{H^1}) \quad \text{par continuité de } \Delta : H^1 \to H^{-1}\\ &\leq C^{ste}(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)})\end{aligned}$$

Enfin $\Delta u = \Delta v + \Delta w = \Delta v + f - \Delta v = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$, et l'unicité de cette solution résulte de ce que, si $\Delta u = 0$ et $u|_\Gamma = 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$, et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$0 = \langle -\Delta u, \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j u \, \partial_j \varphi = B(u, \varphi)$, donc par densité $B(u,u) = 0$, et $u = 0$ puisque B est définie positive sur $H_0^1(\Omega)$. ∎

<u>Remarques pour conclure</u> : Cet énoncé n'est que le modèle d'un grand nombre d'énoncés semblables concernant le problème de Dirichlet (ou d'autres problèmes "au bord") pour des opérateurs elliptiques :

— D'abord, utilisant la "régularité elliptique" de Δ (cf. §1) on peut le "raffiner" (comme beaucoup des suivants) en :

$$\forall s > \tfrac{1}{2}\ \exists C > 0, \forall f \in H^{s-2}(\Omega), \forall g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \exists 1\, u \in H^s(\Omega) : \Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ et } u|_\Gamma = g,$$
$$\text{et } \|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{s-2}(\Omega)} + \|g\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)})$$

— L'énoncé se généralise de façon évidente à un opérateur elliptique à coefficients constants $P(\partial) = \sum a_{ij}\partial_i\partial_j$ homogène de degré deux (la forme quadratique $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ étant définie positive), puisqu'il suffit de récrire la même preuve avec la forme sesquilinéaire
$$B(u,v) = -\sum_{i,j}\int_\Omega \tfrac{1}{2}a_{ij}(\partial_i u\, \partial_j \bar{v} + \partial_i v\, \partial_j \bar{u})\,dx$$

— La même méthode se généralise à des opérateurs à coefficients variables, de la forme $P(x,\partial)u = \sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \lambda u$, avec $\lambda \geq 0$ s'ils sont <u>uniformément elliptiques</u> dans Ω, c'est-à-dire
$$\exists C > 0\ \forall x \in \Omega\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\quad \left|\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \geq C|\xi|^2 \qquad (*)$$
(la forme B devient alors $-\sum\limits_{i,j}\int_\Omega \frac{1}{2}a_{ij}(x)(\partial_i u\,\partial_j\bar{v} + \partial_i v\,\partial_j\bar{u})\,dx + \lambda\int_\Omega u\bar{v}\,dx$)

L'intérêt d'avoir mis P sous cette forme est que, n'ayant plus à dériver les coefficients a_{ij} dans les intégrations par parties, on peut relaxer l'hypothèse $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, pourvu que les a_{ij} restent bornés, par exemple $C^0(\bar{\Omega})$.

— On peut aussi rajouter à P des termes de degré 1, tant qu'on garde l'ellipticité uniforme $(*)$ de sa partie de degré 2, et la positivité du terme constant $\lambda(x)$.

- Enfin l'énoncé se généralise à un opérateur de degré quelconque (mais pair) $2m$ à coefficients complexes : on dit que l'opérateur

$$(*)\quad P(x,\partial)u = \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}} (-1)^{|\alpha|}\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x)\left(\tfrac{1}{i}\partial_x\right)^\beta u(x)\right)$$

est uniformément elliptique dans un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ s'il existe des constantes $C, C'>0$ telles que pour $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\Big) \geqslant C|\xi|^{2m} \quad\text{et}\quad a_{00}(x)\geqslant C'$$

On a alors, par exemple le résultat suivant (cf. Dautray-Lions, volume 4, p. 1235), parmi les plus "généraux" :

Théorème. Soit Ω borné, d'un seul côté de son bord $\partial\Omega=\Gamma$ lisse. Soit P l'opérateur $(*)$. On suppose $a_{\alpha\beta}(x)\in C^0(\bar\Omega)$ pour $|\alpha|=|\beta|=m$, et $a_{\alpha\beta}\in\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ pour les autres. Alors pour toute donnée de $f\in H^{-m}(\Omega)$ et $g_j\in H^{m-j-\frac12}(\Gamma)$ $(j=0,\dots,m-1)$, il existe un et un seul $u\in H^m(\Omega)$ tel que $P(x,\partial)u=f$ dans Ω, et pour $j=0,\dots,m-1$, $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j u|_\Gamma = g_j$ ($\vec n$ est la normale extérieure)

Idée de la preuve : On relève d'abord les conditions aux limites g_j, par l'opérateur de relèvement R du §4 (Théorème p. 58, localisé au §5). $\exists v\in H^m(\Omega)$, $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j v|_\Gamma = g_j$ $(j=0,\dots,m-1)$. $u=v+w$ est solution du problème posé si et seulement si $w\in H^m(\Omega)$, $Pw=f-Pv\in H^{-m}(\Omega)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial\vec n}\right)^j w|_\Gamma=0$ pour $0\le j\le m-1$, ce qui implique $w\in H^m_0(\Omega)$. On généralise, pour trouver w, le raisonnement fait ici pour Δ, à l'aide de la forme sesquilinéaire

$$B(u,v)=\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\left(\tfrac1i\partial_x\right)^\alpha u(x)\left(\tfrac1i\partial_x\right)^\beta v(x)\,dx \quad\text{sur } H^m_0(\Omega)^2,$$ qui

est "elliptique" en ce sens que $\mathrm{Re}\,B(u,u)\geqslant C^{te}\|u\|^2_m$ pour $u\in H^m_0(\Omega)$... ∎

§7 FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN ET PROBLÈME MIXTE

Le problème de Dirichlet "classique" se généralise en : pour $\lambda\in\mathbb{R}$, trouver u telle que $\Delta u-\lambda u=f$ dans Ω, et $u|_\Gamma=g$; tant que $\lambda\geqslant0$, la démonstration du §6 s'adapte (avec la forme $\lambda\int_\Omega u\bar v\,dx+\sum_{j=1}^n\partial_j u\,\overline{\partial_j v}\,dx$) et le résultat est le même : $\forall f\in H^{-1}(\Omega)$, $g\in H^{1/2}(\Gamma)$, $\exists 1\, u\in H^1(\Omega)$: $(\Delta-\lambda)u=f$ et $u|_\Gamma=g$. De plus l'opérateur $(f,g)\mapsto u$ est continu de $H^{-1}(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$ sur $H^1(\Omega)$, et $(\Delta-\lambda;\, 1_\Gamma)$ est donc un isomorphisme entre ces deux espaces ; d'ailleurs pour $\lambda>0$, $\lambda-\Delta$ a les mêmes propriétés que l'opérateur Π (§3, Rem. (5)), et on peut généraliser l'énoncé à un ouvert Ω, même non borné, par exemple $\mathbb{R}^n$.

Ces énoncés se "restreignent" aussi, par régularité elliptique : $\forall m\in\mathbb{N}^*$ $\forall f\in H^{m-2}(\Omega)$, $g\in H^{m-\frac12}(\Gamma)$, $\exists 1\, u\in H^m(\Omega)$: $(\Delta-\lambda)u=f$ et $u|_\Gamma=g$ et le "problème de Dirichlet" donne encore un isomorphisme entre $H^m(\Omega)$ et $H^{m-2}(\Omega)\times H^{m-1/2}(\Gamma)$, pour Ω borné, ou $\lambda>0$. Si $f\in C^\infty(\Omega)$ est C^∞ jusqu'au bord (c'est-à-dire prolongeable en fonction C^∞ au voisinage de $\bar\Omega$), et $g\in C^\infty(\Gamma)$, la solution u sera aussi C^∞ jusqu'au bord (et même analytique dans Ω, puisque $\Delta-\lambda$ est hypoelliptique-analytique...)

En particulier pour $f=0$, on trouve ainsi des "fonctions propres" du laplacien dans Ω : pour toute valeur propre $\lambda\geq 0$, il y en a autant que de fonctions sur le bord, qui sont leurs traces sur Γ.

Mais ce qu'on appelle vraiment "fonctions propres du laplacien dans Ω", ce sont les $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $\Delta u=\lambda u$ et $u|_\Gamma=0$. On voit donc qu'il n'y en a aucune ($\neq 0$) de valeur propre $\lambda\geq 0$!

Par contre, pour $\lambda<0$, on peut démontrer (on ne le fera pas ici, c'est ce qu'on appelle la "théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints", qui généralise le fait bien connu qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée ...) que :

Il existe, pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ donné, une suite $(-\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, avec $\lambda_j>0$, et $\lambda_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ telle que

- si λ n'appartient pas à la suite, $\Delta-\lambda$ est bijectif de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$
- si $\lambda=-\lambda_j$, l'espace propre est de dimension finie $d_j\geq 1$
- la somme directe hilbertienne des espaces propres est $\mathbb{L}^2(\Omega)$

Cette "diagonalisation" de l'opérateur hermitien Δ permet une résolution du problème de Dirichlet "explicite" dans tout ouvert Ω pour lequel on sait "expliciter" les fonctions propres (par exemple un disque, un pavé, ...)

Remarque : Soit $-\lambda$ une valeur propre de Δ dans Ω, et $\varphi(x)$ une fonction propre associée. Alors :

- $F_1(t,x)=\varphi(x)e^{-\lambda t}$ est solution de l'équation "de la chaleur"
$$\partial_t F_1-\Delta F_1=0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$
- $F_2(t,x)=\varphi(x)e^{i\lambda t}$ est solution de l'équation "de Schrödinger"
$$\frac{1}{i}\partial_t F_2-\Delta F_2=0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$
- $F_3^\pm(t,x)=\varphi(x)e^{\pm i\sqrt{\lambda}t}$ est solution de l'équation "des ondes"
$$\partial_t^2 F_3^\pm-\Delta F_3^\pm=0 \quad \text{dans } [0,+\infty[\times\Omega$$

Cette remarque banale est la clef de la résolution du "problème mixte" (problème de Cauchy en temps, de Dirichlet en espace) pour ces opérateurs importants de la physique ; par exemple pour la chaleur :

$$(*)\quad \begin{cases} \partial_t u(t,x)-\Delta_x u(t,x)=0 & \text{dans } [0,\infty[\times\Omega \\ u(t,x)=0 & \text{sur } [0,\infty[\times\Gamma \\ u(0,x)=u_0(x) & \text{donnée dans } \Omega \end{cases}$$

On résout $(*)$ en décomposant u_0 dans une base de fonctions propres du laplacien : $u_0(x)=\sum_{k=1}^{d_j}\alpha_{jik}\,\varphi_{jik}(x)$ $\quad$ ((φ_{jik}) base de E_{λ_j})

et la solution est alors $\quad u(t,x)=\sum\alpha_{jik}\,\varphi_{jik}(x)e^{-\lambda_j t}$ ... !

On trouvera en exercice un exemple "facile" de cette situation (ex. 12)

(§8) THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1) Dans $\Omega = \{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+t^2<1\}$ on considère l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, avec la "condition initiale" $u(x,0) = u_0(x)$, donnée sur $]-1,1[$
Que faut-il supposer sur u_0 pour qu'il y ait une solution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$?
Montrer qu'elle est alors unique.

2) Formule de Green : Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de bord $\partial\Omega$ hypersurface lisse
a) Soit $f\in C^1(\bar\Omega)$, supp f compact dans $\bar\Omega$; montrer pour $1\le j\le n$
$\int_\Omega \partial_j f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(s)\nu_j(s)\,ds$ (ds est la mesure de surface de $\partial\Omega$, et $\vec\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ le vecteur normal unitaire extérieur — cf. ch I §7, ex: 26)
b) En déduire, pour $f,g\in C^1(\bar\Omega)$, l'une à support compact :
$\int_\Omega f\,\partial_j g\,dx = -\int_\Omega \partial_j f\cdot g\,dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu_j\,ds$
puis $\int_\Omega f\Delta\varphi\,dx = -\int_\Omega \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial\varphi}{\partial\vec\nu}\,ds$ ($\varphi\in C^2(\bar\Omega)$, l'une à support compact)
et la formule de Green : $\boxed{\int_\Omega (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\vec\nu} - \varphi\frac{\partial f}{\partial\vec\nu}\right)ds}$
c) Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation différentielle : $y''(r) + \frac{n-1}{r}y'(r) = 0$
En appliquant la formule de Green à $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x| = r > \varepsilon\}$, pour ε positif tendant vers 0, retrouver les solutions élémentaires du laplacien (pour tout n) des §1 et 2.

3) L'opérateur d'Helmholtz (en dimension 2) : $\Delta - \mu^2$, avec $\mu\in\mathbb{C}$, Re $\mu>0$.
a) Calculer la transformée de Fourier de $\frac{e^{-\mu r}}{r}$ (où $r = \sqrt{x^2+y^2}$)
En déduire que $E = -\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right)^{*2}$ est une solution élémentaire de $\Delta-\mu^2$
b) On suppose ici $\mu\in\mathbb{R}^+$ et on pose $F_\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\mu r \operatorname{ch}\varphi}\,d\varphi$ (pour $r>0$)
Montrer que $|F_\mu(r)| \le \frac{C}{r}$ pour un certain $C>0$ et tout $r\in\mathbb{R}^+$.
En déduire que $F_\mu\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.
c) Pour $\varepsilon>0$ on pose $S_\varepsilon(\xi,\eta) = \frac{-1}{(\rho^2+\mu^2)(\varepsilon^2\rho^2+1)}$, avec $\rho^2 = \xi^2+\eta^2$
Montrer que $S_\varepsilon \to \hat E$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ quand $\varepsilon\to 0$.
d) Calculer $\mathcal{F}^{-1}(S_\varepsilon)$ en fonction de F_μ et montrer que $\mathcal{F}^{-1}(S_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F_\mu$
En déduire que $E = (4\pi)^2 F_\mu$

4) Pour quels $s\in\mathbb{R}$ les distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles dans $H^s(\mathbb{R})$?
1, $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$, $\chi_{[a,b]}$, H, δ, $\delta^{(p)}$, $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$, $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^n}$. Et dans $H^s_{loc}(\mathbb{R})$?
(Montrer que si $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{\chi\cdot \mathrm{vp}\frac{1}{x}}$ tend vers $-i\pi^2\chi(0)$ à l'infini)
Et pour $\mathrm{Pf}\,\frac{\mathrm{Tg}\,x}{x^2}$??

5) En utilisant l'homogénéité (cf. ch III, §8, ex. 7), montrer que la distribution tempérée $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est une fonction propre de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ (et plus généralement $|x|^{-\frac{n}{2}}$ sur $\mathbb{R}^n$). Calculer la valeur propre
Dans quels espaces H^s se situent les fonctions $|x|^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) ?

6) Soit $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ d'ordre $\le k$. Montrer que $T\in H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s<-\frac{n}{2}-k$
En déduire que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\subset\bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$

7) En utilisant les espaces de Sobolev locaux, prouver le <u>théorème</u> suivant :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p_x\times\mathbb{R}^q_y$ et $f : U\to\mathbb{C}$, de classe C^∞ séparément en x et y, et dont toutes les dérivées $\partial_x^\alpha f$ et $\partial_y^\beta f$ ($\alpha\in\mathbb{N}^p$, $\beta\in\mathbb{N}^q$) sont bornées sur les compacts de U. Alors $f\in C^\infty(U)$.

8) Généraliser la proposition du §1 (p. 52) à un opérateur P à coefficients constants, mais non nécessairement homogène.

9) <u>Sur l'hypoellipticité</u> : Soit $P(\partial)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha$ un o.d.l. à coefficients constants qui vérifie

(C) $\exists C>0, R>0, a>0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ |\xi|>R, \forall\beta\in\mathbb{N}^n : |P^{(\beta)}(i\xi)|(1+|\xi|^2)^{a/2}\le C|P(i\xi)|$

On veut démontrer que P est hypoelliptique.
Soit (K_p) une suite exhaustive de compacts d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et $\Omega'=\overset{\circ}{K_0}\neq\emptyset$, et $(\varphi_p)\in\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_p\equiv 1$ sur K_p. On se donne $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ et $s\in\mathbb{R}$

a) Trouver $t\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi_0 u\in H^t(\mathbb{R}^n)$ et pour $\beta\neq 0$ $P^{(\beta)}(\partial)(\varphi_0 u)\in H^{t-(m-1)}(\mathbb{R}^n)$

b) En développant $P(\partial)(\varphi_p(\varphi_{p-1}u))$ par la formule de Leibniz, montrer par récurrence que $P^{(\beta)}(\varphi_p u)$ est dans $H^{t-(m-1)+ap}(\mathbb{R}^n)$ pour $\beta\neq 0$

c) En déduire que $u\in H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$; puis conclure.

d) Montrer que tout opérateur elliptique vérifie (C).

e) Montrer que l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$ vérifie (C)

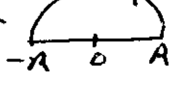
f) Montrer que ni l'opérateur de Schrödinger $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$, ni l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ ne vérifient (C).

10) <u>L'opérateur Π^{-1} en dimension 1</u>
(On rappelle que $\Pi=1-\Delta$ est un isomorphisme de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s\in\mathbb{R}$; on note Π^{-1} son inverse ; en dimension $n=1$, $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}$).

a) Soit E_1 la distribution associée à la fonction $x\mapsto\frac{e^{-|x|}}{2}$.
Calculer $\widehat{E_1}$ et en déduire ΠE_1. Retrouver ΠE_1 par la formule des sauts.

b) Pour quels $s\in\mathbb{R}$ a-t-on $\delta\in H^s(\mathbb{R})$? En déduire que pour tout entier $p>0$ $E_p=E_1^{*p}$ est une fonction de classe C^{2p-2}

c) Montrer que, pour tout entier $p>0$, $\Pi^{-p} : H^s\to H^{s+2p}$ est l'opérateur de convolution par E_p.

d) Calculer pour tout entier $p>0$, la transformée de Fourier de la fonction $F_p(\xi)=\frac{1}{(1+\xi^2)^p}$ (Utiliser le calcul des résidus, en intégrant la fonction $\frac{e^{-ix\xi}}{(1+\xi^2)^p}$ en ξ, pour $x<0$, sur le contour 

)

e) En déduire l'expression explicite de la fonction E_p, pour tout $p>0$.

11) Le problème de Dirichlet dans le disque

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$, $\Gamma = \partial\Omega$. On se donne f continue sur Γ.

On veut calculer $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\Delta u = 0$ dans Ω et $u|_\Gamma = f$

a) Montrer que $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$ en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

b) Pour tout $r \in]0,1[$, on développe $u(r,\cdot)$ en série de Fourier : $u(r,\theta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(r)\, e^{ip\theta}$

Montrer que $c_p \in C^\infty(]0,1[)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, et que

$\Delta u = 0$ dans $\Omega \iff$ (*) $\forall p\in\mathbb{Z},\ r\in]0,1[\quad c_p''(r) + \frac{1}{r}c_p'(r) - \frac{p^2}{r^2}c_p(r) \equiv 0$

c) Par le changement de variable $r = e^{-t}$, intégrer les équations différentielles (*), puis sélectionner les solutions telles que $u \in C^\infty(\Omega)$

En déduire que $u(r,\theta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\, r^{|p|} e^{ip\theta}$, où les $c_p(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

d) On pose, pour $r\in[0,1[$ $\quad P_r(\theta) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} r^{|p|} e^{ip\theta}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} P_r(\theta) = 2\pi$.

Expliciter $P_r(\theta)$, puis montrer que $u(r,\theta) = P_r(\theta) * f(\theta)$

e) Montrer que $P_r * P_s = P_{rs}$. Montrer que $u(r,\cdot) \xrightarrow[r\to 1]{} f$ uniformément

f) L'"énergie" de la solution est le nombre $E = \iint_\Omega ((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)\,dx\,dy$.

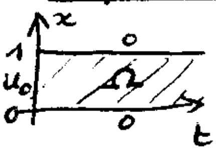
Montrer que $E = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |p|\,|c_p(f)|^2$

En supposant que $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$, montrer que $\iint_\Omega |u(x,y)|^2 dx\,dy \leq \frac{E}{4}$

g) Calculer u pour $f(\theta) = \cos^3\theta$

h) Que reste-t-il de vrai de tout cela, si l'on suppose seulement $f\in L^2(\Gamma)$? $f\in\mathcal{D}'(\Gamma)$?

12) Un problème mixte de type "chaleur"



On cherche $u(t,x)$ solution de $\partial_t u + c\partial_x u - \mu\partial_x^2 u = 0$ ($\mu \neq 0$) dans $\Omega = \{(t,x) \mid t>0 \text{ et } 0<x<1\}$ et les conditions "mixtes" : "initiale" $u(0,x) = u_0(x)$ donnée ; "au bord" $u(t,0) = u(t,1) = 0$

a) Montrer l'existence d'une suite (λ_k) de valeurs de λ pour lesquelles le "problème de Dirichlet" $c\partial_x v - \mu\partial_x^2 v - \lambda v = 0$ et $v(0) = v(1) = 0$ admet des solutions non nulles. Montrer qu'une telle solution s'écrit $u_k(x) = e^{\frac{c}{2\mu}x}\sin k\pi x$, pour $\lambda_k = \frac{c^2}{4\mu} + \mu\pi^2 k^2$ $(k = 1,2,\dots)$

b) Développer $u_0(x)\,e^{\frac{-cx}{2\mu}}$ en série de Fourier

c) En déduire que $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, e^{-(\frac{c^2}{4\mu} + \mu k^2\pi^2)t + \frac{c}{2\mu}x} \sin k\pi x$

pour des constantes (C_k) que l'on précisera, ainsi que le type de convergence de cette série en fonction de la régularité de la donnée initiale u_0.