

PUblications
PÉdagogiques

**LE PLAN HYPERBOLIQUE À PIED,
PUIS UN BOND DANS L'ESPACE**

André CEREZO

Prépublication n° 10

Avril 1991

LE PLAN HYPERBOLIQUE À PIED, PUIS UN BOND DANS L'ESPACE

André CERÉZO

I) LA DROITE ÉLASTIQUE

- A) Distance et Fatigue (page 1)
- B) Birapports (p. 2)
- C) Isométries (p. 5)

II) LE PLAN DE LOBACHEVSKI: MODÈLE DE KLEIN

- A) Le plan de Lobachevski (p. 7)
- B) Non-conformité (p. 9)

III) LES MODÈLES CONFORMES

- A) L'hémisphère, et le disque de Poincaré (p. 11)
- B) Le demi-plan de Poincaré (p. 14)
- C) L'hyperboloïde relativiste (p. 15)

IV) GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

- A) Cercles et médiatrices (p. 17)
- B) Le groupe des isométries (p. 20)
- C) Classification des isométries (p. 22)
- D) Faisceaux de géodésiques (p. 25)
- E) Au delà du miroir (p. 28)

V) TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

- A) Les trois relations fondamentales (p. 31)
- B) Les angles et l'aire des polygones (p. 33)
- C) Quelques questions imprudentes (p. 38)

VI) UN BOND DANS L'ESPACE

- A) L'espace de Lobachevski (p. 39)
 - B) Le point de vue de Möbius (p. 41)
 - C) Le corps des quaternions (p. 44)
 - D) Isométries de l'espace (p. 45)
-

La géométrie non-euclidienne de Lobachevski (géométrie hyperbolique) est un vieux sujet classique, peu souvent enseigné. La littérature est immense, mais ancienne, et donc d'accès et d'abord malaisés.

Il s'agit ici d'un texte d'initiation, facile à lire, mais qui ne fait qu'effleurer le sujet.

Le livre récent de Werner Fenchel, "Elementary Geometry in Hyperbolic Space" (de Gruyter, Berlin 1989), est évidemment beaucoup plus complet, en particulier en trigonométrie. Mais son point de vue très algébrique (tout se ramène à des calculs d'algèbre linéaire) laisse peu de place à l'intuition.

Une étude assez poussée des groupes fuchsien est le sujet principal du livre d'Alan F. Beardon, "The Geometry of Discrete Groups" (Springer, 1983), beaucoup plus imagé que le précédent.

L'article de John Milnor "Hyperbolic Geometry: the first 150 years" est un trop rapide survol historique de la théorie, qui se clôt sur des développements récents et des problèmes ouverts, suivis d'une longue liste de références historiques (Bulletin of the AMS, 6 (1982), p. 9-24).

Par ce texte élémentaire, l'auteur espère faire partager sa joie de la découverte d'une théorie mathématique dont la beauté l'émeut, la richesse le ravit, la profondeur l'impressionne, et le pouvoir de description de l'univers le déconcerte.

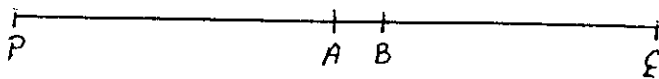
I) LA DROITE ÉLASTIQUE

A) DISTANCE ET FATIGUE

Considérer que la différence entre 1001 et 1002 est la même qu'entre 1 et 2 est en vérité assez choquant: intuitivement la première devrait être environ mille fois plus petite (tandis que celle entre 0 et 1 serait infinie)

Marcher vers l'horizon fatigue, et c'est pourquoi il nous paraît situé si désespérément loin à l'infini. Cette fatigue est en proportion de la distance déjà parcourue; autrement dit quand une petite étape nous paraît de longueur dx , c'est que sa longueur "réelle" est $\frac{dx}{x}$, et au total une "grande" distance parcourue n'est que le logarithme de ce qu'elle nous a paru.

Si A, B sont deux points voisins sur une droite limitée par des horizons P et Q (dans l'ordre P, A, B, Q), on peut évaluer la distance entre A et B en comparant leurs distances à l'horizon:



leurs distances à l'horizon:
 $AB = AQ - BQ$, ou par une

formule plus symétrique:

$$AB = \frac{1}{2} (AQ - BQ + BP - AP)$$

Mais si l'on tient compte de l'effet logarithmique qu'on vient de mentionner pour les "grandes" distances, la distance "vraie" entre A et B deviendra:

$$\begin{aligned} \delta(A, B) &= \frac{1}{2} (\log AQ - \log BQ + \log BP - \log AP) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{AQ}{AP} \cdot \frac{BP}{BQ} \end{aligned}$$

Soit:

$$\delta(A, B) = \frac{1}{2} \log (A, B, Q, P)$$

où $(A, B, Q, P) = \frac{AQ}{AP} \cdot \frac{BP}{BQ}$ est le birapport des quatre points dans cet ordre (qui assure qu'il est plus grand que 1), qui mesure la distance de A à B "multiplicativement", c'est-à-dire par le rapport des rapports dans lesquels A et B divisent la droite d'un horizon à l'autre.

Comme un birapport est invariant par translation et par homothétie, on peut affecter aux horizons les coordonnées -1 et 1 , et constater alors que δ n'est autre que la distance euclidienne habituelle transportée de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ par l'homéomorphisme

$x \mapsto u = \text{Th}x$, puisque pour $x > y$ et $u = \text{Th}x > \text{Th}y = v$, on a :

$$\begin{aligned} \delta(u, v) &= \frac{1}{2} \text{Log}(v, u, 1, -1) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1-v}{1+v} \cdot \frac{1+u}{1-u}\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1-\text{Th}y}{1+\text{Th}y} \cdot \frac{1+\text{Th}x}{1-\text{Th}x}\right) = \frac{1}{2} \text{Log}(e^{-2y} e^{2x}) = x - y. \end{aligned}$$

autrement dit $\delta(u, v) = \text{ArgTh}u - \text{ArgTh}v$.

Plus généralement, la "distance hyperbolique" δ entre deux points A et B sur une droite d'horizons P et Q est transportée de la distance euclidienne de $\mathbb{R}$ par l'homéomorphisme de "barycentrage" :

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \frac{P+Q}{2} + \frac{Q-P}{2} \cdot \text{Th}x = \frac{e^{-x}P + e^xQ}{e^{-x} + e^x} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow &]P, Q[\end{array}$$

Si $u \in]-1, 1[$ par exemple et $h > 0$ est petit, on a en particulier

$$\delta(u, u+h) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1-u}{1+u} \cdot \frac{1+u+h}{1-u-h}\right) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1+\frac{h}{1+u}}{1-\frac{h}{1-u}}\right) \sim \frac{1}{1-u^2} \cdot h$$

On retrouve donc la distance euclidienne dans un voisinage infiniment petit de l'origine, et le phénomène de "fatigue" quand on se rapproche d'un horizon : l'"élément de longueur" hyperbolique au point $u \in]-1, 1[$ est $\frac{du}{1-u^2} \sim \frac{du}{2(1-u)}$ quand $u \rightarrow \pm 1$.

B) BIRAPPORTS

Avant de poursuivre l'étude de la distance hyperbolique, il convient de rappeler les diverses notions de birapport qui nous seront utiles :

- Le birapport de quatre points distincts A, B, C, D d'une droite projective est leur "rapport de rapports de distances" défini dans la structure affine du complémentaire d'un cinquième point arbitraire de la droite par la formule.

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}$$

Comme $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1} = 1 - (A, C, B, D)$, il ne prend par permutations que 6 valeurs, qui sont des nombres différents de 0 et 1.

En particulier $(\infty, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}$ est le rapport dans lequel "B divise le segment CD".

Les homographies de la droite projective sont précisément les bijections qui conservent le birapport. Si D est le point de coordonnée homogène x dans le repère $\{A, B, C\}$ de la droite, on a

$$(A, B, C, D) = (co, 0, 1, x) = x$$

et le birapport de quatre points distincts de coordonnées a, b, c, d

$$\text{s'écrit : } (a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

- En particulier, on dit que les quatre points forment une division harmonique si les deux premiers "divisent le segment des deux autres dans le même rapport", c'est-à-dire $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} = -\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$, ou encore $(A, B, C, D) = -1$.

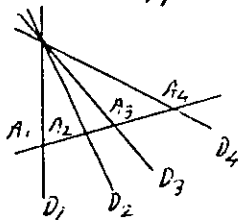
Il est clair que $\{A, B\}$ d'une part, $\{C, D\}$ d'autre part, jouent ici des rôles symétriques, de même que les paires $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$. De plus cette notion généralise les notions classiques de moyenne:

$$(a, b, c, d) = -1 \Leftrightarrow b = \frac{c+d}{2} \quad (\text{moyenne "arithmétique"})$$

$$(0, b, c, d) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad (\text{moyenne "harmonique"})$$

$$(a, -a, c, d) = -1 \Leftrightarrow a^2 = cd \quad (\text{moyenne "géométrique"})$$

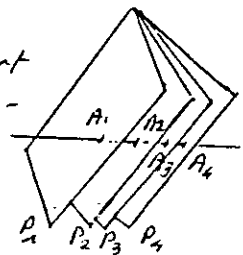
- Le birapport de quatre droites concourantes d'un plan projectif peut se définir par dualité (ce sont quatre points alignés dans le plan projectif dual); mais il se lit aussi sur n'importe quelle autre droite ne passant pas par le point commun:



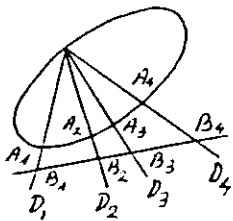
$$(D_1, D_2, D_3, D_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$$

Il en est de même pour le birapport de quatre plans d'un espace projectif (de dimension 3) concourants sur une droite:

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$$



- Toujours dans le plan projectif, le birapport de quatre points d'une conique propre se définit par perspective à partir de n'importe quel autre point de la conique, sur n'importe quelle droite n'y passant pas:



$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (D_1, D_2, D_3, D_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

Toutes ces notions de birapports sont invariantes par homographies (de la droite, du plan, de l'espace, de la conique).

- Le plan réel euclidien peut se compléter de deux façons:

- en le plongeant dans son complété projectif (réel), ce qui lui rajoute une droite à l'infini
- en l'identifiant d'abord à une droite affine complexe (par le choix d'une base orthonormée directe à translations près), puis en plongeant celle-ci dans sa complété projective (complexe), ce qui lui rajoute un seul point à l'infini, noté ∞ .

Le choix d'une origine l'identifie alors à la "sphère de Riemann" $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et le birapport de quatre points distincts de $\mathbb{C}$ est alors celui de quatre points d'une droite projective (complexe):

$$(x, y, z, d) = \frac{x-y}{x-d} \cdot \frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma} \quad \text{qui est un nombre complexe distinct de 0 et 1.}$$

Comme son argument est la différence d'angles $(\vec{r}_x, \vec{r}_y) - (\vec{r}_x, \vec{r}_\beta)$, le birapport (x, y, z, d) est réel si et seulement si les quatre points sont

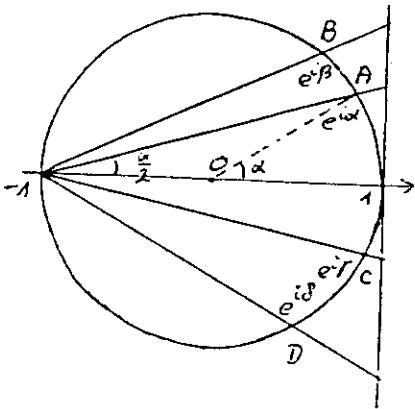
cocycliques (ou alignés) ; par le théorème des angles inscrits.

Le birapport de quatre éléments de $\bar{\mathbb{C}}$ est donc invariant par les homographies de cette droite projective complexe, c'est-à-dire toutes les transformations de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$.

Par contre les "antihomographies", composées de celles-ci avec $z \mapsto \bar{z}$ ou toute autre réflexion par rapport à une droite (réelle), conjuguent le birapport, les deux ont donc la propriété de conserver sa réalité, c'est-à-dire la cocyclicité (ou alignement réel) de quatre points de $\bar{\mathbb{C}}$, et l'on peut démontrer la réciproque: toute bijection de $\bar{\mathbb{C}}$ qui conserve la cocyclicité (les droites étant les cercles passant par ∞) est une homographie ou antihomographie.

Dès qu'on rencontre sur un cercle quatre points dans l'ordre A, B, C, D , (A, B, C, D) est supérieur à 1: c'est en effet clair pour quatre points D, A, B, C , dans cet ordre sur une droite, puisqu'alors $AC > BC$ et $BD > AD$ (Cette remarque vaut d'ailleurs aussi pour le birapport de quatre points d'une conique propre).

— Soient maintenant A, B, C, D quatre points cocycliques du plan affine euclidien, identifié comme ci-dessus à $\mathbb{C}$:



leur birapport en tant que nombres complexes est égal à leur birapport en tant que points d'une conique propre.

Preuve: après une similitude qui conserve les deux, on peut supposer que $A = e^{i\alpha}$, $B = e^{i\beta}$, $C = e^{i\gamma}$, $D = e^{i\delta}$, avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$; si l'on évalue le second à partir du point -1 du cercle-unité, il s'agit alors de vérifier que $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = (Tg \frac{\alpha}{2}, Tg \frac{\beta}{2}, Tg \frac{\gamma}{2}, Tg \frac{\delta}{2})$,

autrement dit que l'application $t = Tg \frac{\alpha}{2} \mapsto e^{i\alpha} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}$ conserve le birapport; mais

$t \mapsto \frac{1-t^2+2it}{1+t^2} = \frac{1+it}{1-it}$ est une homographie de $\bar{\mathbb{C}}$, d'où la conclusion. ■

— Par contre une perspective à partir du centre ne conserve pas le birapport: $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}) \neq (Tg \alpha, Tg \beta, Tg \gamma, Tg \delta)$.

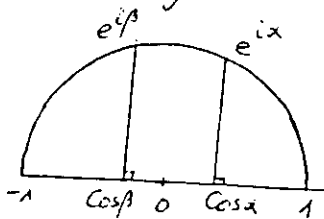
Il s'agit là en effet de l'application $Tg \frac{\alpha}{2} \mapsto Tg \alpha$, soit $t \mapsto \frac{2t}{1-t^2}$, dont l'influence sur le birapport peut s'étudier après avoir remarqué que

$$(t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2) = \frac{t_1^2 - t_3^2}{t_1^2 - t_4^2} \cdot \frac{t_2^2 - t_4^2}{t_2^2 - t_3^2} = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4} \cdot \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3} \cdot \frac{t_1 + t_3}{t_1 + t_4} \cdot \frac{t_2 + t_4}{t_2 + t_3}$$

$$= (t_1, t_2, t_3, t_4)(t_1, t_2, -t_3, -t_4), \text{ par exemple, et que}$$

$$t' = \frac{2t}{1-t^2} \iff \left(\frac{1+it}{1-it} \right)^2 = \frac{1+it'}{1-it'}$$

— Envisageons enfin le cas de la projection orthogonale d'un cercle sur un de ses diamètres; on peut supposer qu'il s'agit du cercle-unité de $\mathbb{C}$; comme



$$(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = (Tg \frac{\alpha}{2}, Tg \frac{\beta}{2}, Tg \frac{\gamma}{2}, Tg \frac{\delta}{2})$$

tout revient à étudier l'influence sur le birapport

de l'application $Tg \frac{\alpha}{2} = t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos \alpha$, et comme $u \mapsto \frac{1-u}{1+u}$ est une homographie, on est ramené au calcul précédent. Ainsi par exemple $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, 1, -1) = (Tg \frac{\alpha}{2}, Tg \frac{\beta}{2}, 0, \infty) = \frac{Tg \frac{\alpha}{2}}{Tg \frac{\beta}{2}}$, tandis que $(\cos \alpha, \cos \beta, 1, -1) = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1} \cdot \frac{\cos \beta + 1}{\cos \beta - 1} = \frac{(Tg \frac{\alpha}{2})^2}{(Tg \frac{\beta}{2})^2}$

et notons le résultat : $(\cos \alpha, \cos \beta, 1, -1) = (e^{i\alpha}, e^{i\beta}, 1, -1)^2$

C) ISOMÉTRIES

Les isométries d'une droite élastique (c'est-à-dire munie de la distance hyperbolique δ) se déduisent sans peine de celles de la droite euclidienne, puisque δ est l'image de la distance euclidienne (par $x \mapsto u = Th x$, si l'on affecte les horizons des coordonnées -1 et 1): ce sont des bijections monotones de $] -1, 1[$, provenant d'une isométrie de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire d'une translation $x \mapsto x + a$ si elle est directe, ou d'une symétrie par rapport à un point $x \mapsto a - x$ si elle est indirecte; comme $Th(x+y) = \frac{Th x + Th y}{1 + Th x Th y}$, on en a donc de deux sortes:

- celles qui conservent les horizons (croissantes, directes) sont de la forme

$$u \mapsto \frac{u + u_0}{1 + u_0 u} \quad (\text{pour } u_0 \in] -1, 1[\text{ quelconque})$$

- celles qui échangent les horizons (décroissantes, indirectes):

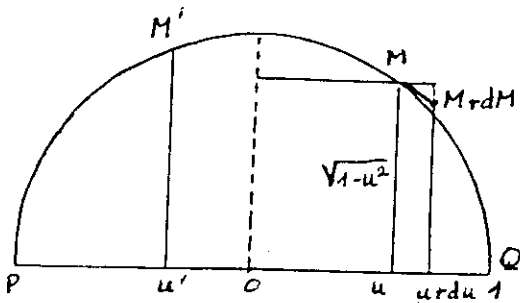
$$u \mapsto \frac{u_0 - u}{1 - u_0 u} \quad (\text{aussi pour tout } u_0 \in] -1, 1[)$$

τ_{u_0} est la restriction à $] -1, 1[$ de l'homographie de toute la droite projective $\overline{\mathbb{R}}$ de points fixes 1 et -1 , et de birapport e^{2x_0} , si $Th x_0 = u_0$. (c'est-à-dire que $(u, \tau_{u_0}(u), 1, -1) = \frac{1+u_0}{1-u_0} = e^{2x_0}$), et $\sigma_{u_0} = \tau_{u_0} \circ \rho$, où ρ est la réflexion par rapport à l'origine $u \mapsto -u$.

Plus généralement (cf. page 2), on en déduit que si A et A_0 sont deux points d'une droite élastique d'horizons P et Q , si A est le barycentre de P et Q à poids λ et μ et A_0 leur barycentre à poids λ_0 et μ_0 , alors $\tau_{A_0}(A)$ est leur barycentre à poids $\lambda \lambda_0$ et $\mu \mu_0$, et $\sigma_{A_0}(A)$ leur barycentre à poids $\mu \lambda_0$ et $\lambda \mu_0$.

Remarquons aussi que la valeur absolue du déterminant de la matrice des homographies ci-dessus est $1 - u_0^2$, confirmant que l'"élément de longueur" hyperbolique sur $] -1, 1[$ est $\frac{du}{1-u^2}$. Ceci donne l'idée d'une autre interprétation de la droite élastique, comme un demi-cercle: en relevant en effet verticalement les points de $] -1, 1[$ sur un demi-cercle de diamètre $] -1, 1[$, deux points voisins u et

$u+du$ se relèvent en M et $M+dM$, distants de $dH = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$;



dans ce nouveau modèle de la droite élastique, comme demi-cercle PQ , ensemble des points d'angle polaire θ ($0 < \theta < \pi$), l'élément de longueur devient donc $\frac{d\theta}{\sin \theta}$;

tandis que la distance hyperbolique devient :

$$\delta(M, M') = |\text{Log}(M, M', Q, P)|$$

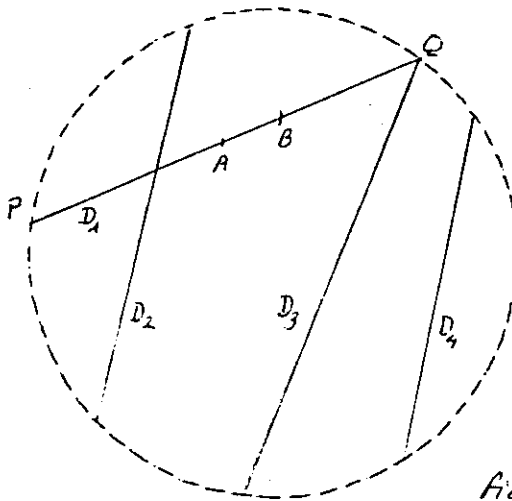
Preuve: Si $M = e^{i\theta}$, $M' = e^{i\theta'}$ se projettent sur $] -1, 1[$ en $u = \cos \theta$, $u' = \cos \theta'$, il vient :

$$\begin{aligned} \delta(M, M') &= \delta(u, u') = \frac{1}{2} |\text{Log}(\cos \theta, \cos \theta', 1, -1)| \\ &= |\text{Log}(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, 1, -1)| \text{ d'après la fin du § B. } \blacksquare \end{aligned}$$

II) LE PLAN DE LOBACHEVSKI : MODÈLE DE KLEIN

A) LE PLAN DE LOBACHEVSKI

Le plan de Lobachewski est un plan dont toutes les droites sont élastiques; il est donc limité par un horizon, ensemble des points qui sont à l'horizon



sur chaque demi-droite (formant une sorte de grand cercle très éloigné), et quand on va en ligne droite vers l'horizon, c'est sur une droite élastique qu'en se déplace, autrement dit la distance entre deux points A et B du plan est hyperbolique:

$$\delta(A, B) = \frac{1}{2} \log (A, B, Q, P)$$

où P et Q sont les points à l'horizon en regardant B de A et A de B.

Pour deux droites de ce plan, trois cas de figure sont possibles (autre leur confusion):

- elles se coupent, "à distance finie", comme D_1 et D_2 , en un seul point.
- elles se coupent "à l'infini", c'est-à-dire que l'un de leurs horizons est commun, comme D_2 et D_3
- elles n'ont aucun point ni horizon commun, comme D_1 et D_4 .

On les dira sécantes, parallèles, ou disjointes selon le cas.

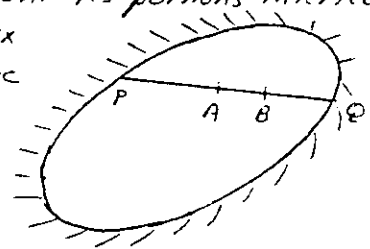
On appelle modèle de Klein du plan de Lobachewski l'intérieur d'une conique propre du plan projectif réel, muni de:

- une notion d'alignement: les droites en sont les portions intérieures des droites du plan projectif; elles ont deux points à l'horizon. leurs intersections avec la conique

- une notion de distance entre deux points, qui est la distance hyperbolique:

$$\delta(A, B) = \frac{1}{2} \log (A, B, Q, P)$$

où P et Q sont les points à l'horizon de la droite AB.

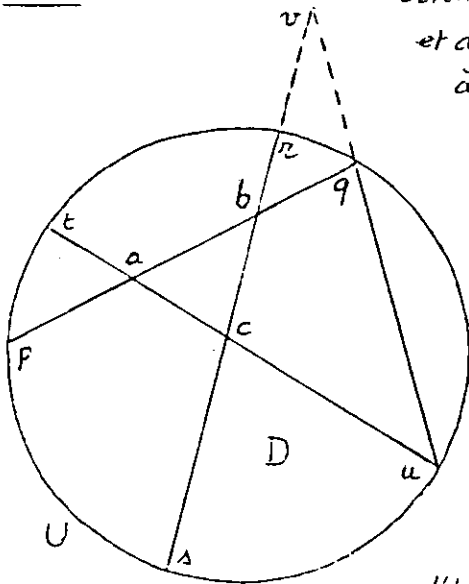


Comme deux coniques propres s'échangent avec leurs intérieurs par une homographie qui conserve les birapports, il est clair qu'en ne perd rien à supposer, ce qu'on fera dans la suite, que la conique est le cercle-unité U du plan complexe $\mathbb{C}$, et le modèle de Klein est alors le disque-unité $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Muni de δ , D est un espace métrique, c'est-à-dire que la distance δ satisfait à l'"inégalité triangulaire":

$$\text{pour } a, b, c \in D, \quad \delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$$

Preuve:



Soient p, q, r, s, t, u les horizons des droites ab, bc et ac , et v le point d'intersection de bc et qu , à l'extérieur du disque, éventuellement à l'infini. L'inégalité cherchée s'écrit

$$\frac{1}{2} \log(a, b, q, p) + \frac{1}{2} \log(b, c, s, r) \geq \frac{1}{2} \log(a, c, u, t),$$

$$\text{soit } (a, b, q, p) \cdot (b, c, s, r) \geq (a, c, u, t),$$

$$\text{ou encore } \frac{aq}{ap} \cdot \frac{bp}{bq} \cdot \frac{bs}{br} \cdot \frac{cr}{cs} \cdot \frac{at}{au} \cdot \frac{cu}{ct} \geq 1$$

Mais la puissance de a par rapport au cercle U vaut $at \cdot au = ap \cdot aq$ (au signe près), et de même $bp \cdot bq = br \cdot bs$ et $cr \cdot cs = ct \cdot cu$,

$$\text{d'où } \frac{aq}{au} = \frac{at}{ap}, \frac{bp}{br} = \frac{bs}{br}, \frac{cr}{ct} = \frac{cu}{cs}, \text{ et}$$

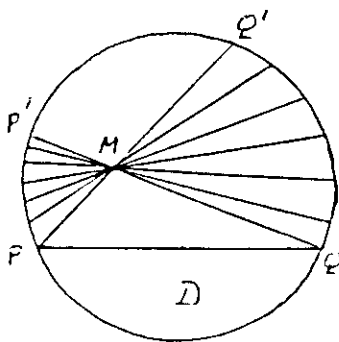
l'inégalité cherchée s'écrit encore

$$\left(\frac{aq}{au}\right)^2 \left(\frac{bs}{br}\right)^2 \left(\frac{cu}{cs}\right)^2 \geq 1, \text{ qui résulte de } \frac{aq}{au} \cdot \frac{bs}{br} \cdot \frac{cu}{cs} \geq 1, \text{ soit encore}$$

$$\frac{aq}{br} \cdot \frac{bs}{cs} \cdot \frac{cu}{au} \geq 1; \text{ or comme } \frac{aq}{br} \cdot \frac{bv}{cv} \cdot \frac{cu}{au} = 1 \text{ par le théorème de}$$

Ménélaüs, la dernière inégalité résulte de $\frac{bs}{cs} \geq \frac{bv}{cv}$, c'est-à-dire de $(b, c, s, v) \geq 1$, ce qui est vrai puisque les points sont ordonnés comme il convient sur la droite projective bc . ■

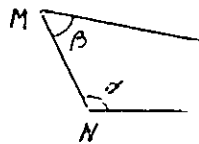
La preuve montre en fait que l'inégalité triangulaire est stricte dès que l'on a pu faire le raisonnement ci-dessus, c'est-à-dire dès que les points a, b, c ne sont pas alignés. Mais ceci démontre alors par passage à la limite (la longueur d'un arc de courbe étant la limite des longueurs des lignes brisées de sommets les points d'une subdivision quand la distance entre deux points consécutifs tend vers zéro), que les géodésiques du modèle de Klein (lignes de plus court chemin entre deux points) sont les droites



Il est clair sur le modèle de Klein que le plan de Lobachewski ne satisfait pas au postulat d'Euclide: par un point M de D non situé sur une droite PQ passe une infinité de droites qui en sont disjointes: toutes celles du secteur de sommet M limité par les deux parallèles à PQ passant par M , PMQ' et $P'MQ$. Les sécantes sont les droites de l'autre secteur.

C'est encore un phénomène de "fatigue": le point de rencontre éventuel est trop loin, au delà de l'horizon, pour qu'on puisse l'atteindre.

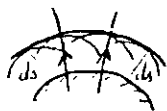
B) NON-CONFORMITÉ



Il est donc possible dans le plan de Lobachewski que deux demi-droites issues de M et N fassent avec MN des angles α et β de somme inférieure à π , sans pour autant qu'elles se rencontrent, même prolongées "indéfiniment".

Mais il faut ne manipuler qu'avec prudence la notion d'angle dans le modèle de Klein, car celui-ci n'est "pas conforme":

appelons conforme un modèle du plan de Lobachewski où il est plongé comme surface dans un espace euclidien de telle sorte qu'en chaque point l'élément de longueur hyperbolique soit "le même dans toutes les directions", c'est-à-dire proportionnel à l'élément de longueur euclidien, le coefficient ne dépendant que du point; dans un tel modèle,

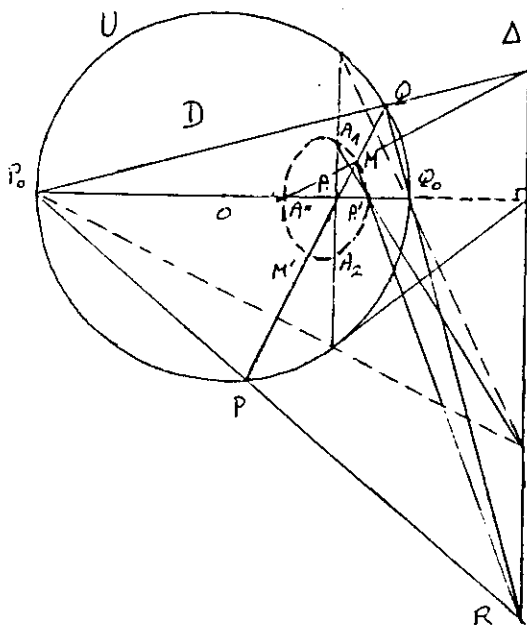


les géodésiques sont orthogonales aux lignes de niveau de la distance (à un point, à un fermé): c'est le "principe de Huygens" illustré ci-contre.

Les angles (que font deux courbes en un point d'intersection), définis par un produit scalaire de vecteurs tangents infinitésimaux, se confondent alors avec les angles déduits du plongement euclidien.

Que ce ne soit pas le cas dans le modèle de Klein (plongé dans $\mathbb{E}$) résulte de la description des "cycles", c'est-à-dire des lieux de points à distance donnée d'un point donné:

Le lieu des points à distance n de $A \in D$ est une ellipse d'axe principal OA .



Preuve: Soient P_0 et Q_0 les horizons de CA , où O est le centre de D , et A', A'' les points sur OA à distance n de A .

Si une autre droite d'horizons P et Q passe par A , et si M, M' sont les points à distance n de A sur cette droite, on a par exemple

$$(A, A', Q_0, P_0) = (A, M, Q, P), \text{ et de même }$$

$$(A, A'', P_0, Q_0) = (A, M', Q, P), \text{ d'où }$$

$$M = P \cap Q \cap A'R \cap A''R', \text{ où } R = P_0 \cap A'Q_0$$

et $R' = P_0 \cap Q_0 \cap P$ sont sur la polaire Δ de A par rapport au cercle U .

Comme les correspondances

$$A'R \rightarrow R \rightarrow P_0R \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow P_0Q \rightarrow R' \rightarrow A''R'$$

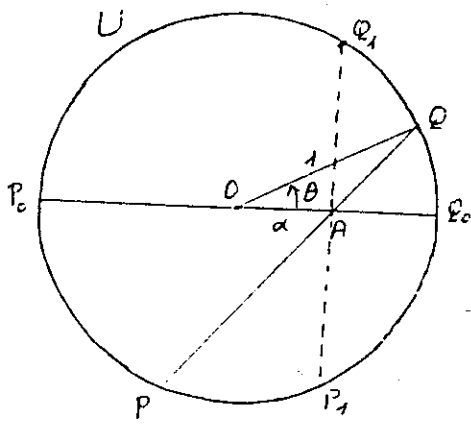
sont toutes des homographies, le lieu

du point $M = A'R \cap A''R'$ est une conique passant par A' et A'' ; elle est visiblement propre et contenue dans D : c'est donc une ellipse, et elle admet OA comme axe de symétrie. ■

Lorsque $A = Th a > 0$, on a $P_0 = -1, Q_0 = 1, A' = Th(a+n), A'' = Th(a-n)$, et le lieu cherché coupe la perpendiculaire en A à OA aux points

$$A_1, A_2 = Th a \pm i \sqrt{1 - Th^2 a} \cdot Th n; \text{ en particulier son centre est } \frac{Sh 2a}{Ch 2a + Ch 2n}, \text{ et }$$

$$\text{son demi-axe (sur } OA) \frac{Sh 2n}{Ch 2a + Ch 2n}.$$



L'élément de longueur au point $A = \alpha$ dans la direction de $OA = P_0 Q_0$, avec $P_0 = -1$, $Q_0 = 1$, vaut $ds = \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}$. Calculons-le dans une autre direction PQ . Si $Q = e^{i\theta}$ et $P = e^{i\theta'}$, la correspondance $Q_1 \mapsto P$ étant une homographie involutive de la conique U , il en est de même de $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta'}$; pour vérifier que $e^{i\theta'} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \alpha e^{i\theta}}$, il suffit donc de le faire en trois points distincts: c'est clair pour Q_0 et P_0 ($\theta = 0, \pi$) qui s'échangent; enfin si P_1 et Q_1 sont les points où la

perpendiculaire à $P_0 Q_0$ en A coupe le cercle U , on a par exemple $Q_1 = \alpha + i\sqrt{1-\alpha^2}$, et $\frac{\alpha - (\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2})}{1 - \alpha(\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2})} = \frac{-i}{\sqrt{1-\alpha^2} - i\alpha} = \alpha - i\sqrt{1-\alpha^2} = P_1$, ce qui établit la formule. Il vient alors,

$$\text{si } A = \alpha = \frac{(1-\beta)e^{i\theta'} + (1+\beta)e^{i\theta}}{2}, \quad \frac{AP}{AQ} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{AP \cdot AQ}{AQ^2} = \frac{AP_0 \cdot AQ_0}{AQ^2} = \frac{1-\alpha^2}{|e^{i\theta} - \alpha|^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta}.$$

d'où $\beta = \alpha \cdot \frac{\cos\theta - \alpha}{1-\alpha\cos\theta}$, et l'élément de longueur cherché, dans la direction de PQ ,

$$\text{vaut donc } ds = \frac{|PQ|}{2} \frac{d\beta}{1-\beta^2} = \frac{|dA|}{1-\beta^2} = \frac{(1-\alpha\cos\theta)^2 \cdot |dA|}{(1-\alpha^2)(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)}$$

(en particulier dans la direction orthogonale à OA , $\cos\theta = \alpha$, et $ds = |dA|$)

Comme on le voit, un modèle non conforme est peu propice aux calculs, et on arrête là l'étude du modèle de Klein; on se contentera de quelques remarques supplémentaires, au chapitre suivant, fondées sur des idées géométriques fournies par un autre modèle.

[illegible]

Considérons les bijections $\pi: D \rightarrow \Sigma^+$ et $M \rightarrow M''$

$i: \Sigma^+ \rightarrow D$ $M'' \hookrightarrow M'$ qui sont

respectivement le relèvement
vertical $(x, y, c) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

et l'inversion de pôle ce qui échange

$\mathbb{C}$ et la sphère-unité Σ :

$$\vec{\omega M'} \cdot \vec{\omega M''} = 2 \quad (\text{et } (\vec{\sigma M'}, \vec{\omega M''}) = 0)$$

La droite (du modèle de Klein) Δ , d'ensezons $P, Q \in U$ est trans fermée par π en le demi-cerle Δ^* vertical tracé sur Σ^+ de diamètre PQ , qu'on avait déjà suggéré comme autre modèle de droite élastique, muni de la distance

$$S(A'', B'') = |L_{\mathcal{Q}}(A'', B'', Q, P)| = \frac{1}{2} |L_{\mathcal{Q}}(A, B, Q, P)| = S(A, B) ,$$

le premier birapport étant celui de quatre points sur une conique, le second définissant la distance hyperbolique dans le modèle de Klein D.

Plus généralement, l'isométrie α transportée sur Σ^+ la structure de "plan hyperbolique" (plan de Lobatchewski) : la distance entre deux points M, N est définie par $1/\log(M, N, M_0, N_0)$ où le birapport est compté sur la géodésique passant par M et N qui est le demi-cercle vertical passant par M et N , de points sur U ("horizons") M_0 et N_0 dans l'ordre convenable. L'avantage, essentiel, de ce nouveau modèle est sa conformité : comme on l'a vu page 6, l'"élément de longueur" sur une géodésique étant " $\frac{dD}{\sin \theta}$ ", est proportionnel à l'élément de longueur euclidien, le coefficient $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{R}$ ne dépendant que de la "hauteur" h du point sur Σ^+ (sa distance à D), et pas de la direction.

Quant à l'inversion i , elle transforme les cercles de Σ en cercles ou droites de $\mathbb{C}$ (les droites sont les images des cercles de Σ passant par ω), et conserve le birapport de quatre points cocycliques: en particulier si A'' et B'' sont deux points d'un demi-cercle vertical de Σ' d'horizons P et Q , et en notant PT la verticale en P , tangente au demi-cercle et à Σ , on a:

$$(A'', B'', Q, P) = (PA'', PB'', PQ, PT) = (\omega PA'', \omega PB'', \omega PQ, \omega PT) = (\omega PA', \omega PB', \omega PQ, \omega PO) \\ = (PA', PB', PQ, PO) = (A', B', Q, P)$$

le dernier birapport étant compté sur le cercle passant par A, B', A, Q , orthogonal en P et Q à U puisque l'inversion conserve les cercles..., et les angles.

Il s'ensuit que $i\alpha$ est une isométrie du modèle de Klein D du plan hyperbolique, sur D muni de la distance "de Poincaré" notée ici δ' :

$\delta'(M, N) = \text{Log}(M, N, Q, P)$, où P et Q sont les points sur U du cercle orthogonal à U passant par M et N :

Si $M_1 = PQ \cap OM = (i\alpha)^{-1}(M)$, et $N_1 = OM \cap PQ = (i\alpha)^{-1}(N)$, la distance $\delta(M_1, N_1)$ dans le modèle de Klein est précisément $\delta'(M, N)$.

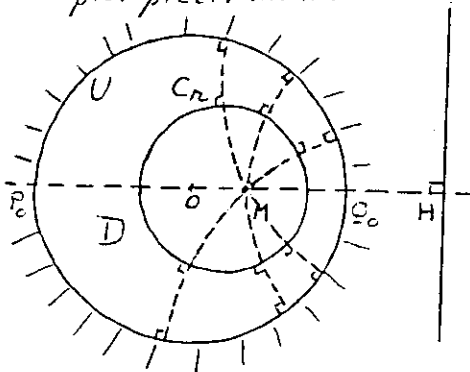
La distance δ' , définie dans le disque-unité ouvert D de $\mathbb{C}$ une structure métrique qui en fait un nouveau modèle du plan hyperbolique, que nous appellerons "disque de Poincaré".

Ce nouveau modèle (D, δ') cumule les avantages

- il est plongé dans le plan $\mathbb{C}$ comme le modèle de Klein
- il est conforme comme Σ^+ , puisqu'il s'en déduit par une inversion (qui conserve les angles).

Les géodésiques du disque de Poincaré sont donc les images par $i\alpha$ des géodésiques du modèle de Klein, c'est-à-dire les arcs de cercles (intérieurs à D) orthogonaux à U , y compris les diamètres JP_1Q_1E , et les propriétés remarquables de ce modèle font que c'est en l'étudiant qu'on pourra le plus facilement déduire les propriétés des autres modèles (D de Klein, ou Σ^+); donnons-en ici deux exemples:

- d'abord les "cycles" du disque de Poincaré sont de véritables cercles, plus précisément:

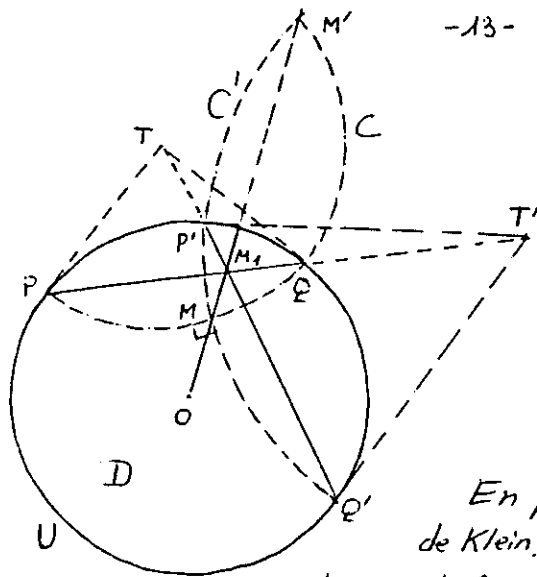


le cycle de centre $M \in D$ et de rayon $r > 0$ est un cercle du faisceau à point-limite M et contenant U , soit C_r , puisque c'est une courbe orthogonale à toutes les géodésiques passant par M (par conformité), c'est-à-dire à tous les cercles passant par M et orthogonaux à U , autrement dit les cercles du faisceau à points de base M et M' , où M' est le symétrique de M par rapport à H , pied de l'axe radical du faisceau engendré par U et

le cercle-point M : H est défini comme le point sur la demi-droite OM tel que $HM^2 = HP_0 \cdot HQ_0$, où $\{P_0, Q_0\} = OM \cap U$ (c'est-à-dire $(M, M', P_0, Q_0) = -1$).

Il s'ensuit que $i(C_r) = i^{-1}(C_r)$ est aussi un cercle de Σ , tracé dans Σ^+ qui se projette verticalement dans D sur l'ellipse qu'on tentait d'étudier à la page 9, lieu des points à distance r de M_1 dans le modèle de Klein: savoir ainsi que cette ellipse (dont le demi-axe suivant OM_1 est facile à calculer) se relève verticalement selon un cercle de Σ^+ est le meilleur moyen de la calculer, ou de l'utiliser.

- déjà la description même et l'étude faite de l'isométrie $i\alpha$ entre les deux modèles permet d'énoncer les remarques suivantes: Soient PQ



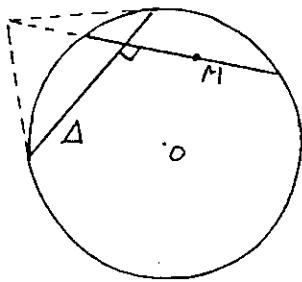
et $P'Q'$ deux cordes de U se coupant en $M_1 \in D$. Alors les cercles C et C' orthogonaux à U et passant respectivement par P, Q et par P', Q' , de centres T et T' , se recoupent en M à l'intérieur de D et M' à l'extérieur, de telle sorte que :

- $M = \text{con}(M_1)$ est sur le segment OM_1
- U appartient au faisceau de cercles à points-limite M et M' .

En particulier les droites PQ et $P'Q'$ du modèle de Klein, sont "orthogonales" (dans ce modèle, c'est-à-

dire satisfont infinitésimalement localement à une condition comme le théorème de Pythagore par exemple, si et seulement si C et C' sont orthogonaux (pour la métrique du modèle de Poincaré, c'est-à-dire au sens euclidien usuel, puisque celle-ci est conforme) : comme ceci équivaut encore à dire que la polaire de T par rapport à C' (ou de T' par rapport à C) est MM' , c'est encore équivalent à dire que $T \in P'Q'$, ou que $T' \in PQ$, et on obtient :

Deux droites du modèle de Klein sont orthogonales si et seulement si elles sont "conjuguées" par rapport à l'horizon U , c'est-à-dire que le pôle de chacune est situé sur le prolongement de l'autre.



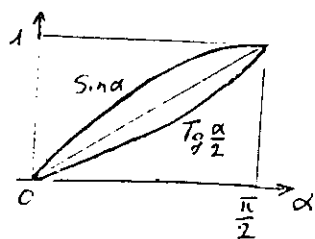
D'où une construction géométrique facile de la perpendiculaire abaissée d'un point M à une droite Δ dans le modèle de Klein, illustrée par la figure, et qui montre bien la non-conformité de ce modèle.

Avant de l'abandonner définitivement, faisons ici deux remarques de plus à son sujet :

- le mérite du modèle de Klein est que les droites (géodésiques) y sont des segments de droites (euclidiennes), ce qui rend plus aisée par exemple la discussion de questions de convexité.
- la restriction de l'application $\text{con} : M_1 \mapsto M$ à un diamètre de D (où les deux notions utilisées de birapport viennent se confondre) est la bijection croissante de $] -1, 1[$, $u_1 \mapsto u$ définie par

$$\delta'(0, u) = 2 \text{Arg Th } u = \delta(0, u_1) = \text{Arg Th } u_1, \text{ soit } \frac{1+u}{1-u} = \left(\frac{1+u_1}{1-u_1} \right)^2, \text{ soit encore}$$

$u = \frac{2u_1}{u_1^2 + 1}$, c'est-à-dire que si $u_1 = \text{Tg } \frac{\alpha}{2}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), alors $u = \sin \alpha$; il s'agit donc d'une "contraction" vers le centre, de rapport variable qu'on lit en comparant les graphes de ces deux fonctions sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ (cf. ci-dessous) : il est voisin de 2 vers l'origine et décroît jusqu'à 1 au bord.



B) LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ

Il est connu que tout ouvert U connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$ autre que $\mathbb{C}$ lui-même peut être transformé en le disque-unité D par une bijection biholomorphe (donc conservant les angles); en transportant ainsi la distance d' du disque de Poincaré, on peut donc fabriquer autant de modèles qu'on veut du plan hyperbolique, tous plongés dans le plan $\mathbb{C}$ et conformes; l'un d'entre eux se distingue par ses qualités et ses applications: c'est le "demi-plan de Poincaré" $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$

L'homographie h de $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$, d'inverse

$z \mapsto h^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection de D sur P : en effet $h(0) = i$,

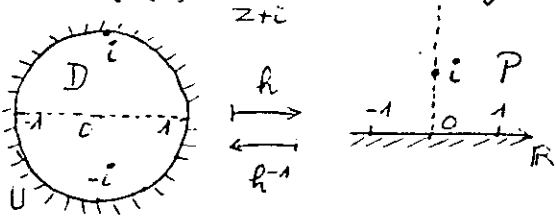
$h(1) = \infty$, $h(-1) = 0$, $h(i) = -1$, $h(-i) = 1$;

et comme une homographie conserve la cocyclicité, $h(U) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

comme elle est continue, $h(D) = P$ ou

$\mathbb{C} - (\mathbb{R} \cup P)$, et la première égalité

implique $h(D) = P$.

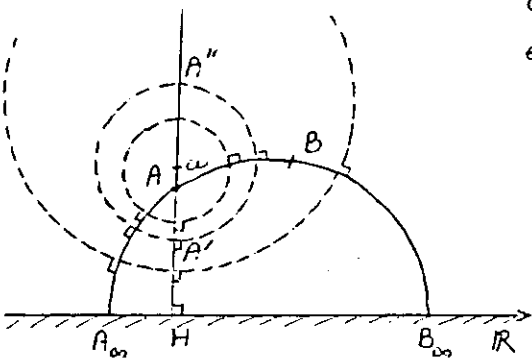


Comme h est une homographie de $\mathbb{C}$, elle conserve le birapport de quatre nombres complexes. Par transport de la distance hyperbolique de D à P par h , on obtient donc le modèle suivant du plan hyperbolique:

C'est P , muni de l'horizon $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et de la distance

$$\delta(A, B) = \text{Log}(A, B, B_{\infty}, A_{\infty})$$

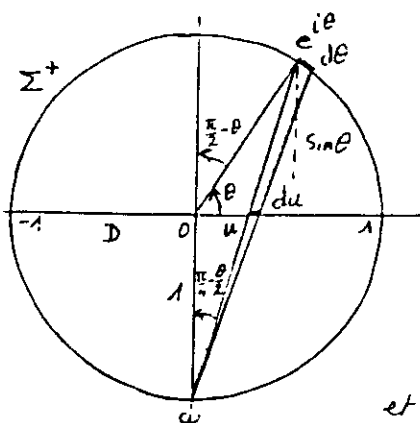
où A_{∞} et B_{∞} sont les points à l'horizon de la géodésique passant par A et B , qui est le demi-cercle centré sur $\mathbb{R}$ et passant par A et B , ou éventuellement la demi-droite "verticale" passant par A si celle-ci



passe par B (on a alors $A_{\infty} = H$ et $B_{\infty} = \infty$)

Le "cercle" de centre A et de rayon $r > 0$ est un cercle du faisceau à points-limite A et $\bar{A}$ (symétrique de A par rapport à $\mathbb{R}$), ou encore du faisceau engendré par l'horizon $\overline{\mathbb{R}}$ et le cercle-point A , puisque c'est une courbe orthogonale à toutes les géodésiques passant par A . Si la demi-droite verticale HA le coupe en A' et A'' dans cet ordre, on a $HA \cdot HA'' = HA^2$ et $e^{\delta(A, A'')} = (A, A'', \infty, H) = \frac{HA''}{HA}$, d'où $HA'' = HA \cdot e^{\delta(A, A'')}$, et $HA' = HA \cdot e^{-\delta(A, A')}$ si w est son centre, tandis que son rayon (euclidien) vaut $HA \cdot \sinh \delta(A, w)$.

C'est dans ce modèle qu'il est le plus aisé d'étudier la géométrie hyperbolique, en particulier la trigonométrie, et c'est ce qu'on va faire aux deux chapitres suivants. C'est aussi le modèle dont les applications sont les plus riches et diverses.



On a déjà remarqué que l'élément de longueur en tout point du modèle conforme Σ^+ ne dépendait que de la "hauteur": $ds = \frac{d\theta}{\sin \theta}$ (cf. pages 6, 11).

Ceci permet, pour le calculer dans le disque D de Poincaré, de se borner à le calculer au point u dans la direction du diamètre passant par u . Dans le plan vertical passant par ce diamètre (cf. ci-contre), on a $u \in]-1, 1[$, et si $u = i(e^{i\theta})$, $u = \operatorname{Tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$, donc en posant $t = \operatorname{Tg} \frac{\theta}{2}$, $u = \frac{1-t}{1+t}$, d'où $t = \frac{1-u}{1+u}$, et $dt = -\frac{2du}{(1+u)^2}$; de plus $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)d\theta$ et $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$,

d'où $\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{dt}{t} = -\frac{2du}{1-u^2}$; finalement:

l'élément de longueur au point $u \in D$ du disque de Poincaré est $\frac{2|du|}{1-u^2}$.

Comme le modèle du demi-plan de Poincaré P se déduit du disque par l'homographie $u \mapsto z = i \frac{1+u}{1-u}$, d'où $u = \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i}$, il vient

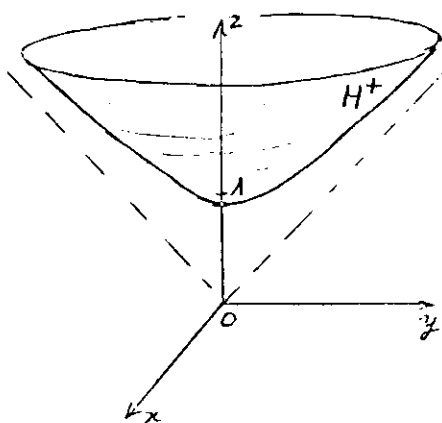
$du = \frac{2idz}{(z+i)^2}$, d'où $|du| = \frac{2|dz|}{|z+i|^2}$, et $1-|u|^2 = \frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2}$; et finalement

$$\frac{2|du|}{1-|u|^2} = \frac{4|dz|}{|z+i|^2 - |z-i|^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y} \quad \text{si } z = x+iy, \text{ autrement dit:}$$

l'élément de longueur au point $z = x+iy \in P$ du demi-plan de Poincaré est

$$\frac{|dz|}{y} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y}.$$

C) L'HYPERBOLOÏDE RELATIVISTE



L'application $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $(u+v) \mapsto (x, y, z)$

$$x = \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}, \quad y = \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \quad z = \frac{2v}{1-u^2-v^2}$$

est bijective sur son image H^+ , qui est la nappe supérieure (au dessus du plan horizontal $\{z=0\}$) de l'hyperboloïde à deux nappes d'équation

$$z^2 = 1+x^2+y^2,$$

en effet son inverse $F^{-1}: H^+ \rightarrow D$ est définie

$$\text{par: } u = \frac{x}{1+z}, \quad v = \frac{y}{1+z}$$

Transportons par F la métrique du disque de Poincaré:

On a $du = \frac{dx}{1+z} - \frac{x dz}{(1+z)^2}$ et $dv = \frac{dy}{1+z} - \frac{y dz}{(1+z)^2}$, d'où

$$du^2 + dv^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1+z)^2} + \frac{(x^2 + y^2) dz^2}{(1+z)^4} - \frac{2(x dx + y dy) dz}{(1+z)^3},$$

et comme $x dx + y dy = z dz$ sur H^+ ,

$$du^2 + dv^2 = \frac{(1+z)^2(dx^2 + dy^2) + [(x^2 + y^2) - 2z(1+z)] dz^2}{(1+z)^4} = \frac{dx^2 + dy^2 - dz^2}{(1+z)^2};$$

De plus $1-u^2-v^2 = \frac{(1+z)^2 - x^2 - y^2}{(1+z)^2} = \frac{2}{1+z}$; et enfin $\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2} = dx^2+dy^2-dz^2$.

Donc $ds = \sqrt{dx^2+dy^2-dz^2}$ définit une métrique sur H^+ :

$$dx^2+dy^2-dz^2 = dx^2+dy^2 - \frac{(xdx+ydy)^2}{z^2} \geq dx^2+dy^2 - \frac{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)}{z^2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$= (dx^2+dy^2) \left(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) = \frac{dx^2+dy^2}{z^2} > 0 \quad \square$$

L'application F est donc une isométrie du disque de Poincaré (hyperbolique) sur l'hyperboloïde H^+ , muni de la métrique (relativiste) ds .

Il s'agit donc là d'un plongement du plan hyperbolique dans $\mathbb{R}^3$, qui n'est certes pas conforme pour la métrique euclidienne, mais qui est conforme (mieux : c'est une isométrie) pour la pseudo-métrique relativiste de l'espace.

On peut encore, par analogie à la projection du modèle conforme Σ^+ sur le disque D de Klein, projeter verticalement H^+ sur $\mathbb{R}^2$ et y transporter la métrique ; on a alors

$$ds^2 = dx^2+dy^2 - \frac{(xdx+ydy)^2}{z^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2+y^2} dx^2 + \frac{1-y^2}{1+x^2+y^2} dy^2 - \frac{2xy}{1+x^2+y^2} dxdy,$$

mais ce nouveau modèle, s'il est un plan complet, n'a évidemment plus rien de conforme.