SUR LES INVARIANTS ALGÉBRIQUES DU GROUPE ENGENDRÉ PAR UNE MATRICE NILPOTENTE

André Cerezo

L'objet de ce travail est la description explicite des anneaux d'invariants algébriques et rationnels sous l'action du groupe engendré par une matrice nilpotente.

Je veux remercier chaudement ici :

- le Professeur J. Dixmier, qui m'a fait connaître la plupart des travaux, classiques et plus récents, que je cite, et dont l'intérêt pour les stratifications est pour moi une grande motivation.
- mes amis niçois J. Briançon et A. Hirschowitz, pour leurs lumineuses explications en algèbre commutative et en géométrie algébrique.
- "last but not least" Loula Fezoui qui a rendu possible la mécanisation des calculs inhumains du chapitre II, et a partagé avec moi de longues nuits de calculs interminables.

REFERENCES

[1] BRION Michel. "Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple". Ann. Inst. Fourier, 33 (1983), p 1-27

[2] COMTET, L. "Analyse Combinatoire", P.U.F., Paris 1970

[3] CUSHMAN, R. and SANDERS, J. "Nilpotent normal forms and representation theory of $sl(2,\mathbb{R})$". Proceedings of the Multi-parameter Bifurcation Theory Conference at Arcata, Calif. July 1985

[4] DIXMIER, J. "Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II". Bull. Soc. Math. France, 85 (1957) p. 325-388

[5] DIXMIER, J. "Même titre, III. Canadian J. Math. 10 (1958) p. 321-348

[6] DIXMIER, J. Même titre, IV. Canadian J. Math. 11 (1959) p. 321-344

[7] DIXMIER, J. "Algèbres enveloppantes", Gauthier-Villars, Paris 1974

[8] DIXMIER, J. et M. RAYNAUD "Sur le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique" Math. Analysis and Appl., Advances in Math. suppl. studies, part A, vol 7A, p 327-344.

[9] ELPHICK, C., E. TIRAPEGUI, M. BRACHET, P. COULLET, G. IOOSS "A simple global characterization for normal forms of singular vector fields" Preprint Université de Nice n° 109 (1986)

[10] GRACE, J. and A. YOUNG. "The algebra of invariants", Chelsea, 1903

[11] GROSSHANS, F. "Observable groups and Hilbert's fourteenth problem" Amer. J. Math, 95 (1973) p. 229-253

[12] GROSSHANS, F. "The Invariants of Unipotent Radicals of Parabolic subgroups" Bull. Am. Mat. Soc. 80 (1974) p 518-526

[13] GROSSHANS, F. "Localization and Invariant Theory" Advances in Math. 21 (1976) p 50-60

[14] HOCHSCHILD, H. and G. MOSTOW "Unipotent groups in Invariant theory" Proc. Nat. Acad. Sci. USA 70 (1973) p 646-648

[15] KRAFT, H. "Geometrische Methoden in der Invariantentheorie"
Vieweg, Braunschweig, 1984

[16] MUMFORD, D. and J. FOGARTY "Geometric Invariant Theory"
Springer, Berlin, 1982 (2e. ed.)

[17] NAGATA, M. "On the 14th problem of Hilbert". Proc. Int. Congr. of Math., 1958 Edinburgh. Cambridge Univ. Press, London and New-York 1960, p 459-462.

[18] NAGATA, M. Same title. Amer J. Math. 81 (1959) p. 766-772

[19] POPOV, V.L. "Constructive Invariant Theory". in Astérisque n° 87-88, (1981) p. 303-334

[20] PUKANSZKY, L. "Leçons sur les représentations des groupes"
Dunod, Paris, 1967

[21] GAUGER, M. "Some remarks on the center of the universal enveloping algebra of a classical simple Lie algebra"
Pacific J. of Math. 62 (1976) p. 93-97

[22] RUTHERFORD, D. "Modular Invariants", Cambridge U.P. 1932, and Stechert-Hafner, New York 1964

[23] STERNA, D. "Decompositions of P^n induced by algebraic K^t-actions"
Demonstratio Mathematica, 18 (1985) p. 853-862

[24] SYLVESTER, J. and F. FRANKLIN. "Tables of the Generating Functions and Groundforms for the Binary Quantics of the first ten orders"
Amer. J. Math 7 (1885) p 223-251

[25] ZARISKI, O and P. SAMUEL "Commutative Algebra"
Van Nostrand, 1960

INTRODUCTION

Les invariants algébriques d'un groupe *réductif* de matrices sont "bien" connus. Le cas du groupe modulaire fait l'objet de la théorie "classique" des invariants, dont un bon exposé moderne est [22]. Le développement du cas général est plus récent mais remonte aux travaux de C. Chevalley Au moins dans le cas de la représentation coadjointe du groupe, où il s'agit en fait de déterminer le centre de l'algèbre enveloppante de son algèbre de Lie, on se ramène au cas d'un groupe semi-simple, puis simple, et le résultat a été entièrement explicité dans [21]. Les développements récents de la théorie sont très nombreux, utilisant à fond les méthodes de la géométrie algébrique moderne (par exemple les travaux de Rosenlicht, Mumford, Vinberg, Kač, ...). On peut citer ici les livres [16] et [15]. L'hypothèse de "réductivité" est naturelle à cause du théorème de Nagata, et depuis son fameux contre-exemple au quatorzième problème de Hilbert [17] (cf. aussi [18]).

L'étude des invariants algébriques d'un groupe *non réductif* est beaucoup moins avancée, malgré de nombreux travaux récents, et les résultats à espérer sont certainement beaucoup plus complexes. Un cas particulier intéressant est la détermination des centres des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie nilpotentes, sujet initié par J. Dixmier ([4], [5], [6]).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie *nilpotente* de dimension n sur le corps K de *caractéristique nulle*, définie dans une base $\{X_1, \dots, X_n\}$ par les crochets

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} X_k \qquad (1 \leq i,j \leq n).$$

Le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre commutative de $U(\mathfrak{g})$, que la symétrisation permet d'identifier à l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ invariantes par l'action coadjointe du groupe adjoint algébrique G de l'algèbre $\mathfrak{g}$, autrement dit à la sous-algèbre de $K[x_1,\dots,x_n]$ formée des polynômes annulés par tous les opérateurs

$$(*) \qquad D_i = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} x_k \Big) \partial_j \qquad (i=1,\dots,n)$$

où l'on a noté $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Le centre du corps enveloppant s'identifie lui-même au corps des fractions de $Z(\mathfrak{g})$, puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotente ([4], lemme 10) et, toujours par symétrisation, au corps des fractions rationnelles sur $\mathfrak{g}^*$ annulées par tous les D_i $(i=1,\dots,n)$.

On sait que ce dernier est une extension transcendante pure de K de degré $n-r$, où r est le rang générique du système de champs de vecteurs D_i ([4], lemme 7). L'entier $r=2d$ est un nombre pair, et c'est la dimension maximale des orbites de l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$. Ces orbites sont toutes des sous-variétés algébriques fermées de $\mathfrak{g}^*$, lisses de dimension paire, dont on sait calculer des paramétrisations algébriques (si $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voir par exemple [20], II, Chap. I, §3, 4, 5, 6).

Si K est algébriquement clos, $\mathfrak{g}^*$ est canoniquement stratifiée sous l'action de G : soit U_1 l'intérieur de la réunion des orbites séparées par l'anneau des polynômes invariants, et $F_1 = \mathfrak{g}^* - U_1$; puis U_{j+1} l'intérieur de la réunion des orbites de l'action de G dans F_j séparées par l'anneau des fonctions algébriques G-invariantes sur la variété affine F_j, et $F_{j+1} = F_j - U_{j+1}$. Ainsi se construit une partition de $\mathfrak{g}^*$ en une réunion disjointe finie de sous-variétés quasi-affines G-stables U_j, telles que les quotients $V_j = U_j/G$ existent (au sens de la géométrie algébrique) et sont eux-mêmes des variétés algébriques quasi-affines. Ceci peut s'étendre au cas où $K = \mathbb{R}$, et se trouve dans [8], §2.

Si le centre du corps enveloppant est toujours un corps de fractions rationnelles, par contre le centre de l'algèbre enveloppante n'est pas toujours isomorphe à une algèbre de polynômes (le seul contre-exemple de dimension ≤ 5 est donné dans [5] ; c'est d'ailleurs un cas particulier de la présente étude), ni même toujours une algèbre de type fini (un contre-exemple de dimension 45, construit sur celui de Nagata [17], est cité dans [7], n°4.9.20, et [8], §2.4.7).

Notons $\mathcal{N}_n$ la suite des algèbres de Lie nilpotentes "filiformes type", c'est-à-dire $\mathcal{N}_1 = K$, $\mathcal{N}_2 = K^2$, et pour $n \geq 2$, $\mathcal{N}_{n+1}$ est définie dans une base $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ par les crochets

$$[X_0, X_j] = X_{j-1} \quad (j = 2, \ldots, n).$$

Dans ce cas les opérateurs (*) s'écrivent

$$\begin{cases} D = x_1\partial_2 + x_2\partial_3 + \cdots + x_{n-1}\partial_n \\ \text{et } \; -x_1\partial_0, \ldots, -x_{n-1}\partial_0 . \end{cases}$$

Il est clair que le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{N}_{n+1}$ (resp. du corps enveloppant) s'identifie au noyau de D dans $K[x_1, \ldots, x_n]$ (resp. dans $K(x_1, \ldots, x_n)$), c'est-à-dire à l'algèbre des invariants algébriques (resp. au corps des invariants rationnels) du groupe de transformations linéaires de K^n à un paramètre de générateur infinitésimal la matrice nilpotente "de Jordan" :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $\Gamma = \{\exp tJ \mid t \in K\}$ ce groupe, et $\pi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow K^n$ la transposée de l'injection $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1X_1 + \cdots + x_nX_n$ de K^n dans $\mathfrak{g}$. Les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui ne sont pas des points sont toutes de dimension 2, et se projettent verticalement par π, c'est-à-dire que toute orbite $\mathcal{O}$ de dimension positive vérifie : $\mathcal{O} = \pi^{-1}(\pi(\mathcal{O}))$.

On peut identifier de même la stratification de K^n sous l'action du groupe engendré par une matrice nilpotente quelconque (dont la forme de Jordan se décompose en plusieurs blocs), et son algèbre d'invariants, à la stratification de l'action coadjointe d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension $n+1$ (produit semi-direct de K^n par une droite), et au centre de son algèbre enveloppante. C'est le premier point de vue qu'on adopte ici.

Le chapitre I traite des invariants algébriques et rationnels du groupe Γ. Au paragraphe 1 est définie la double graduation naturelle de l'algèbre des invariants. Au paragraphe 2 on étend l'action de D en une action de $\mathfrak{sl}(2,K)$ sur $K[x_1,..,x_n]$, pour utiliser la théorie classique des représentations de $\mathfrak{sl}(2,K)$. Le paragraphe 3 donne plusieurs bases explicites du corps des invariants rationnels, dont une minimisant les degrés. On a rassemblé au paragraphe 4 des résultats sur l'anneau des invariants algébriques, préliminaires à l'étude de la stratification canonique, la deuxième au sens de Dixmier et Raynaud [8], qui fait l'objet du paragraphe 5 : on obtient les variétés-quotients comme normalisées de certaines variétés quasi-affines "concrètes", c'est-à-dire plongées. On revient au paragraphe 6 sur l'anneau des invariants algébriques, pour indiquer comment en principe on peut en calculer une présentation par générateurs et relations (il est bien sûr de type fini)

L'idée du §2 semble connue depuis le dix-neuvième siècle : identifiant les invariants de Γ à certains "covariants" de $\mathfrak{sl}(2,K)$, elle permet d'utiliser la théorie classique de ceux-ci (par exemple [10], [22]), encore développée par des auteurs modernes (par exemple [1]). Elle est ainsi la base d'une théorie moderne des invariants de certains groupes non-réductifs (les groupes "observables" de Grosshans, cf. [11], [12], [13], et aussi [15], [14]), dont cette étude n'est qu'un cas très particulier.

Mais il s'agit ici de développer et d'appliquer une méthode de calcul des invariants, beaucoup plus élémentaire (n'utilisant aucune des théories ci-dessus), et "constructive", dans l'esprit de V.L. Popov [19]. L'intérêt de calculer le plus explicitement possible des systèmes de générateurs d'anneaux d'invariants de groupes nilpotents vient en particulier de la mécanique, où ceux-ci sont utilisés pour mettre sous forme "normale" les champs de vecteurs décrivant certains systèmes dynamiques (cf. [3], [9], [23]). Comme il s'agit de calculer des développements limités à un degré de précision voulu, même les parties calculables de systèmes qui ne le sont guère peuvent être utilisables. Mais bien entendu l'étude des anneaux d'invariants des algèbres de Lie nilpotentes trouve beaucoup d'autres motivations, par exemple en géométrie algébrique (problèmes de modules), en topologie algébrique (algèbres de Lie graduées des fibrés), en théorie des représentations des groupes, etc.

Au chapitre II sont présentés les résultats d'un calcul de l'anneau des invariants de Γ pour $n=6$. La structure de l'anneau est en effet très simple pour $n \leq 5$ (cf. propositions I.4.2, I.4.3), et beaucoup plus complexe dès que $n \geq 6$. On retrouve ainsi sous une forme développée les 23 "formes de base" des "quintiques binaires" de la théorie classique (cf. [24], p. 224, et [10], p. 131), ainsi que leurs expressions comme fractions rationnelles d'une base simple du corps des invariants rationnels (c'est-à-dire en fait les équations de la variété-quotient). On donne aussi quelques indications pour le calcul du cas $n=7$.

Enfin le chapitre III traite des invariants d'une matrice nilpotente "quelconque", c'est-à-dire à plusieurs blocs de Jordan, le plus intéressant mécaniquement.