UNIVERSITE DE NICE

PREPUBLICATION

mathématiques

LABORATOIRE C.N.R.S. 168 Jean-Alexandre DIEUDONNE

TABLE des INVARIANTS ALGEBRIQUES et RATIONNELS d'UNE MATRICE NILPOTENTE de PETITE DIMENSION

◇

André CEREZO

◇

Preprint n° 146
Mai 1987

Adresse : Parc Valrose - F-06034 NICE CEDEX Tél. 93-52.98.98

IMP. MATHS.

TABLE DES INVARIANTS ALGÉBRIQUES ET RATIONNELS D'UNE MATRICE NILPOTENTE DE PETITE DIMENSION

André Cerezo

On donne ici les résultats d'un calcul explicite de l'anneau $\mathcal{S}$ des invariants algébriques et du corps $\mathcal{K}$ des invariants rationnels du groupe linéaire à un paramètre engendré par une matrice nilpotente dont la forme de Jordan a un ou deux blocs de dimensions comprises entre 2 et 5.

Dès que l'un des blocs est de dimension au moins 6, en effet, un système de générateurs de $\mathcal{S}$ contient forcément des polynômes de degré assez élevé pour que la citation d'un système complet prenne déjà plusieurs dizaines de pages. (Un tel calcul a été fait pour un seul bloc de dimension 6 dans [3], chap. II).

De plus on a ainsi tous les cas (sauf trois, d'ailleurs faciles, où la matrice a trois blocs de taille au plus 3), où le sous-anneau $\mathcal{J}$ des éléments de $\mathcal{S}$ de poids nul (voir les rappels, (d)) possède un système de paramètres multihomogènes. Rajouter des blocs de dimension 1 ne modifie les résultats que de façon évidente.

Le calcul de ces anneaux est intéressant en particulier en mécanique, où ils servent à la mise sous forme réduite des hamiltoniens de certains systèmes dynamiques : ce sont alors les éléments de $\mathcal{S}$ de poids donné et de petit degré qu'il s'agit de calculer. Ceci est fait ici, après la table, dans les cas de dimensions de blocs impaires, et jusqu'au degré 7.

La table est précédée d'un paragraphe de rappels des résultats connus qu'elle sous-entend, et d'un autre qui explique son contenu, sa présentation et ses notations.

Les références citées ne le sont qu'à l'appui de certaines des assertions utilisées ; la littérature sur ce sujet, s'étendant sur plus d'un siècle, est d'une abondance extrême.

RAPPELS

k est un corps de caractéristique nulle, M une matrice nilpotente de dimension n à coefficients dans k, $\Gamma = \{\exp tM \mid t \in k\}$ le groupe linéaire à un paramètre engendré par M. Γ agit naturellement sur les polynômes de n variables et on note $\mathcal{S}$ l'anneau des invariants de cette action ; de même Γ agit sur les fractions rationnelles et on note $\mathcal{K}$ le corps des invariants.

Les faits suivants sont connus, certains depuis Hilbert :

(a) $\mathcal{K}$ est le corps des fractions de $\mathcal{S}$, et c'est une extension transcendante pure de k de degré $n-1$ (cf. [4]).

(b) $\mathcal{S}$ est une k-algèbre graduée (par le degré) de type fini, et plus précisément c'est une algèbre de Cohen-Macaulay, et un anneau de Gorenstein (cf. [5], [6], [7], en tenant compte du point suivant).

(c) On peut compléter l'action de Γ en une action rationnelle de $\mathfrak{sl}(2,k)$ de telle sorte que $\mathcal{S}$ s'identifie à un anneau de covariants simultanés de plusieurs formes binaires. Plus précisément : si $d = \dim \operatorname{Ker} M$, la forme de Jordan de M est décomposée en d blocs de dimensions $n_1, \dots, n_d$, avec $n_1 + \dots + n_d = n$. Il existe alors une seule façon de compléter la matrice M en un triplet $\{M, T, M'\}$ qui soit la représentation $V_{n_1} \oplus \dots \oplus V_{n_d}$ de la base standard de $\mathfrak{sl}(2,k)$, où V_j est la représentation irréductible de dimension j de $\mathfrak{sl}(2,k)$. $\mathcal{S}$ s'identifie alors (par la correspondance de Cailey) à l'anneau des covariants simultanés de d formes binaires de degrés $n_1 - 1, \dots, n_d - 1$.

(d) (cf. [3] ch. III) Supposons que M est sous sa forme de Jordan

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_r = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de dimension } n_r \ (1 \leq r \leq d)$$

et notons $(x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r})$ les variables correspondant au bloc M_r.

L'algèbre des polynômes de n variables est alors $\mathbb{N}^{d+1}$-graduée, en associant à chaque monôme le $(d+1)$-entier formé de ses degrés partiels p_r par rapport aux variables de chaque bloc, et sa masse m définie par
$$m\left(\prod_{r=1}^{d} x_{r,1}^{\alpha_{r,1}} \cdots x_{r,n_r}^{\alpha_{r,n_r}}\right) = \sum_{r=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{n_r}(j-1)\alpha_{r,j}\right)$$

Notons D, H, D' les générateurs infinitésimaux des actions des groupes à un paramètre engendrés respectivement par M, T, M' dans l'algèbre des polynômes. Ce sont des opérateurs différentiels homogènes de multidegrés respectifs $(0,\dots,0,-1)$, $(0,\dots,0,0)$ et $(0,\dots,0,1)$. Par suite
$$\mathcal{S} = \bigoplus_{\mathbb{N}^{d+1}} \mathcal{S}^{(p_1,\dots,p_d,m)} \quad \text{où} \quad \mathcal{S}^{(p_1,\dots,p_d,m)} \text{ est le sous-espace de } \mathcal{S}$$
des polynômes homogènes de multidegré $(p_1,\dots,p_d,m)$, et $\mathcal{S}$ hérite donc d'une $\mathbb{N}^{d+1}$-graduation naturelle pour laquelle sa série de Poincaré
$$F(a_1,\dots,a_d,z) = \sum \dim\left(\mathcal{S}^{(p_1,\dots,p_d,m)}\right) a_1^{p_1}\cdots a_d^{p_d} z^m$$
est une fraction rationnelle.

$\mathcal{S}$ est le noyau de D, et admet un système fini $\mathcal{G}$ de générateurs multihomogènes. De plus tout élément multihomogène de $\mathcal{S}$ est vecteur propre de H :
$$P \in \mathcal{S}^{(p_1,\dots,p_d,m)} \Rightarrow HP = \left[\left(\sum_{j=1}^{d}(n_j-1)p_j\right) - 2m\right]P$$
Appelons poids de P et notons $|P|$ la valeur propre $\left(\sum_{j=1}^{d}(n_j-1)p_j\right) - 2m$.

On a pour $P \in \mathcal{S}^{(p_1,\dots,p_d,m)}$, $\quad 0 \leq |P| \leq \sum_{j=1}^{d}(n_j-1)p_j$

La sous-algèbre $\mathcal{I}$ des éléments de $\mathcal{S}$ de poids nul s'identifie (par la même correspondance qu'en (c)) à l'algèbre des invariants simultanés de d formes binaires de degrés $n_1-1, \dots, n_d-1$.

(e) Il existe une base de $\mathcal{K}$ (comme corps de fractions rationnelles sur k) formée d'éléments multihomogènes de $\mathcal{S}$ de degré total au plus 3 : supposons $n_d = \sup_r n_r$ et posons

$$Z = x_{d,1} \; ; \quad X_r = x_{r,1} \quad (1 \leq r \leq d-1) \; ;$$

$$P_{r,j} = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1} x_{d,i} \cdot x_{r,j+2-i} \quad (1 \leq r \leq d-1 \; ; \; 1 \leq j \leq n_r - 1)$$

$$Q_{2j} = x_{d,j+1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{j} (-1)^i x_{d,j+1-i} \cdot x_{d,j+1+i} \quad \left(1 \leq j \leq \tfrac{1}{2}(n_d - 1)\right)$$

$$Q_{2j+1} = -x_{d,2} \cdot x_{d,j+1}^2 + \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} x_{d,i+1} \cdot \left\{ 2 x_{d,2} \cdot x_{d,2j+1-i} - (2j+1-2i) x_{d,1} \cdot x_{d,2j+2-i} \right\}$$

$$\left(1 \leq j \leq \tfrac{1}{2} n_d - 1\right)$$

puis

$$\mathcal{B} = \{ Z \, ; X_1, \dots, X_{d-1} \, ; P_{1,1}, \dots, P_{d-1, n_{d-1}-1} \, ; Q_2, \dots, Q_{n_d - 1} \}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une telle base de $\mathcal{K}$, dont les éléments sont de degrés totaux les plus petits possibles. ([3] chap. III)

(f) (cf. [3]) Tout élément multihomogène de $\mathcal{S}$ de multidegré $(p_1, \dots, p_d, m)$ s'écrit de façon unique $Z^{p_1 + \dots + p_d - m} Q(\mathcal{B})$ où Q est un polynôme des éléments de $\mathcal{B}$, quasihomogène de degré m quand on affecte chaque élément de $\mathcal{B}$ de sa masse.

(g) L'orbite d'un point de k^n sous l'action de Γ est séparée de toutes les autres par l'anneau $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $r \in \{1, \dots, d\}$ et $j \leq \left[\frac{n_r}{2}\right]$ tels que $x_{r,j} \neq 0$. On peut toujours trouver une partie $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$, formée de moins de $\frac{n^2}{2}$ éléments (alors que $\mathcal{J}$ en a plus de $e^{\sqrt{n}}$ asymptotiquement) qui suffit à séparer les orbites séparables et à définir le nilcône de l'action. $\mathcal{S}$ est alors la clôture intégrale du sous-anneau engendré par $\mathcal{J}'$. (cf. [3]).

(h) Depuis Hilbert et Noether, $\mathcal{S}$ possède un "système de paramètres", c'est-à-dire $n-1$ éléments algébriquement indépendants qui engendrent un sous-anneau sur lequel $\mathcal{S}$ est un module de type fini. On peut les choisir homogènes pour le degré total. Mais on ne peut pas, sauf dans un nombre fini et très restreint de cas, les choisir multihomogènes. La situation est la même pour le sous-anneau $\mathcal{J}$ (cf. [1], [2]).

PRÉSENTATION DE LA TABLE

On suppose la matrice M sous sa forme de Jordan, formée de 1 ou 2 blocs, de dimension comprise entre 2 et 5.

Dans le cas d'un bloc de dimension n, on note $x_1, \dots, x_n$ les variables, et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$, et $F_n(a,z)$ la série de Poincaré.

Dans le cas de deux blocs de dimensions n_1 et n_2 $(2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 5)$, on note $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}$ les variables, puis $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{n_1,n_2}$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{n_1,n_2}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{n_1,n_2}$, et $F(a,b,z)$ la série de Poincaré.

Dans chaque cas la table donne les éléments suivants (on rappelle entre parenthèses à quelles formes binaires est attaché l'anneau $\mathcal{S}$ étudié d'après (c)) :

① les générateurs infinitésimaux D, H, D' de l'action correspondante de $sl(2,k)$ dans les polynômes (en particulier $\mathcal{S} = \operatorname{Ker} D$).

② le corps $\mathcal{K}$ des invariants rationnels de Γ, à l'aide de la base $\mathcal{B}$ donnée en (e).

③ un système de générateurs $\mathcal{G}$ de $\mathcal{S}$ formé d'éléments multihomogènes et minimal (en particulier par le nombre et les degrés de ses éléments). Il contient toujours $\mathcal{B}$, et ses autres éléments sont notés G_{ij} (resp. G_{ijk}) où (i,j) (resp. (i,j,k)) est leur multidegré.

La complétude d'un tel système peut se vérifier de trois façons :

- en calculant la série de Poincaré correspondante et constatant qu'elle coïncide avec celle de $\mathcal{S}$; ceci est évidemment facilité par la détermination préalable d'un système de paramètres
- par récurrence sur la dimension : en étudiant les restrictions à un hyperplan $\{x_{n,1} = 0\}$ des éléments de $\mathcal{S}$, qui tombent dans un autre anneau du même type, et relevant ces restrictions à l'aide des éléments de $\mathcal{G}$. (Un exemple simple de cette méthode, le cas de $\mathcal{S}_{2,4}$, a été rédigé dans [3]).

– en consultant l'abondante littérature du dix-neuvième siècle, où beaucoup de ces cas ont été étudiés.

Aucune de ces trois méthodes n'est rapide.

(4) les expressions "rationnelles" des éléments de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire comme fractions rationnelles des éléments de $\mathcal{B}$, de la forme décrite en ($\mathcal{L}$). C'est l'existence et l'unicité d'une telle expression qui a fourni la méthode de calcul, fait en partie sur machine.

(5) le poids de chaque élément de $\mathcal{G}$. C'est ce tableau qui permet, complété par les syzygies du numéro suivant, d'écrire les covariants de poids et de degré donné, comme on le fait dans l'appendice qui suit la table.

(6) une description partielle de l'anneau $\mathcal{S}$ par générateurs (le système $\mathcal{G}$) et relations (l'idéal Σ des premières syzygies, donné lui aussi par un système minimal de générateurs multihomogènes).

Le système $\mathcal{G}$ proposé est complet dans tous les cas sauf $\mathcal{S}_{4,5}$ pour lequel on n'a calculé que les générateurs de degré au plus 5, c'est-à-dire les 35 premiers éléments (sur 60). Une discordance avec Sylvester et Franklin (qui en trouvaient 61), la seule de la table, est expliquée en lieu utile

Par contre l'idéal Σ des premières syzygies n'a pas en général été calculé complètement (il faut quelquefois plusieurs centaines de générateurs pour le décrire); on ne donne ici que les syzygies génératrices jusqu'à un certain degré, précisé dans chaque cas.

(7) une description de l'anneau $\mathcal{J}$ par générateurs et relations, complète sauf encore dans le cas de $\mathcal{J}_{4,5}$, qui est d'ailleurs le seul qui n'admette pas de système de paramètres multihomogènes; dans les autres cas on donne ce système de paramètres (du moins un choix possible), et les relations qui définissent les derniers générateurs comme entiers sur ceux-ci. Remarquons que cette table contient tous les cas où l'anneau $\mathcal{J}$ admet un tel système de paramètres, aux trois exceptions près déjà signalées dans l'introduction ([1], th. 3), où le calcul est d'ailleurs très facile.

(8) les équations (invariantes) des orbites de k^n sous l'action de Γ séparées par l'anneau des invariants $\mathcal{S}$ (cf. (9)), classées par familles d'après leurs premières coordonnées $x_{n,j}$ non nulles, puis un sous-système $\mathcal{G}'$ suffisant pour les séparer ; les autres éléments de $\mathcal{G}$, en particulier, sont entiers sur ceux de $\mathcal{G}'$!

(9) le nilcône de l'action de Γ, des équations invariantes suffisantes pour le définir, puis pour comparaison un système de paramètres multihomogènes pour $\mathcal{J}$ et pour $\mathcal{S}$, lorsqu'ils existent.

(10) enfin les séries de Poincaré de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{J}$:
la première, notée $F_{n_1,n_2}(a,b,z)$ ou $F_n(a,z)$ suivant le cas (où a représente le degré, resp. a et b les degrés partiels par rapport aux variables x_i et y_j, et z représente le poids), a été directement recopiée des tables de Sylvester et Franklin [8] et [9], et n'est citée ici que pour aider la comparaison avec les autres éléments de la table. Elle pourrait aujourd'hui être calculée indépendamment à l'aide de la formule de Brion ([2], th. 1), ce qui n'a pas été fait ici.

On en déduit la série de Poincaré de $\mathcal{J}$: c'est $F(a,b,0)$ ou $F(a,0)$.

LA TABLE

$\boxed{\mathcal{S}_2}$ (Droite)

(1) $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ $\quad H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ $\quad D' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$

---

(2) $\mathcal{K}_2 = k(Z)$ $\quad Z = G_{10} = x_1$

---

(3) $\mathcal{G} = \{Z\}$ $\quad (\# \mathcal{G} = 1)$ $\qquad$ Le (4) est vide.

---

(5) $|P_{pm}| = p - 2m$; $\quad |Z| = 1$

---

(6) $\mathcal{S}_2 = k[Z]$

---

(7) $\mathcal{I}_2 = k$

---

(8) *Orbites séparées:* $\mathcal{F}_1 : x_1 \neq 0$

$\mathcal{G}' = \{Z\}$

---

(9) *Nilcône* : $x_1 = 0$ $\quad$ *Equation invariante* : $Z = 0$

Systèmes de paramètres : pour $\mathcal{I}_2 : \emptyset$; *pour* $\mathcal{S}_2 : \{Z\}$

---

(10) *Séries de Poincaré* :

$$F_2(a, z) = \frac{1}{1 - az} \quad ; \quad F_2(a, 0) = 1$$

$\boxed{\mathcal{S}_3}$ (Conique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$ $H = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ $D' = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$

---

② $\mathcal{K}_3 = k(Z, Q_2)$

$Z = G_{10} = x_1$

$Q_2 = G_{22} = x_2^2 - 2x_1x_3$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, Q_2\}$ $(\# \mathcal{G} = 2)$ Le ④ est vide

---

⑤ $|P_{pm}| = 2p - 2m$; $|Z| = 2$ $|Q_2| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_3 = k[Z, Q_2]$

---

⑦ $\mathcal{I}_3 = k[Q_2]$

---

⑧ <u>Orbites séparées</u> : $F_1 : x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3$

$\mathcal{G}' = \{Z, Q_2\}$

---

⑨ <u>Nilcône</u> : $x_1 = x_2 = 0$ Equations invariantes : $Z = Q_2 = 0$

Système de paramètres : pour $\mathcal{I}_3 : \{Q_2\}$; pour $\mathcal{S}_3 : \{Z, Q_2\}$

---

⑩ <u>Séries de Poincaré</u> :

$$F_3(a,z) = \frac{1}{(1-a^2)(1-az^2)} \quad ; \quad F_3(a,0) = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_4}$$ (Cubique)

① $$D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$H = 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$D' = 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + 4x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

---

② $\mathcal{K}_4 = k(Z, Q_2, Q_3)$

$Z = G_{10} = x_1$

$Q_2 = G_{22} = x_2^2 - 2x_1x_3$

$Q_3 = G_{33} = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, Q_2, Q_3, G_{46}\}$ $(\#\mathcal{G} = 4)$

$G_{46} = 3x_2^2x_3^2 - 6x_2^3x_4 - 8x_1x_3^3 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$

---

④ $G_{46} = Z^{-2}(Q_2^3 - Q_3^2)$

---

⑤ $|P_{pm}| = 3p - 2m$;

$|Z| = 3$ $|Q_2| = 2$ $|Q_3| = 3$ $|G_{46}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_4 = k[Z, Q_2, Q_3, G_{46}]/(\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = Q_3^2 - Q_2^3 + Z^2 G_{46}$ $|\mathcal{R}| = 6$

---

⑦ $\mathcal{I}_4 = k[G_{46}]$

---

⑧ <u>Orbites séparées</u> : $\mathcal{F}_1 : x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$

$\mathcal{F}_2 : x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4$

$\mathcal{G}' = \{Z, Q_2, Q_3, G_{46}\}$

---

(9) Nilcône: $x_1 = x_2 = 0$ Equations invariantes: $Z = Q_2 = 0$

Systèmes de paramètres: pour $\mathcal{J}_4$: $\{G_{46}\}$

pour $\mathcal{S}_4$: $\{Z, Q_2, G_{46}\}$, on a $Q_3^2 = Q_2^3 - Z^2 G_{46}$

---

(10) Séries de Poincaré

$$F_4(a, z) = \frac{1+a^3z^3}{(1-a^4)(1-a^2z^2)(1-az^3)} = \frac{1-az+a^2z^2}{(1-a^4)(1-az)(1-az^3)}$$

$$F_4(a, 0) = \frac{1}{1-a^4}$$

$\boxed{\mathcal{S}_5}$ (Quartique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_5}$

$H = 4x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} - 4x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}$

$D' = 4x_5 \frac{\partial}{\partial x_4} + 6x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + 6x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 4x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$

---

② $\mathcal{H}_5 = k\,(Z, Q_2, Q_3, Q_4)$

$Z = G_{10} = x_1$

$Q_2 = G_{22} = x_2^2 - 2x_1x_3$

$Q_3 = G_{33} = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$

$Q_4 = G_{24} = x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, Q_2, Q_3, Q_4, G_{36}\}$ $(\#\mathcal{G} = 5)$

$G_{36} = 2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_5 + 9x_1x_4^2 - 12x_1x_3x_5$

---

④ $G_{36} = Z^{-3}(Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4)$

---

⑤ $|P_{pm}| = 4p - 2m$;

$|Z| = 4$ $|Q_2| = 4$ $|Q_3| = 6$ $|Q_4| = 0$ $|G_{36}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_5 = k[Z, Q_2, Q_3, Q_4, G_{36}] / (\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4 - Z^3G_{36}$ $|\mathcal{R}| = 12$

---

⑦ $\mathcal{I}_5 = k[Q_4, G_{36}]$

---

⑧ <u>Orbites séparées:</u> $\mathcal{F}_1 : x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,\ x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5$

$\mathcal{F}_2 : x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4,\ x_3^3 - 3x_2x_3x_4 + 3x_2^2x_5$

$\mathcal{G}' = \{Z, Q_2, Q_3, Q_4, G_{36}\}$

---

⑨ <u>Nilcône:</u> $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Equations invariantes : $Z = Q_2 = Q_4 = 0$

Systèmes de paramètres : pour $\mathcal{I}_5$: $\{Q_4, G_{36}\}$

pour $\mathcal{S}_5$: $\{Z, Q_2, Q_4, G_{36}\}$,

on a $Q_3^2 = Q_2^3 - 3Z^2Q_2Q_4 + Z^3G_{36}$

---

⑩ <u>Séries de Poincaré:</u>

$$F_5(a,z) = \frac{1 + a^3z^6}{(1-a^2)(1-a^3)(1-az^4)(1-a^2z^4)} = \frac{1 - az^2 + a^2z^4}{(1-a^2)(1-a^3)(1-az^2)(1-az^4)}$$

$$F_5(a,0) = \frac{1}{(1-a^2)(1-a^3)}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{2,2}}$ (Droite + Droite)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}$

$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$

$D' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{2,2} = k(Z, X, P_1)$

$Z = G_{010} = y_1$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, P_1\}$ $(\# \mathcal{G} = 3)$ (Le ④ est vide)

---

⑤ $|P_{pqm}| = p + q - 2m$; $|Z| = 1$ $|X| = 1$ $|P_1| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_{2,2} = k[Z, X, P_1]$

---

⑦ $\mathcal{I}_{2,2} = k[P_1]$

---

⑧ Orbites séparées : $\mathcal{F}_{1,1}$: $x_1 \neq 0$, $x_1 y_2 - x_2 y_1$; $y_1 \neq 0$

$\mathcal{F}_{1,2}$: $x_1 \neq 0$; $y_1 = 0$, y_2

$\mathcal{F}_{2,1}$: $x_1 = 0$, x_2 ; $y_1 \neq 0$

$\mathcal{G}' = \{Z, X, P_1\}$

---

⑨ Nilcône : $x_1 = y_1 = 0$ Equations invariantes : $Z = X = 0$

Systèmes de paramètres : pour $\mathcal{I}_{2,2}$: $\{P_1\}$; pour $\mathcal{S}_{2,2}$: $\{Z, X, P_1\}$

---

⑩ Séries de Poincaré :

$$F_{2,2}(a,b,z) = \frac{1}{(1-ab)(1-az)(1-bz)}$$

$$F_{2,2}(a,b,0) = \frac{1}{1-ab}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{2,3}}$ (Droite + Conique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}$

$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - 2 y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}$

$D' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{2,3} = k(Z, Q_2, X, P_1)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1 y_3$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, Q_2, P_1, G_{212}\}$ $(\# \mathcal{G} = 5)$

$G_{212} = x_2^2 y_1 - 2x_1 x_2 y_2 + 2x_1^2 y_3$

---

④ $G_{212} = Z^{-1}(P_1^2 - X^2 Q_2)$

---

⑤ $|P_{pqm}| = p + 2q - 2m$;

$|Z| = 2$ $|Q_2| = 0$ $|X| = 1$ $|P_1| = 1$ $|G_{212}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_{2,3} = k[Z, X, Q_2, P_1, G_{212}] / (\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = P_1^2 - X^2 Q_2 - Z G_{212}$ $|\mathcal{R}| = 2$

---

⑦ $\mathcal{I}_{2,3} = k[Q_2, G_{212}]$

---

⑧ Orbites séparées : $\mathcal{F}_{1,1}$: $x_1 \neq 0$, $x_1y_2 - x_2y_1$; $y_1 \neq 0$, $y_2^2 - 2y_1y_3$

$\mathcal{F}_{1,2}$: $x_1 \neq 0$, $x_1y_3 - x_2y_2$; $y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$

$\mathcal{F}_{1,3}$: $x_1 \neq 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, y_3

$\mathcal{F}_{2,1}$: $x_1 = 0$, x_2 ; $y_1 \neq 0$, $y_2^2 - 2y_1y_3$

$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, P_1, G_{212}\}$

---

⑨ Nilcône : $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ Equations invariantes : $Z = X = Q_2 = 0$

Systèmes de paramètres : pour $\mathcal{J}_{2,3}$: $\{Q_2, G_{212}\}$

pour $\mathcal{S}_{2,3}$: $\{Z, X, Q_2, G_{212}\}$

on a $P_1^2 = X^2 Q_2 + Z G_{212}$

---

⑩ Séries de Poincaré :

$$F_{2,3}(a,b,z) = \frac{1+abz}{(1-b^2)(1-a^2b)(1-az)(1-bz^2)}$$

$$F_{2,3}(a,b,0) = \frac{1}{(1-b^2)(1-a^2b)}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{3,3}}$ (Conique + Conique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}$

$H = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}$

$D' = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{3,3} = k(Z, Q_2, X, P_1, P_2)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, Q_2, P_1, P_2, G_{202}\}$ $(\# \mathcal{G} = 6)$

$G_{202} = x_2^2 - 2x_1x_3$

---

④ $G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$

---

⑤ $|P_{pqm}| = 2p + 2q - 2m$;

$|Z| = 2$ $|Q_2| = 0$ $|X| = 2$ $|P_1| = 2$ $|P_2| = 0$ $|G_{202}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{S}_{3,3} = k[Z, X, Q_2, P_1, P_2, G_{202}] / (\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2 - Z^2G_{202}$ $|\mathcal{R}| = 4$

---

⑦ $\mathcal{I}_{3,3} = k[Q_2, P_2, G_{202}]$

---

(8) Orbites séparées: $\mathcal{F}_{1,1}: \begin{cases} x_1 \neq 0, x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_1 \\ y_1 \neq 0, y_2^2 - 2 y_1 y_3 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,2}: \begin{cases} x_1 \neq 0, x_2^2 - 2x_1 x_3 \\ y_1 = 0, y_2 \neq 0, x_1 y_3 - x_2 y_2 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,3}: \begin{cases} x_1 \neq 0, x_2^2 - 2x_1 x_3 \\ y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,1}: \begin{cases} x_1 = 0, x_2 \neq 0, x_2 y_2 - x_3 y_1 \\ y_1 \neq 0, y_2^2 - 2 y_1 y_3 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{3,1}: \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \\ y_1 \neq 0, y_2^2 - 2 y_1 y_3 \end{cases}$

$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, P_1, P_2, G_{202}\}$

---

(9) Nilcône: $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ Equations invariantes: $Z = X = Q_2 = G_{202} = 0$

Systèmes de paramètres: pour $\mathcal{J}_{3,3}: \{Q_2, P_2, G_{202}\}$

pour $\mathcal{S}_{3,3}: \{Z, X, Q_2, P_2, G_{202}\}$

on a $P_1^2 = X^2 Q_2 + 2XZP_2 + Z^2 G_{202}$

---

(10) Séries de Poincaré:

$$F_{3,3}(a,b,z) = \frac{1 + abz^2}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)(1-az^2)(1-bz^2)}$$

$$F_{3,3}(a,b,0) = \frac{1}{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)}$$

$$\boxed{\mathcal{G}_{2,4}} \qquad (\textit{Droite + Cubique})$$

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} - 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$D' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 4y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{2,4} = k\,(Z, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, X, P_1)$

$Z = G_{010} = y_1$

$\mathcal{Q}_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$\mathcal{Q}_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, \mathcal{Q}_2, P_1, \mathcal{Q}_3, G_{123}, G_{212}, G_{046}, G_{134}, G_{224}, G_{313}, G_{235}, G_{336}\}$

$(\#\mathcal{G} = 13)$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) - x_1(y_2y_3 - 3y_1y_4)$

$G_{212} = x_2^2y_1 - 2x_1x_2y_2 + 2x_1^2y_3$

$G_{046} = 3y_2^2y_3^2 - 6y_2^3y_4 - 8y_1y_3^3 + 18y_1y_2y_3y_4 - 9y_1^2y_4^2$

$G_{134} = x_2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_1(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$

$G_{224} = x_2^2(y_2^2 - 2y_1y_3) - 2x_1x_2(y_2y_3 - 3y_1y_4) + 2x_1^2(2y_3^2 - 3y_2y_4)$

$G_{313} = 6x_1^3y_4 - 6x_1^2x_2y_3 + 3x_1x_2^2y_2 - x_2^3y_1$

$G_{235} = x_2^2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 2x_1x_2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$
$\quad - 2x_1^2(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4)$

$G_{336} = x_2^3(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 3x_1x_2^2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$
$\quad - 6x_1^2x_2(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4) + 2x_1^3(4y_3^3 - 9y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2)$

---

④
$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$
$$G_{212} = Z^{-1}(P_1^2 - X^2Q_2)$$
$$G_{046} = Z^{-2}(Q_2^3 - Q_3^2)$$
$$G_{134} = Z^{-1}(XQ_2^2 - P_1Q_3)$$
$$G_{224} = Z^{-2}(X^2Q_2^2 - 2XP_1Q_3 + P_1^2Q_2)$$
$$G_{313} = Z^{-2}(2X^3Q_3 - 3X^2P_1Q_2 + P_1^3)$$
$$G_{235} = Z^{-2}(X^2Q_2Q_3 - 2XP_1Q_2^2 + P_1^2Q_2)$$
$$G_{336} = Z^{-3}(2X^3Q_3^2 - X^3Q_2^3 - 3X^2P_1Q_2Q_3 + 3XP_1^2Q_2^2 - P_1^3Q_3)$$

---

⑤ $|P_{pqm}| = p + 3q - 2m$;

$|Z| = 3$ $|X| = 1$ $|Q_2| = 2$ $|P_1| = 2$ $|Q_3| = 3$ $|G_{123}| = 1$ $|G_{212}| = 1$

$|G_{046}| = 0$ $|G_{134}| = 2$ $|G_{224}| = 0$ $|G_{313}| = 0$ $|G_{235}| = 1$ $|G_{336}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{G}_{2,4} = k[Z, X, Q_2, P_1, Q_3, G_{123}, G_{212}, G_{046}, G_{134}, G_{224}, G_{313}, G_{235}, G_{336}]/(\Sigma)$

L'idéal Σ des (premières) syzygies a 35 générateurs, qui sont les suivants

(σ_1)	$(1,3,3)$	$ZG_{123} - XQ_3 + P_1Q_2 = 0$	$\lvert\sigma_1\rvert = 4$
(σ_2)	$(2,2,2)$	$ZG_{212} + X^2Q_2 - P_1^2 = 0$	$\lvert\sigma_2\rvert = 4$
(σ_3)	$(1,4,4)$	$ZG_{134} - XQ_2^2 + P_1Q_3 = 0$	$\lvert\sigma_3\rvert = 5$
(σ_4)	$(2,3,4)$	$XG_{134} + Q_2G_{212} + P_1G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_4\rvert = 3$
(σ_5)	$(2,3,4)$	$ZG_{224} - XG_{134} + P_1G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_5\rvert = 3$
(σ_6)	$(3,2,3)$	$ZG_{313} - P_1G_{212} - 2X^2G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_6\rvert = 3$
(σ_7)	$(0,6,6)$	$Z^2G_{046} - Q_2^3 + Q_3^2 = 0$	$\lvert\sigma_7\rvert = 6$
(σ_8)	$(1,5,6)$	$XZG_{046} - Q_2G_{134} + Q_3G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_8\rvert = 4$
(σ_9)	$(2,4,5)$	$P_1G_{134} + Q_3G_{212} + XQ_2G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_9\rvert = 4$
(σ_{10})	$(2,4,5)$	$ZG_{235} - XQ_2G_{123} + P_1G_{134} = 0$	$\lvert\sigma_{10}\rvert = 4$
(σ_{11})	$(2,4,6)$	$G_{123}^2 - Q_2G_{224} + X^2G_{046} = 0$	$\lvert\sigma_{11}\rvert = 2$
(σ_{12})	$(3,3,5)$	$P_1G_{224} - Q_2G_{313} + 2XG_{235} = 0$	$\lvert\sigma_{12}\rvert = 2$
(σ_{13})	$(3,3,5)$	$G_{123}G_{212} - XG_{235} + Q_2G_{313} = 0$	$\lvert\sigma_{13}\rvert = 2$

(σ_{14}) $(4,2,4)$ $G_{212}^2 - X^2 G_{224} - P_1 G_{313} = 0$ $|\sigma_{14}| = 2$

(σ_{15}) $(1,6,7)$ $Q_3 G_{134} - Q_2^2 G_{123} - Z P_1 G_{046} = 0$ $|\sigma_{15}| = 5$

(σ_{16}) $(2,5,7)$ $Q_2 G_{235} - Q_3 G_{224} + 2 X P_1 G_{046} = 0$ $|\sigma_{16}| = 3$

(σ_{17}) $(2,5,7)$ $2 G_{123} G_{134} - Q_2 G_{235} - Q_3 G_{224} = 0$ $|\sigma_{17}| = 3$

(σ_{18}) $(3,4,6)$ $Q_3 G_{313} - P_1 G_{235} - 2 X G_{123}^2 = 0$ $|\sigma_{18}| = 3$

(σ_{19}) $(3,4,6)$ $Z G_{336} + P_1 G_{235} - X G_{123}^2 + X^3 G_{046} = 0$ $|\sigma_{19}| = 3$

(σ_{20}) $(3,4,6)$ $G_{212} G_{134} + P_1 G_{235} + X G_{123}^2 + X^3 G_{046} = 0$ $|\sigma_{20}| = 3$

(σ_{21}) $(4,3,6)$ $X G_{336} - G_{212} G_{224} - G_{123} G_{313} = 0$ $|\sigma_{21}| = 1$

(σ_{22}) $(2,6,8)$ $Q_3 G_{235} - Q_2 G_{123}^2 + P_1^2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{22}| = 4$

(σ_{23}) $(2,6,8)$ $G_{134}^2 - Q_2 G_{123}^2 + Z G_{212} G_{046} = 0$ $|\sigma_{23}| = 4$

(σ_{24}) $(3,5,8)$ $G_{134} G_{224} - G_{123} G_{235} + X G_{212} G_{046} = 0$ $|\sigma_{24}| = 2$

(σ_{25}) $(3,5,8)$ $Q_2 G_{336} - G_{123} G_{235} - X G_{212} G_{046} = 0$ $|\sigma_{25}| = 2$

(σ_{26}) $(4,4,7)$ $G_{212} G_{235} + P_1 G_{336} + X G_{123} G_{224} = 0$ $|\sigma_{26}| = 2$

(σ_{27}) $(4,4,7)$ $G_{134} G_{313} + G_{212} G_{235} - X G_{123} G_{224} = 0$ $|\sigma_{27}| = 2$

(σ_{28}) $(3,6,9)$ $G_{134} G_{235} - P_1 G_{212} G_{046} - Q_2 G_{123} G_{224} = 0$ $|\sigma_{28}| = 3$

(σ_{29}) $(3,6,9)$ $Q_3 G_{336} - G_{123}^3 + 3 X^2 G_{123} G_{046} - Z G_{046} G_{313} = 0$ $|\sigma_{29}| = 3$

(σ_{30}) $(4,5,9)$ $G_{123} G_{336} - G_{224} G_{235} + X G_{046} G_{313} = 0$ $|\sigma_{30}| = 1$

(σ_{31}) $(5,4,8)$ $G_{212} G_{336} - X G_{224}^2 + G_{313} G_{235} = 0$ $|\sigma_{31}| = 1$

(σ_{32}) $(4,6,10)$ $G_{235}^2 - Q_2 G_{224}^2 + G_{212}^2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{32}| = 2$

(σ_{33}) $(4,6,10)$ $G_{134} G_{336} - G_{123}^2 G_{224} + G_{212}^2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{33}| = 2$

(σ_{34}) $(5,6,11)$ $G_{235} G_{336} - G_{123} G_{224}^2 - G_{212} G_{046} G_{313} = 0$ $|\sigma_{34}| = 1$

(σ_{35}) $(6,6,12)$ $G_{336}^2 - G_{224}^3 + G_{046} G_{313}^2 = 0$ $|\sigma_{35}| = 0$

---

7 $\quad J_{2,4} = k\left[G_{046}, G_{224}, G_{313}, G_{336}\right] / (\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = (\sigma_{35}) = G_{336}^2 - G_{224}^3 + G_{046} G_{313}^2$ $\qquad |\mathcal{R}| = 0$

---

(8) Orbites séparées :

$\mathcal{F}_{1,1}$: $x_1 \neq 0,\ x_1y_2 - x_2y_1$; $y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$\mathcal{F}_{2,1}$: $x_1 = 0,\ x_2$; $y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$\mathcal{F}_{1,2}$: $x_1 \neq 0,\ x_1y_3 - x_2y_2$; $y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4$

$\mathcal{F}_{2,2}$: $x_1 = 0,\ x_2$; $y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4$

$\mathcal{F}_{1,3}$: $x_1 \neq 0,\ x_1y_4 - x_2y_3$; $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0$

$\mathcal{F}_{1,4}$: $x_1 \neq 0$; $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4$

$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, P_1, Q_3, G_{046}, G_{224}, G_{313}\}$

---

(9) Nilcône : $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ Equations invariantes : $X = Z = Q_2 = 0$

Système de paramètres pour $J_{2,4}$: $\{G_{046}, G_{224}, G_{313}\}$

on a $G_{336}^2 = G_{224}^3 - G_{046}G_{313}^2$

---

(10) Séries de Poincaré : $F_{2,4}(a,b,z) = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{D'}$, avec

$$N = (1+a^3b^3) + (a^2b + ab^2 + a^2b^3 - a^4b^3)z + (ab + ab^3 - a^3b^3 - a^3b^5)z^2 + (b^3 - a^2b^3 - a^3b^4 - a^2b^5)z^3 + (-ab^3 - a^4b^6)z^4$$

$$D = (1-b^4)(1-a^3b)(1-a^2b^2)(1-az)(1-b^2z^2)(1-bz^3)$$

$$N' = (1-ab+a^2b^2) + (-b + a^2b + 2ab^2 - a^3b^2 - a^2b^3)z + (ab + b^2 - 2a^2b^2 - ab^3 + a^3b^3)z^2 + (-ab^2 + a^2b^3 - a^3b^4)z^3$$

$$D' = (1-b^4)(1-ab)(1-a^3b)(1-az)(1-bz)(1-bz^3)$$

$$F_{2,4}(a,b,0) = \frac{1+a^3b^3}{(1-b^4)(1-a^3b)(1-a^2b^2)} = \frac{1-ab+a^2b^2}{(1-b^4)(1-ab)(1-a^3b)}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{3,4}}$ (Conique + Cubique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$H = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 3y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} - 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$D' = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 4y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{3,4} = k(Z, Q_2, Q_3, X, P_1, P_2)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{ Z, X, Q_2, P_1, P_2, G_{202}, Q_3, G_{123}, G_{124}, G_{213}, G_{046}, G_{135}, G_{236}, G_{326}, G_{349} \}$ $(\# \mathcal{G} = 15)$

$G_{202} = x_2^2 - 2x_1x_3$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_1(3y_1y_4 - y_2y_3)$

$G_{124} = x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_2(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_1(2y_3^2 - 3y_2y_4)$

$G_{213} = 3x_1^2y_4 - 3x_1x_2y_3 + (x_2^2 + x_1x_3)y_2 - x_2x_3y_1$

$G_{046} = 3y_2^2y_3^2 - 6y_2^3y_4 - 8y_1y_3^3 + 18y_1y_2y_3y_4 - 9y_1^2y_4^2$

$G_{135} = x_3(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$
$\quad - x_1(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4)$

$G_{236} = -x_3^2(y_1y_2^2 - 2y_1^2y_3) + 2x_2x_3(y_2^3 - 2y_1y_2y_3) - 2(x_2^2 + x_1x_3)(y_2^2y_3 - 2y_1y_3^2)$
$\quad + 6x_1x_2(y_2^2y_4 - 2y_1y_3y_4) + x_1^2(2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2)$

$G_{326} = 2x_3^3y_1^2 - 6x_2x_3^2y_1y_2 + 4x_2^2x_3(y_2^2 + y_1y_3) + x_1x_3^2(y_2^2 + 4y_1y_3)$
$\quad - 4x_2^3y_2y_3 - 2x_1x_2x_3(5y_2y_3 + 3y_1y_4) + 2x_1x_2^2(4y_3^2 + 3y_2y_4)$
$\quad + 2x_1^2x_3(y_3^2 + 3y_2y_4) - 18x_1^2x_2y_3y_4 + 9x_1^3y_4^2$

$$G_{349} = -2x_3^3(y_1y_2^3 - 3y_1^2y_2y_3 + 3y_1^3y_4) + 3x_2x_3^2(y_2^4 - 2y_1y_2^2y_3 - 4y_1^2y_3^2 + 6y_1^2y_2y_4)$$
$$-3(2x_2^2x_3 + x_1x_3^2)(y_2^3y_3 - 4y_1y_2y_3^2 + 3y_1y_2^2y_4) + 2(x_2^3 + 3x_1x_2x_3)(3y_2^3y_4 - 4y_1y_3^3)$$
$$+6(2x_1x_2^2 + x_1^2x_3)(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_3y_4 + 3y_1y_3^2y_4)$$
$$-3x_1^2x_2(4y_3^4 - 6y_2y_3^2y_4 - 9y_2^2y_4^2 + 18y_1y_3y_4^2) + 3x_1^3(4y_3^3y_4 - 9y_2y_3y_4^2 + 9y_1y_4^3)$$

---

(4)
$$G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$$
$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$
$$G_{124} = Z^{-2}(XQ_2^2 - P_1Q_3 + ZP_2Q_2)$$
$$G_{213} = Z^{-2}(X^2Q_3 - XP_1Q_2 + ZP_1P_2)$$
$$G_{046} = Z^{-2}(Q_2^3 - Q_3^2)$$
$$G_{135} = Z^{-2}(XQ_2Q_3 - P_1Q_2^2 + ZP_2Q_3)$$
$$G_{236} = Z^{-3}(X^2Q_3^2 - 2XP_1Q_2Q_3 + P_1^2Q_2^2 - Z^2P_2^2Q_2)$$
$$G_{326} = Z^{-4}(X^3Q_3^2 - 2X^2P_1Q_2Q_3 + XP_1^2Q_2^2 + 2XZP_1P_2Q_3 + XZ^2P_2^2Q_2 - 2ZP_1^2P_2Q_2 + 2Z^3P_2^3)$$
$$G_{349} = Z^{-5}(X^3Q_3^3 - 3X^2P_1Q_2Q_3^2 + 3XP_1^2Q_2^2Q_3 - 3XZ^2P_2^2Q_2Q_3 - P_1^3Q_2^3 + 3Z^2P_1P_2^2Q_2^2 - 2Z^3P_2^3Q_3)$$

---

(5) $|P_{pqm}| = 2p + 3q - 2m$;

$|Z| = 3$ $|X| = 2$ $|Q_2| = 2$ $|P_1| = 3$ $|P_2| = 1$ $|G_{202}| = 0$ $|Q_3| = 3$

$|G_{123}| = 2$ $|G_{124}| = 0$ $|G_{213}| = 1$ $|G_{046}| = 0$ $|G_{135}| = 1$

$|G_{236}| = 1$ $|G_{326}| = 0$ $|G_{349}| = 0$

---

(6) $\mathcal{G}_{3,4} = k[\mathcal{G}]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies a plusieurs dizaines de générateurs. On donne ici ceux de degré total au plus 7, soit les 26 premiers (il y en a 3 de degré 4, 6 de degré 5, 10 de degré 6, et 7 de degré 7) ; ce sont :

(σ_1)	$(2,2,2)$	$P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2 - Z^2G_{202} = 0$	$\lvert\sigma_1\rvert = 6$
(σ_2)	$(2,2,3)$	$P_1P_2 - ZG_{213} + XG_{123} = 0$	$\lvert\sigma_2\rvert = 4$
(σ_3)	$(1,3,3)$	$P_1Q_2 - XQ_3 + ZG_{123} = 0$	$\lvert\sigma_3\rvert = 5$

(σ_4) $(3,2,4)$ $P_1 G_{213} - Z P_2 G_{202} + X Q_2 G_{202} - 2X P_2^2 + X^2 G_{124} = 0$ $|\sigma_4| = 4$

(σ_5) $(2,3,4)$ $P_1 G_{123} + Z Q_2 G_{202} + X P_2 Q_2 + XZ G_{124} = 0$ $|\sigma_5| = 5$

(σ_6) $(2,3,5)$ $P_1 G_{124} + Q_2 G_{213} + 2 P_2 G_{123} + Q_3 G_{202} = 0$ $|\sigma_6| = 3$

(σ_7) $(2,3,5)$ $X G_{135} - P_2 G_{123} - Q_2 G_{213} = 0$ $|\sigma_7| = 3$

(σ_8) $(1,4,4)$ $P_1 Q_3 - Z P_2 Q_2 + Z^2 G_{124} - X Q_2^2 = 0$ $|\sigma_8| = 6$

(σ_9) $(1,4,5)$ $P_2 Q_3 - Z G_{135} + Q_2 G_{123} = 0$ $|\sigma_9| = 4$

(σ_{10}) $(4,2,6)$ $G_{213}^2 - G_{202} P_2^2 - X G_{326} = 0$ $|\sigma_{10}| = 2$

(σ_{11}) $(3,3,6)$ $G_{213} G_{123} - X G_{236} + X P_2 G_{124} + P_2 Q_2 G_{202} = 0$ $|\sigma_{11}| = 3$

(σ_{12}) $(3,3,6)$ $2 G_{213} G_{123} - Z G_{326} - X G_{236} + 2 P_2^3 = 0$ $|\sigma_{12}| = 3$

(σ_{13}) $(2,4,6)$ $G_{123}^2 - Z G_{236} - P_2^2 Q_2 = 0$ $|\sigma_{13}| = 4$

(σ_{14}) $(2,4,6)$ $Q_3 G_{213} - X Q_2 G_{124} + Z P_2 G_{124} - P_2^2 Q_2 = 0$ $|\sigma_{14}| = 4$

(σ_{15}) $(2,4,6)$ $Z G_{236} + X^2 G_{046} + 2 Z P_2 G_{124} + Q_2^2 G_{202} + 2 P_1 G_{135} - P_2^2 Q_2 = 0$ $|\sigma_{15}| = 4$

(σ_{16}) $(2,4,6)$ $X Q_2 G_{124} + Z P_2 G_{124} + Q_2^2 G_{202} + P_1 G_{135} - P_2^2 Q_2 = 0$ $|\sigma_{16}| = 4$

(σ_{17}) $(1,5,6)$ $Q_3 G_{123} - Z Q_2 G_{124} + XZ G_{046} + P_2 Q_2^2 = 0$ $|\sigma_{17}| = 5$

(σ_{18}) $(1,5,7)$ $Q_2 G_{135} - Q_3 G_{124} + P_1 G_{046} = 0$ $|\sigma_{18}| = 3$

(σ_{19}) $(0,6,6)$ $Q_3^2 - Q_2^3 + Z^2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{19}| = 6$

(σ_{20}) $(4,3,7)$ $P_1 G_{326} - P_2 G_{202} G_{123} + X G_{124} G_{213} - 2 P_2^2 G_{213} + Q_2 G_{202} G_{213} = 0$ $|\sigma_{20}| = 3$

(σ_{21}) $(3,4,7)$ $P_1 G_{236} + X G_{123} G_{124} + Q_2 G_{202} G_{123} + P_2 Q_2 G_{213} = 0$ $|\sigma_{21}| = 4$

(σ_{22}) $(3,4,8)$ $Q_2 G_{326} - G_{213} G_{135} + P_2 G_{236} - P_2^2 G_{124} = 0$ $|\sigma_{22}| = 2$

(σ_{23}) $(3,4,8)$ $X G_{124}^2 - 2 G_{213} G_{135} + X G_{202} G_{046} - 2 P_2^2 G_{124} + Q_2 G_{326} = 0$ $|\sigma_{23}| = 2$

(σ_{24}) $(2,5,8)$ $Z G_{124}^2 - Q_2 G_{236} + Z G_{202} G_{046} - 2 P_2 Q_2 G_{124} + 2 X P_2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{24}| = 3$

(σ_{25}) $(2,5,8)$ $Q_2 G_{236} - G_{123} G_{135} + P_2 Q_2 G_{124} - X P_2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{25}| = 3$

(σ_{26}) $(1,6,8)$ $Q_3 G_{135} - Q_2^2 G_{124} + X Q_2 G_{046} + Z P_2 G_{046} = 0$ $|\sigma_{26}| = 4$

---

7. $J_{3,4} = k\left[G_{202}, G_{124}, G_{046}, G_{326}, G_{349}\right] / (\mathcal{R})$

$$\mathcal{R} = G_{349}^2 + G_{326}^2 G_{046} - 2 G_{326} G_{202} G_{124} G_{046} - G_{326} G_{124}^3 - 2 G_{202}^2 G_{124}^2 G_{046} - G_{124}^4 G_{202} - G_{202}^3 G_{046}^2$$

$|\mathcal{R}| = 0$

---

(8) Orbites séparées : $\mathcal{F}_{1,1} : \begin{cases} x_1 \neq 0 ,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 ,\ x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_1 \\ y_1 \neq 0 ,\ y_2^2 - 2 y_1 y_3 ,\ y_2^3 - 3 y_1 y_2 y_3 + 3 y_1^2 y_4 \end{cases}$

$$\mathcal{F}_{1,2} : \begin{cases} x_1 \neq 0 ,\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 \\ y_1 = 0 ,\ y_2 \neq 0 ,\ x_1 y_3 - x_2 y_2 ,\ x_1 y_4 - x_2 y_3 + x_3 y_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1,3} : \begin{cases} x_1 \neq 0 ,\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 \\ y_1 = 0 ,\ y_2 = 0 ,\ y_3 \neq 0 ,\ x_1 y_4 - x_2 y_3 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1,4} : \begin{cases} x_1 \neq 0 ,\ x_2^2 - 2 x_1 x_3 \\ y_1 = 0 ,\ y_2 = 0 ,\ y_3 = 0 ,\ y_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2,1} : \begin{cases} x_1 = 0 ,\ x_2 \neq 0 ,\ x_2 y_2 - x_3 y_1 \\ y_1 \neq 0 ,\ y_2^2 - 2 y_1 y_3 ,\ y_2^3 - 3 y_1 y_2 y_3 + 3 y_1^2 y_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2,2} : \begin{cases} x_1 = 0 ,\ x_2 \neq 0 ,\ x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_1 = 0 ,\ y_2 \neq 0 ,\ y_3^2 - 2 y_2 y_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3,1} : \begin{cases} x_1 = 0 ,\ x_2 = 0 ,\ x_3 \\ y_1 \neq 0 ,\ y_2^2 - 2 y_1 y_3 ,\ y_2^3 - 3 y_1 y_2 y_3 + 3 y_1^2 y_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3,2} : \begin{cases} x_1 = 0 ,\ x_2 = 0 ,\ x_3 \\ y_1 = 0 ,\ y_2 \neq 0 ,\ y_3^2 - 2 y_2 y_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{G}' = \{ Z , X , Q_2 , P_2 , G_{202} , Q_3 , G_{213} , G_{124} , G_{046} \}$$

---

(9) Nilcône : $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ Equations invariantes : $X = G_{202} = Z = Q_2 = 0$

Système de paramètres pour $J_{3,4} : \{ G_{202} , G_{124} , G_{046} , G_{326} \}$

on a
$$G_{349}^2 = - G_{326}^2 G_{046} + 2 G_{326} G_{202} G_{124} G_{046} + G_{326} G_{124}^3 + 2 G_{202}^2 G_{124}^2 G_{046} + G_{124}^4 G_{202} + G_{202}^3 G_{046}^2$$

---

(10) Séries de Poincaré : $F_{3,4}(a,b,z) = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{D'}$ avec

$$N = (1 + a^3 b^4) + (ab + a^2 b + ab^3 + a^2 b^3) z + (ab^2 + a^2 b^2 + a^3 b^2 + a^2 b^4 - a^4 b^4 - a^3 b^6) z^2 + (ab + b^3 - a^2 b^3 - ab^5 - a^2 b^5 - a^3 b^5) z^3 + (-a^2 b^4 - a^3 b^4 - a^2 b^6 - a^3 b^6) z^4 + (-ab^3 - a^4 b^7) z^5$$

$$D = (1 - a^2)(1 - b^4)(1 - ab^2)(1 - a^3 b^2)(1 - a z^2)(1 - b^2 z^2)(1 - b z^3)$$

$$N' = (1 + a^3 b^4) + (-b + ab + a^2 b + ab^3 + a^2 b^3 - a^3 b^5) z + (b^2 + a^3 b^2 - ab^4 - a^4 b^4) z^2 + (ab - a^2 b^3 - a^3 b^3 - a^2 b^5 - a^3 b^5 + a^4 b^5) z^3 + (-ab^2 - a^4 b^6) z^4$$

$$D' = (1 - a^2)(1 - b^4)(1 - ab^2)(1 - a^3 b^2)(1 - a z^2)(1 - b z)(1 - b z^3)$$

$$F_{3,4}(a,b,0) = \frac{1 + a^3 b^4}{(1 - a^2)(1 - b^4)(1 - ab^2)(1 - a^3 b^2)}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{4,4}}$ (Cubique + Cubique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$H = 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + 3y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} - 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_4}$

$D' = 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + 4x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 3y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 4y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 3y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{4,4} = k(Z, Q_2, Q_3, X, P_1, P_2, P_3)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1 y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_4$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_3 y_1$

$P_3 = G_{113} = x_1 y_4 - x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_4 y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{ Z, X, Q_2, P_1, P_2, P_3, G_{202}, Q_3, G_{123}, G_{124}, G_{213}, G_{214}, G_{303}, G_{046}, G_{135}, G_{136}, G_{225}, G_{226}, G_{315}, G_{316}, G_{406}, G_{147}, G_{237}, G_{327}, G_{417}, G_{339} \}$ $(\# \mathcal{G} = 26)$

$G_{202} = x_2^2 - 2x_1 x_3$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1 y_3) + x_1(3y_1 y_4 - y_2 y_3)$

$G_{124} = x_3(y_2^2 - 2y_1 y_3) + x_2(3y_1 y_4 - y_2 y_3) + x_1(2y_3^2 - 3y_2 y_4)$

$G_{213} = (x_2^2 - 2x_1 x_3) y_2 + (3x_1 x_4 - x_2 x_3) y_1$

$G_{214} = (x_2^2 - 2x_1 x_3) y_3 + (3x_1 x_4 - x_2 x_3) y_2 + (2x_3^2 - 3x_2 x_4) y_1$

$G_{303} = x_2^3 - 3x_1 x_2 x_3 + 3x_1^2 x_4$

$G_{046} = 3y_2^2 y_3^2 - 6y_2^3 y_4 - 8y_1 y_3^3 + 18 y_1 y_2 y_3 y_4 - 9y_1^2 y_4^2$

$$G_{135} = x_3(y_2^3 - 3y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_4) - x_2(y_2^2 y_3 - 4y_1 y_3^2 + 3y_1 y_2 y_4) - x_1(y_2 y_3^2 - 3y_2^2 y_4 + 3y_1 y_3 y_4)$$

$$G_{136} = 3x_4(y_2^3 - 3y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_4) - 3x_3(y_2^2 y_3 - 4y_1 y_3^2 + 3y_1 y_2 y_4) - 3x_2(y_2 y_3^2 - 3y_2^2 y_4 + 3y_1 y_3 y_4) + x_1(4y_3^3 - 9y_2 y_3 y_4 + 9y_1 y_4^2)$$

$$G_{225} = (3x_1x_4 - x_2x_3)(y_2^2 - 2y_1y_3) - (x_2^2 - 2x_1x_3)(3y_1y_4 - y_2y_3)$$

$$G_{226} = (2x_3^2 - 3x_2x_4)(y_2^2 - 2y_1y_3) - (x_2x_3 - 3x_1x_4)(y_2y_3 - 3y_1y_4) + (x_2^2 - 2x_1x_3)(2y_3^2 - 3y_2y_4)$$

$$\begin{aligned} G_{315} = {} & (x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)y_3 - (x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)y_2 \\ & - (x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{316} = {} & 3(x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)y_4 - 3(x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)y_3 \\ & - 3(x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)y_2 + (4x_3^3 - 9x_2x_3x_4 + 9x_1x_4^2)y_1 \end{aligned}$$

$$G_{406} = 3x_2^2x_3^2 - 6x_2^3x_4 - 8x_1x_3^3 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$$

$$\begin{aligned} G_{147} = {} & 3x_4(y_2^4 - 4y_1y_2^2y_3 + 4y_1^2y_3^2) - 3x_3(y_2^3y_3 - 2y_1y_2y_3^2 - 3y_1y_2^2y_4 + 6y_1^2y_3y_4) \\ & + x_2(3y_2^2y_3^2 - 4y_1y_3^3 - 3y_2^3y_4 + 9y_1^2y_4^2) - x_1(2y_2y_3^3 - 9y_2^2y_3y_4 - 6y_1y_3^2y_4 + 9y_1y_2y_4^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{237} = {} & 3x_3x_4(2y_1^2y_3 - y_1y_2^2) + (x_3^2 + 3x_2x_4)y_2^3 - 6x_2x_4y_1y_2y_3 - 6x_3^2y_1^2y_4 \\ & - (3x_1x_4 + 5x_2x_3)y_2^2y_3 + 2(3x_1x_4 + x_2x_3)y_1y_3^2 + 12x_2x_3y_1y_2y_4 \\ & + 4(x_2^2 + x_1x_3)y_2y_3^2 - 3x_2^2y_2^2y_4 - 6(x_2^2 + 2x_1x_3)y_1y_3y_4 \\ & + 3x_1x_2(-2y_3^3 + 2y_2y_3y_4 + 3y_1y_4^2) + x_1^2(6y_3^2y_4 - 9y_2y_4^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{327} = {} & (x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)(y_2^2 - 2y_1y_3) + (x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)(y_2y_3 - 3y_1y_4) \\ & - (x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)(2y_3^2 - 3y_2y_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{417} = {} & 3(x_2^4 - 4x_1x_2^2x_3 + 4x_1^2x_3^2)y_4 - 3(x_2^3x_3 - 2x_1x_2x_3^2 - 3x_1x_2^2x_4 + 6x_1^2x_3x_4)y_3 \\ & + (3x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 3x_2^3x_4 + 9x_1^2x_4^2)y_2 - (2x_2x_3^3 - 3x_2^2x_3x_4 - 6x_1x_3^2x_4 + 9x_1x_2x_4^2)y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{339} = {} & (4x_3^3 - 9x_2x_3x_4 + 9x_1x_4^2)(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) \\ & - 3(x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4) \\ & + 3(x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4) \\ & - (x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)(4y_3^3 - 9y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2) \end{aligned}$$

(Le G_{237} cité ici rompt la symétrie ; c'est un choix qui simplifie l'expression rationnelle du numéro suivant)

4

$$G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$$

$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$

$$G_{124} = Z^{-2}(XQ_2^2 - P_1Q_3 + ZP_2Q_2)$$

$$G_{213} = Z^{-2}(X^2Q_3 - XP_1Q_2 - 3XZ^2P_3 + ZP_1P_2)$$

$$G_{214} = Z^{-3}(X^2Q_2^2 + XP_1Q_3 + 3XZP_2Q_2 - 2P_1^2Q_2 - 3Z^2P_1P_3 + 2Z^2P_2^2)$$

$$G_{303} = Z^{-3}(X^3Q_3 - 3X^2Z^2P_3 + 3XZP_1P_2 - P_1^3)$$

$$G_{046} = Z^{-2}(Q_2^3 - Q_3^2)$$

$$G_{135} = Z^{-2}(XQ_2Q_3 - P_1Q_2^2 + ZP_2Q_3)$$

$$G_{136} = Z^{-3}(XQ_2^3 + 2XQ_3^2 - 3P_1Q_2Q_3 + 3ZP_2Q_2^2 - 3Z^2P_3Q_3)$$

$$G_{225} = Z^{-3}(2X^2Q_2Q_3 - XP_1Q_2^2 + 2XZP_2Q_3 - 3XZ^2P_3Q_2 - P_1^2Q_3 + ZP_1P_2Q_2)$$

$$G_{226} = Z^{-4}(-X^2Q_3^2 + 2XP_1Q_2Q_3 + XZP_2Q_2^2 + 3XZ^2P_3Q_3 - P_1^2Q_2^2 - ZP_1P_2Q_3$$
$$-3Z^2P_1P_3Q_2 + 2Z^2P_2^2Q_2)$$

$$G_{315} = Z^{-4}(-X^3Q_2Q_3 + X^2P_1Q_2^2 - X^2ZP_2Q_3 + 3X^2Z^2P_3Q_2 + XP_1^2Q_3$$
$$+XZP_1P_2Q_2 + 3XZ^3P_2P_3 - P_1^3Q_2 - 3Z^2P_1^2P_3 + Z^2P_1P_2^2)$$

$$G_{316} = Z^{-5}(-X^3Q_2^3 + 2X^3Q_3^2 - 3X^2P_1Q_2Q_3 - 3X^2ZP_2Q_2^2 - 9X^2Z^2P_3Q_3 + 3XP_1^2Q_2^2$$
$$+6XZP_1P_2Q_3 + 9XZ^2P_1P_3Q_2 + 9XZ^4P_3^2 - P_1^3Q_3 - 3ZP_1^2P_2Q_2$$
$$-9Z^3P_1P_2P_3 + 4Z^3P_2^3)$$

$$G_{406} = Z^{-6}(-X^4Q_2^3 - X^4Q_3^2 - 6X^3ZP_2Q_2^2 + 6X^3Z^2P_3Q_3 + 3X^2P_1^2Q_2^2$$
$$-6X^2ZP_1P_2Q_3 - 12X^2Z^2P_2^2Q_2 - 9X^2Z^4P_3^2 + 2XP_1^3Q_3 + 12XZP_1^2P_2Q_2$$
$$+18XZ^3P_1P_2P_3 - 8XZ^3P_2^3 - 3P_1^4Q_2 - 6Z^2P_1^3P_3 + 3Z^2P_1^2P_2^2)$$

$$G_{147} = Z^{-3}(3XQ_2^2Q_3 - 2P_1Q_2^3 - P_1Q_3^2 + 3ZP_2Q_2Q_3 - 3Z^2P_3Q_2^2)$$

$$G_{237} = Z^{-4}(X^2Q_2^2Q_3 - XP_1Q_2^3 - XP_1Q_3^2 - XZP_2Q_2Q_3 + P_1^2Q_2Q_3$$
$$+P_1P_2Q_2^2 - 2Z^2P_2^2Q_3 + 3Z^3P_2P_3Q_2)$$

$$G_{327} = Z^{-5}(X^3Q_2^2Q_3 - X^2P_1Q_2^3 + X^2P_1Q_3^2 + 5X^2ZP_2Q_2Q_3 - 3XP_1^2Q_2Q_3$$
$$-4XZP_1P_2Q_2^2 - 3XZ^2P_1P_3Q_3 + 4XZ^2P_2^2Q_3 - 3XZ^3P_2P_3Q_2$$
$$+2P_1^3Q_2^2 - ZP_1^2P_2Q_3 + 3Z^2P_1^2P_3Q_2 - Z^2P_1P_2^2Q_2)$$

$$G_{417} = Z^{-6}(3X^4Q_2^2Q_3 - 2X^3P_1Q_2^3 + X^3P_1Q_3^2 + 9X^3ZP_2Q_2Q_3 - 6X^3Z^2P_3Q_2^2$$
$$-6X^2P_1^2Q_2Q_3 - 3X^2ZP_1P_2Q_2^2 - 6X^2Z^2P_1P_3Q_3 + 6X^2Z^2P_2^2Q_3$$
$$-15X^2Z^3P_2P_3Q_2 + 3XP_1^3Q_2^2 - 3XZP_1^2P_2Q_3 + 12XZ^2P_1^2P_3Q_2 + 3XZ^2P_1P_2^2Q_2$$
$$+9XZ^4P_1P_3^2 - 6XZ^4P_2^2P_3 + P_1^4Q_3 - 3ZP_1^3P_2Q_2 - 3Z^3P_1^2P_2P_3 + 2Z^3P_1P_2^3)$$

$$G_{339} = Z^{-6}(4X^3Q_2^3Q_3 - 3X^2P_1Q_2^4 + 12X^2ZP_2Q_2^2Q_3 - 6X^2Z^2P_3Q_2^3$$
$$-3X^2Z^2P_3Q_3^2 - 6XP_1^2Q_2^2Q_3 - 6XZP_1P_2Q_2^3 + 12XZ^2P_2^2Q_2Q_3$$
$$-9XZ^3P_2P_3Q_2^2 + 9XZ^4P_3^2Q_3 + 4P_1^3Q_2^3 + P_1^3Q_3^2 - 6ZP_1^2P_2Q_2Q_3$$
$$+9Z^2P_1^2P_3Q_2^2 - 3Z^2P_1P_2^2Q_2^2 - 9Z^3P_1P_2P_3Q_3 + 4Z^3P_2^3Q_3)$$

---

⑤ $|P_{pqm}| = 3p + 3q - 2m$;

$|Z| = 3 \quad |X| = 3 \quad |Q_2| = 2 \quad |P_1| = 4 \quad |P_2| = 2 \quad |P_3| = 0 \quad |G_{202}| = 2 \quad |Q_3| = 3$

$|G_{123}| = 3 \quad |G_{124}| = 1 \quad |G_{213}| = 3 \quad |G_{214}| = 1 \quad |G_{303}| = 3 \quad |G_{046}| = 0 \quad |G_{135}| = 2$

$|G_{136}| = 0 \quad |G_{225}| = 2 \quad |G_{226}| = 0 \quad |G_{315}| = 2 \quad |G_{316}| = 0 \quad |G_{406}| = 0 \quad |G_{147}| = 1$

$|G_{237}| = 1 \quad |G_{327}| = 1 \quad |G_{417}| = 1 \quad |G_{336}| = 0$

---

⑥ $\varphi_{4,4} = k[\mathcal{G}]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies admet un système de générateurs multihomogènes que l'on peut choisir symétrique, et dont le nombre minimal est de l'ordre de la centaine. Il y en a 5 de degré total 4, 16 de degré 5 et 29 de degré 6. On donne ici les 21 de degrés 4 et 5 :

(σ_1) $(3,1,3)$ $P_1 G_{202} - Z G_{303} + X G_{213} = 0$ $|\sigma_1| = 6$

(σ_2) $(2,2,2)$ $P_1^2 - X^2 Q_2 - 2XZP_2 - Z^2 G_{202} = 0$ $|\sigma_2| = 8$

(σ_3) $(2,2,3)$ $P_1 P_2 - 3XZP_3 + XG_{123} - ZG_{213} = 0$ $|\sigma_3| = 6$

(σ_4) $(2,2,4)$ $2P_2^2 - 3P_1P_3 - 2Q_2G_{202} - XG_{124} - ZG_{214} = 0$ $|\sigma_4| = 4$

(σ'_1) $(1,3,3)$ $P_1 Q_2 - XQ_3 + ZG_{123} = 0$ $|\sigma'_1| = 6$

(σ_5) $(4,1,4)$ $P_1 G_{303} - ZG_{202}^2 + XP_2G_{202} - X^2G_{214} = 0$ $|\sigma_5| = 7$

(σ_6) $(4,1,5)$ $P_2 G_{303} - G_{202}G_{213} + XG_{315} = 0$ $|\sigma_6| = 5$

(σ_7) $(4,1,6)$ $3P_3G_{303} - 3G_{202}G_{214} + 2ZG_{406} + XG_{316} = 0$ $|\sigma_7| = 3$

(σ_8) $(3,2,4)$ $P_1G_{213} + XZG_{214} - ZP_2G_{202} + XQ_2G_{202} = 0$ $|\sigma_8| = 7$

(σ_9) $(3,2,5)$ $ZG_{315} - G_{202}G_{123} + P_2G_{213} - 3ZP_3G_{202} = 0$ $|\sigma_9| = 5$

(σ_{10}) $(3,2,5)$ $XG_{225} - Q_2G_{303} + G_{202}G_{123} = 0$ $|\sigma_{10}| = 5$

(σ_{11}) $(3,2,5)$ $ZG_{315} + P_1G_{214} - P_2G_{213} + Q_2G_{303} = 0$ $|\sigma_{11}| = 5$

(σ_{12}) $(3,2,6)$ $ZG_{316} + XG_{226} - G_{202}G_{124} + 2P_2G_{214} - 3P_3G_{213} = 0$ $|\sigma_{12}| = 3$

(σ'_8) $(2,3,4)$ $P_1G_{123} + XZG_{124} + XP_2Q_2 + ZQ_2G_{202} = 0$ $|\sigma'_8| = 7$

(σ'_9) $(2,3,5)$ $XG_{135} - Q_2G_{213} - P_2G_{123} - 3XP_3Q_2 = 0$ $|\sigma'_9| = 5$

(σ'_{10}) $(2,3,5)$ $ZG_{225} - Q_2G_{213} + Q_3G_{202} = 0$ $|\sigma'_{10}| = 5$

(σ'_{11}) $(2,3,5)$ $XG_{135} + P_1G_{124} + P_2G_{123} + Q_3G_{202} = 0$ $|\sigma'_{11}| = 5$

(σ'_{12}) $(2,3,6)$ $ZG_{226} + XG_{136} - Q_2G_{214} - 2P_2G_{124} - 3P_3G_{123} = 0$ $|\sigma'_{12}| = 3$

(σ'_5) $(1,4,4)$ $P_1Q_3 - XQ_2^2 - ZP_2Q_2 - Z^2G_{124} = 0$ $|\sigma'_5| = 7$

(σ'_6) $(1,4,5)$ $P_2Q_3 + Q_2G_{123} - ZG_{135} = 0$ $|\sigma'_6| = 5$

(σ'_7) $(1,4,6)$ $3P_3Q_3 - 3Q_2G_{124} + 2XG_{046} + ZG_{136} = 0$ $|\sigma'_7| = 3$

---

(7) $J_{4,4} = k[P_3, G_{046}, G_{136}, G_{226}, G_{316}, G_{406}, G_{339}] \big/ (\mathcal{R}, \mathcal{R}')$

$$\mathcal{R} = 3G_{226}^2 - 3G_{339}P_3 + G_{406}G_{046} - G_{316}G_{136} \qquad |\mathcal{R}| = 0$$

$$\mathcal{R}' = 3G_{339}^2 - 6G_{339}G_{226}P_3 - 16G_{226}G_{406}G_{046} - 2G_{226}G_{316}G_{136}$$
$$+3G_{406}G_{136}^2 + 3G_{046}G_{316}^2 + 27G_{406}G_{046}P_3^2 \qquad |\mathcal{R}'| = 0$$

---

(8) <u>Orbites séparées</u> : $F_{1,1} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_2 - x_2y_1,\ x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4 \end{cases}$

$F_{2,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_2 - x_3y_1,\ x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4 \end{cases}$

$F_{3,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_2 - x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4 \end{cases}$

$F_{4,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4 \end{cases}$

$F_{1,2} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ x_1y_3 - x_2y_2,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 \end{cases}$

$F_{2,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_3 - x_3y_2,\ x_2y_4 - x_3y_3 + x_4y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4 \end{cases}$

$F_{3,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_3 - x_4y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4 \end{cases}$

$F_{4,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4 \end{cases}$

$F_{1,3} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_1y_4 - x_2y_3 \end{cases}$

$F_{2,3} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_2y_4 - x_3y_3 \end{cases}$

$F_{1,4} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \end{cases}$

$F_{2,4} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \end{cases}$

$$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, P_1, P_2, P_3, G_{202}, Q_3, G_{303}, G_{046}, G_{136}, G_{316}, G_{406}\}$$

---

(9) <u>Nilcône</u> : $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ Equations invariantes : $Z = Q_2 = X = G_{202} = 0$

Système de paramètres pour $\mathcal{I}_{4,4}$: $\{P_3, G_{046}, G_{136}, G_{316}, G_{406}\}$

on a $G_{226}^2 = G_{339} P_3 - \frac{1}{3} G_{406} G_{046} + \frac{1}{3} G_{316} G_{136}$

et $G_{339}^2 = 2 G_{339} G_{226} P_3 + \frac{16}{3} G_{226} G_{406} G_{046} + \frac{2}{3} G_{226} G_{316} G_{136}$

$\quad - G_{406} G_{136}^2 - G_{046} G_{316}^2 - 9 G_{406} G_{046} P_3^2$

---

(10) <u>Séries de Poincaré</u> : $F_{4,4}(a, b, z) = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{D'}$ avec

$$
\begin{aligned}
N = {} & (1 + a^2b^2 + a^3b^3 + a^5b^5) + (a^2b + ab^2 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + a^4b^3 + a^3b^4) z \\
& + (ab + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + a^3b^3 + a^4b^4 - a^7b^5 - a^5b^7) z^2 \\
& + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - a^4b - ab^4 - a^6b - 2a^4b^3 - 2a^3b^4 - ab^6 - a^6b^3 - a^3b^6 - a^6b^5 - a^5b^6) z^3 \\
& + (ab - a^5b - a^4b^2 - a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - a^6b^2 - 2a^5b^3 - 2a^4b^4 - 2a^3b^5 - a^2b^6 - a^7b^3 - a^6b^4 - a^5b^5 \\
& - a^4b^6 - a^3b^7 + a^7b^7) z^4 + (-a^3b^2 - a^2b^3 - a^5b^2 - a^2b^5 - a^7b^2 - 2a^5b^4 - 2a^4b^5 - a^2b^7 - a^7b^4 - a^4b^7 \\
& + a^8b^5 + a^7b^6 + a^6b^7 + a^5b^8) z^5 + (-a^3b - ab^3 + a^4b^4 + a^5b^5 + a^7b^5 + a^6b^6 + a^5b^7 + a^7b^7) z^6 \\
& + (a^5b^4 + a^4b^5 + a^7b^4 + a^6b^5 + a^5b^6 + a^4b^7 + a^7b^6 + a^6b^7) z^7 + (a^3b^3 + a^5b^5 + a^6b^6 + a^8b^8) z^8
\end{aligned}
$$

$$D = (1-a^4)(1-b^4)(1-ab)(1-a^3b)(1-ab^3)(1-a^2z^2)(1-b^2z^2)(1-az^3)(1-bz^3)$$

$$
\begin{aligned}
N' = {} & (1 + a^2b^2 + a^3b^3 + a^5b^5) + (-a - b + a^2b + ab^2 + a^4b + ab^4 - a^6b^5 - a^5b^6) z \\
& + (a^2 + 2ab + b^2 - a^2b^2 - a^5b - a^4b^2 - a^2b^4 - ab^5 + a^6b^6) z^2 \\
& + (-a^2b - ab^2 - a^4b - ab^4 + a^5b^2 - a^4b^3 - a^3b^4 + a^2b^5 - a^6b^3 - a^3b^6 - a^6b^5 - a^5b^6) z^3 \\
& + (ab - a^6b^2 - a^5b^3 - a^3b^5 - a^2b^6 - a^5b^5 + a^7b^5 + 2a^6b^6 + a^5b^7) z^4 \\
& + (-a^2b - ab^2 + a^6b^3 + a^3b^6 + a^6b^5 + a^5b^6 - a^7b^6 - a^6b^7) z^5 \\
& + (a^2b^2 + a^4b^4 + a^5b^5 + a^7b^7) z^6
\end{aligned}
$$

$$D' = (1-a^4)(1-b^4)(1-ab)(1-a^3b)(1-ab^3)(1-az)(1-bz)(1-az^3)(1-bz^3)$$

$$F_{4,4}(a, b, 0) = \frac{1 + a^2b^2 + a^3b^3 + a^5b^5}{(1-a^4)(1-b^4)(1-ab)(1-a^3b)(1-ab^3)}$$

$$\boxed{\mathcal{J}_{2,5}}$$ (Droite + Quartique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$H = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 4 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - 2 y_4 \frac{\partial}{\partial y_4} - 4 y_5 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$D' = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 4 y_5 \frac{\partial}{\partial y_4} + 6 y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 6 y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 4 y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

② $\mathcal{K}_{2,5} = k(Z, Q_2, Q_3, Q_4, X, P_1)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$Q_4 = G_{024} = y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, Q_3, G_{036}, G_{123}, G_{212}, G_{134}, G_{224}, G_{313}, G_{235}, G_{325}, G_{414}, G_{336}, G_{426}, G_{437}, G_{538}, G_{639}\}$ $(\#\mathcal{G} = 20)$

$G_{036} = 2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 6y_2^2y_5 + 9y_1y_4^2 - 12y_1y_3y_5$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) - x_1(y_2y_3 - 3y_1y_4)$

$G_{212} = x_2^2y_1 - 2x_1x_2y_2 + 2x_1^2y_3$

$G_{134} = x_2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_1(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$

$G_{224} = x_2^2(y_2^2 - 2y_1y_3) - 2x_1x_2(y_2y_3 - 3y_1y_4) + 2x_1^2(2y_3^2 - 3y_2y_4)$

$G_{313} = -x_2^3y_1 + 3x_1x_2^2y_2 - 6x_1^2x_2y_3 + 6x_1^3y_4$

$$G_{235} = x_2^2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 2x_1x_2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$$
$$- 2x_1^2(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4)$$

$$G_{325} = x_2^3(y_2^2 - 2y_1y_3) - 3x_1x_2^2(y_2y_3 - 3y_1y_4)$$
$$+ 6x_1^2x_2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) - 6x_1^3(y_3y_4 - 2y_2y_5)$$

$G_{414} = x_2^4y_1 - 4x_1x_2^3y_2 + 12x_1^2x_2^2y_3 - 24x_1^3x_2y_4 + 24x_1^4y_5$

$$G_{336} = x_2^3(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 3x_1x_2^2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$$
$$-6x_1^2x_2(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4) + 2x_1^3(4y_3^3 - 9y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2)$$

$$G_{426} = x_2^4(y_2^2 - 2y_1y_3) - 4x_1x_2^3(y_2y_3 - 3y_1y_4) + 12x_1^2x_2^2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5)$$
$$-24x_1^3x_2(y_3y_4 - 2y_2y_5) + 12x_1^4(3y_4^2 - 4y_3y_5)$$

$$G_{437} = x_2^4(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 4x_1x_2^3(y_2^2y_3 - 3y_1y_3^2 + y_1y_2y_4 + 2y_1^2y_5)$$
$$+12x_1^2x_2^2(y_2^2y_4 - 3y_1y_3y_4 + 2y_1y_2y_5) + 12x_1^3x_2(3y_1y_4^2 - 2y_2^2y_5)$$
$$-12x_1^4(y_2y_4^2 - 2y_2y_3y_5 + 2y_1y_4y_5)$$

$$G_{538} = x_2^5(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_1x_2^4(5y_2^2y_3 - 14y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4 + 12y_1^2y_5)$$
$$+4x_1^2x_2^3(y_2y_3^2 + 3y_2^2y_4 - 15y_1y_3y_4 + 12y_1y_2y_5)$$
$$-6x_1^3x_2^2(2y_3^3 - 4y_2y_3y_4 - 15y_1y_4^2 + 10y_2^2y_5 + 4y_1y_3y_5)$$
$$+12x_1^4x_2(2y_3^2y_4 - 9y_2y_4^2 + 10y_2y_3y_5 - 6y_1y_4y_5)$$
$$+36x_1^5(y_3y_4^2 - 3y_3^2y_5 + 2y_2y_4y_5)$$

$$G_{649} = x_2^6(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 6x_1x_2^5(y_2^2y_3 - 3y_1y_3^2 + y_1y_2y_4 + 2y_1^2y_5)$$
$$+30x_1^2x_2^4(y_2^2y_4 - 3y_1y_3y_4 + 2y_1y_2y_5) - 60x_1^3x_2^3(3y_1y_4^2 - 2y_2^2y_5)$$
$$-180x_1^4x_2^2(y_2y_4^2 - 2y_2y_3y_5 + 2y_1y_4y_5)$$
$$+72x_1^5x_2(3y_3y_4^2 - 6y_3^2y_5 + 2y_2y_4y_5 + 4y_1y_5^2)$$
$$-72x_1^6(3y_4^3 - 6y_3y_4y_5 + 4y_2y_5^2)$$

---

(4)
$$G_{036} = Z^{-3}(Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4)$$
$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$
$$G_{212} = Z^{-1}(P_1^2 - X^2Q_2)$$
$$G_{134} = Z^{-1}(XQ_2^2 - P_1Q_3)$$
$$G_{224} = Z^{-2}(X^2Q_2^2 - 2XP_1Q_3 + P_1^2Q_2)$$
$$G_{313} = Z^{-2}(2X^3Q_3 - 3X^2P_1Q_2 + P_1^3)$$
$$G_{235} = Z^{-2}(X^2Q_2Q_3 - 2XP_1Q_2^2 + P_1^2Q_3)$$
$$G_{325} = Z^{-3}(X^3Q_2Q_3 - 3X^2P_1Q_2^2 + 6X^2Z^2P_1Q_4 + 3XP_1^2Q_3 - P_1^3Q_2)$$
$$G_{414} = Z^{-3}(-3X^4Q_2^2 + 12X^4Z^2Q_4 + 8X^3P_1Q_3 - 6X^2P_1^2Q_2 + P_1^4)$$
$$G_{336} = Z^{-3}(2X^3Q_3^2 - X^3Q_2^3 - 3X^2P_1Q_2Q_3 + 3XP_1^2Q_2^2 - P_1^3Q_3)$$
$$G_{426} = Z^{-4}(-3X^4Q_2^3 + 4X^4Q_3^2 + 12X^4Z^2Q_2Q_4 - 4X^3P_1Q_2Q_3 + 6X^2P_1^2Q_2^2$$
$$-12X^2Z^2P_1^2Q_4 - 4XP_1^3Q_3 + P_1^4Q_2)$$

$$G_{437} = Z^{-4}\big(X^4 Q_2^2 Q_3 - 4X^4 Z^2 Q_3 Q_4 - 4X^3 P_1 Q_3^2 + 6X^2 P_1^2 Q_2 Q_3 - 4X P_1^3 Q_2^2 + 4XZ^2 P_1^3 Q_4 + P_1^4 Q_3\big)$$

$$G_{538} = Z^{-5}\big(3X^5 Q_2^4 - 2X^5 Q_2 Q_3^2 - 12X^5 Z^2 Q_2^2 Q_4 - 5X^4 P_1 Q_2^2 Q_3 + 12X^4 Z^2 P_1 Q_3 Q_4 + 10X^3 P_1^2 Q_3^2 + 6X^3 Z^2 P_1^2 Q_2 Q_4 - 10X^2 P_1^3 Q_2 Q_3 + 5X P_1^4 Q_2^2 - 6XZ^2 P_1^4 Q_4 - P_1^5 Q_3\big)$$

$$G_{639} = Z^{-6}\big(9X^6 Q_2^3 Q_3 - 8X^6 Q_3^3 - 36X^6 Z^2 Q_2 Q_3 Q_4 - 18X^5 P_1 Q_2^4 + 12X^5 P_1 Q_2 Q_3^2 + 90X^5 Z^2 P_1 Q_2^2 Q_4 - 72X^5 Z^4 P_1 Q_4^2 + 15X^4 P_1^2 Q_2^2 Q_3 - 60X^4 Z^2 P_1^2 Q_3 Q_4 - 20X^3 P_1^3 Q_3^2 + 15X^2 P_1^4 Q_2 Q_3 - 6X P_1^5 Q_2^2 + 6XZ^2 P_1^5 Q_4 + P_1^6 Q_3\big)$$

---

(5) $|P_{pqm}| = p + 4q - 2m$;

$|Z| = 4$ $|X| = 1$ $|Q_2| = 4$ $|Q_4| = 0$ $|P_1| = 3$ $|Q_3| = 6$ $|G_{036}| = 0$

$|G_{123}| = 3$ $|G_{212}| = 2$ $|G_{134}| = 5$ $|G_{224}| = 2$ $|G_{313}| = 1$ $|G_{235}| = 4$

$|G_{325}| = 1$ $|G_{414}| = 0$ $|G_{336}| = 3$ $|G_{426}| = 0$ $|G_{437}| = 2$ $|G_{538}| = 1$

$|G_{639}| = 0$

---

(6) $\mathcal{G}_{2,5} = k[g]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies a plusieurs dizaines de générateurs ; on donne ici ceux de degré total au plus 6 (il y en a 16 : 2 de degré 4, 4 de degré 5, et 10 de degré 6) :

(σ_1)	$(2,2,2)$	$P_1^2 - X^2 Q_2 - Z G_{212} = 0$	$\lvert\sigma_1\rvert = 6$
(σ_2)	$(1,3,3)$	$P_1 Q_2 - X Q_3 + Z G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_2\rvert = 7$
(σ_3)	$(3,2,3)$	$P_1 G_{212} - Z G_{313} + 2X^2 G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_3\rvert = 5$
(σ_4)	$(2,3,4)$	$P_1 G_{123} + Q_2 G_{212} + X G_{134} = 0$	$\lvert\sigma_4\rvert = 6$
(σ_5)	$(2,3,4)$	$P_1 G_{123} - X G_{134} + Z G_{224} = 0$	$\lvert\sigma_5\rvert = 6$
(σ_6)	$(1,4,4)$	$P_1 Q_3 - X Q_2^2 + Z G_{134} = 0$	$\lvert\sigma_6\rvert = 9$
(σ_7)	$(4,2,4)$	$G_{212}^2 - P_1 G_{313} - X^2 G_{224} = 0$	$\lvert\sigma_7\rvert = 4$
(σ_8)	$(4,2,4)$	$Z G_{414} + 3X^2 G_{224} - P_1 G_{313} - 12X^4 Q_4 = 0$	$\lvert\sigma_8\rvert = 4$
(σ_9)	$(3,3,5)$	$G_{212} G_{123} + P_1 G_{224} + X G_{235} = 0$	$\lvert\sigma_9\rvert = 5$
(σ_{10})	$(3,3,5)$	$G_{212} G_{123} - X G_{235} + Q_2 G_{313} = 0$	$\lvert\sigma_{10}\rvert = 5$

(σ_{11}) $(3,3,5)$ $ZG_{325} - XG_{235} + P_1 G_{224} - 6X^2 P_1 Q_4 = 0$ $|\sigma_{11}| = 5$

(σ_{12}) $(2,4,5)$ $P_1 G_{134} + Q_3 G_{212} + XQ_2 G_{123} = 0$ $|\sigma_{12}| = 8$

(σ_{13}) $(2,4,5)$ $ZG_{235} - XQ_2 G_{123} + P_1 G_{134} = 0$ $|\sigma_{13}| = 8$

(σ_{14}) $(2,4,6)$ $G_{123}^2 - Q_2 G_{224} + 3X^2 Q_2 Q_4 - X^2 Z G_{036} = 0$ $|\sigma_{14}| = 6$

(σ_{15}) $(1,5,6)$ $Q_3 G_{123} - Q_2 G_{134} + 3XZ Q_2 Q_4 - XZ^2 G_{036} = 0$ $|\sigma_{15}| = 9$

(σ_{16}) $(0,6,6)$ $Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2 Q_2 Q_4 - Z^3 G_{036} = 0$ $|\sigma_{16}| = 12$

---

(7) $J_{2,5} = k\,[Q_4, G_{036}, G_{414}, G_{426}, G_{633}] / (\mathcal{R})$

$\mathcal{R} = G_{639}^2 - G_{426}^3 + 3Q_4 G_{414}^2 G_{426} - G_{036} G_{414}^3$ $|\mathcal{R}| = 0$

---

(8) <u>Orbites séparées</u> : $\mathcal{F}_{1,1} = \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1 y_3,\ y_2^3 - 3y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_4,\ y_3^2 - 2y_2 y_4 + 2y_1 y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,1} = \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1 y_3,\ y_2^3 - 3y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_4,\ y_3^2 - 2y_2 y_4 + 2y_1 y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,2} = \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1 y_3 - x_2 y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2 y_4,\ y_3^3 - 3y_2 y_3 y_4 + 3y_2^2 y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,2} = \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2 y_4,\ y_3^3 - 3y_2 y_3 y_4 + 3y_2^2 y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,3} = \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1 y_4 - x_2 y_3 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ y_4^2 - 2y_3 y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,4} = \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1 y_5 - x_2 y_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,5} = \begin{cases} x_1 \neq 0 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$

$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, Q_3, G_{036}, G_{123}, G_{313}, G_{414}, G_{426}\}$

---

(9) <u>Nilcône</u> : $x_1 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ Equations invariantes : $X = Z = Q_2 = Q_4 = 0$

Système de paramètres pour $J_{2,5}$: $\{Q_4, G_{036}, G_{414}, G_{426}\}$

on a $G_{639}^2 = G_{426}^3 - 3Q_4 G_{414}^2 G_{426} + G_{036} G_{414}^3$

---

(10) <u>Séries de Poincaré</u> : $F_{2,5}(a,b,z) = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{D'}$, avec

$$
\begin{aligned}
N = {} & (1+a^6b^3) + (a^3b + a^3b^2 + a^5b^3 - a^7b^3)z \\
& + (a^2b + a^2b^2 + a^4b^3 - a^6b^3)z^2 + (ab + ab^2 + a^3b^3 - a^5b^3)z^3 \\
& + (a^2b^3 - a^4b^3 - a^6b^4 - a^6b^5)z^4 + (ab^3 - a^3b^3 - a^5b^4 - a^5b^5)z^5 \\
& + (b^3 - a^2b^3 - a^4b^4 - a^4b^5)z^6 + (-ab^3 - a^7b^6)z^7
\end{aligned}
$$

$$D = (1-b^2)(1-b^3)(1-a^4b)(1-a^4b^2)(1-az)(1-bz^4)(1-b^2z^4)$$

$$
\begin{aligned}
N' = {} & (1 - a^2b + a^4b^2) + (a^3b + a^3b^2 - a^5b^2)z \\
& + (-b + a^2b + 2a^2b^2 - a^4b^2 - a^4b^3)z^2 + (ab + ab^2 - 2a^3b^2 - a^3b^3 + a^5b^3)z^3 \\
& + (b^2 - a^2b^2 - a^2b^3)z^4 + (-ab^2 + a^3b^3 - a^5b^4)z^5
\end{aligned}
$$

$$D' = (1-b^2)(1-b^3)(1-a^2b)(1-a^4b)(1-az)(1-bz^2)(1-bz^4)$$

$$
\begin{aligned}
F_{2,5}(a,b,0) &= \frac{1 + a^6b^3}{(1-b^2)(1-b^3)(1-a^4b)(1-a^4b^2)} \\
&= \frac{1 - a^2b + a^4b^2}{(1-b^2)(1-b^3)(1-a^2b)(1-a^4b)}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathcal{G}_{3,5}}$ (Conique + Quartique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$H = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 4y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - 2y_4 \frac{\partial}{\partial y_4} - 4y_5 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$D' = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 4y_5 \frac{\partial}{\partial y_4} + 6y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 6y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 4y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{3,5} = k\,(Z, Q_2, Q_3, Q_4, X, P_1, P_2)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$Q_4 = G_{024} = y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{ Z, X, Q_2, Q_4, P_1, P_2, G_{202}, Q_3, G_{036}, G_{123}, G_{124}, G_{213}, G_{214}, G_{135}, G_{225}, G_{226}, G_{237}, G_{339} \}$ $\quad (\# \mathcal{G} = 18)$

$G_{202} = x_2^2 - 2x_1x_3$

$G_{036} = 2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 6y_2^2y_5 + 9y_1y_4^2 - 12y_1y_3y_5$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) - x_1(y_2y_3 - 3y_1y_4)$

$G_{124} = x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) - x_2(y_2y_3 - 3y_1y_4) + x_1(2y_3^2 - 3y_2y_4)$

$G_{213} = 3x_1^2y_4 - 3x_1x_2y_3 + (x_2^2 + x_1x_3)y_2 - x_2x_3y_1$

$G_{214} = 6x_1^2y_5 - 6x_1x_2y_4 + 2(x_2^2 + x_1x_3)y_3 - 2x_2x_3y_2 + x_3^2y_1$

$G_{135} = x_3(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_2(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$
$\quad - x_1(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4)$

$G_{225} = x_2x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) - (x_2^2 + x_1x_3)(y_2y_3 - 3y_1y_4)$
$\quad + 3x_1x_2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) - 3x_1^2(y_3y_4 - 2y_2y_5)$

$$G_{226} = x_3^2(y_2^2 - 2y_1y_3) - 2x_2x_3(y_2y_3 - 3y_1y_4) + 2(2x_2^2 - x_1x_3)y_3^2 - 6(x_2^2 - 2x_1x_3)y_2y_4$$
$$- 12x_1x_3y_1y_5 + 6x_1x_2(2y_2y_5 - y_3y_4) + x_1^2(9y_4^2 - 12y_3y_5)$$

$$G_{237} = x_3^2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - x_2x_3(2y_2^2y_3 - 5y_1y_3^2 + 6y_1^2y_5)$$
$$+ (x_2^2 + x_1x_3)(y_2y_3^2 - 6y_1y_3y_4 + 6y_1y_2y_5) - 3x_1x_2(y_3^3 - 2y_2y_3y_4 + 2y_2^2y_5 - 3y_1y_4^2 + 2y_1y_3y_5)$$
$$+ 3x_1^2(y_3^2y_4 - 3y_2y_4^2 + 2y_2y_3y_5)$$

$$G_{339} = x_3^3(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 3x_2x_3^2(y_2^2y_3 - 3y_1y_3^2 + y_1y_2y_4 + 2y_1^2y_5)$$
$$+ 3(2x_2^2x_3 + x_1x_3^2)(y_2^2y_4 - 3y_1y_3y_4 + 2y_1y_2y_5) + 3(x_2^3 + 3x_1x_2x_3)(3y_1y_4^2 - 2y_2^2y_5)$$
$$- 9(2x_1x_2^2 + x_1^2x_3)(y_2y_4^2 - 2y_2y_3y_5 + 2y_1y_4y_5) + 9x_1^2x_2(3y_3y_4^2 - 6y_3^2y_5 + 2y_2y_4y_5 + 4y_1y_5^2)$$
$$- 9x_1^3(3y_4^3 - 6y_3y_4y_5 + 4y_2y_5^2)$$

---

(4)

$$G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$$

$$G_{036} = Z^{-3}(Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4)$$

$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$

$$G_{124} = Z^{-2}(XQ_2^2 - P_1Q_3 + ZP_2Q_2)$$

$$G_{213} = Z^{-2}(X^2Q_3 - XP_1Q_2 + ZP_1P_2)$$

$$G_{214} = Z^{-3}(-X^2Q_2^2 + 3X^2Z^2Q_4 + 2XP_1Q_3 - P_1^2Q_2 + Z^2P_2^2)$$

$$G_{135} = Z^{-2}(XQ_2Q_3 - P_1Q_2^2 + ZP_2Q_3)$$

$$G_{225} = Z^{-3}(X^2Q_2Q_3 - 2XP_1Q_2^2 + 3XZ^2P_1Q_4 + XZP_2Q_3 + P_1^2Q_3 - ZP_1P_2Q_2)$$

$$G_{226} = Z^{-4}(X^2Q_3^2 - 2XP_1Q_2Q_3 + 2XZP_2Q_2^2 - 6XZ^3P_2Q_4 + P_1^2Q_2^2$$
$$- 2ZP_1P_2Q_3 + Z^2P_2^2Q_2)$$

$$G_{237} = Z^{-4}(X^2Q_2^2Q_3 - XP_1Q_2^3 - XP_1Q_3^2 + 2XZP_2Q_2Q_3 + P_1^2Q_2Q_3$$
$$- 2ZP_1P_2Q_2^2 + 3Z^3P_1P_2Q_4 + Z^2P_2^2Q_3)$$

$$G_{339} = Z^{-6}(2X^3Q_2^3Q_3 - X^3Q_3^3 - 6X^3Z^2Q_2Q_3Q_4 - 3X^2P_1Q_2^4 + 12X^2Z^2P_1Q_2^2Q_4$$
$$- 9X^2Z^4P_1Q_4^2 + 3X^2ZP_2Q_2^2Q_3 - 3X^2Z^3P_2Q_3Q_4 + 3XP_1^2Q_2^2Q_3$$
$$- 6XZ^2P_1^2Q_3Q_4 - 3XZP_1P_2Q_2^3 - 3XZP_1P_2Q_3^2 + 3XZ^3P_1P_2Q_2Q_4$$
$$+ 3XZ^2P_2^2Q_2Q_3 - P_1^3Q_2^3 + 3ZP_1^2P_2Q_2Q_3 - 3Z^2P_1P_2^2Q_2^2$$
$$+ 3Z^4P_1P_2^2Q_4 + Z^3P_2^3Q_3)$$

---

⑤ $|P_{pqm}| = 2p+4q-2m$;

$|Z|=4$ $|X|=2$ $|Q_2|=4$ $|Q_4|=0$ $|P_1|=4$ $|P_2|=2$ $|G_{202}|=0$

$|Q_3|=6$ $|G_{036}|=0$ $|G_{123}|=4$ $|G_{124}|=2$ $|G_{213}|=2$ $|G_{214}|=0$

$|G_{135}|=4$ $|G_{225}|=2$ $|G_{226}|=0$ $|G_{237}|=2$ $|G_{333}|=0$

---

⑥ $\mathcal{S}_{3,5} = k[\mathcal{G}]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies a environ une centaine de générateurs. On donne ici ceux de degré au plus 5 (il y en a 13):

(σ_1)	$(2,2,2)$	$P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2 - Z^2G_{202} = 0$	$\lvert\sigma_1\rvert = 8$
(σ_2)	$(2,2,3)$	$P_1P_2 - ZG_{213} + XG_{123} = 0$	$\lvert\sigma_2\rvert = 6$
(σ_3)	$(2,2,4)$	$P_2^2 - Q_2G_{202} - ZG_{214} - 2XG_{124} + 3X^2Q_4 = 0$	$\lvert\sigma_3\rvert = 4$
(σ_4)	$(1,3,3)$	$P_1Q_2 - XQ_3 + ZG_{123} = 0$	$\lvert\sigma_4\rvert = 8$
(σ_5)	$(3,2,4)$	$P_1G_{213} - ZP_2G_{202} + XQ_2G_{202} - 2XP_2^2 + X^2G_{124} = 0$	$\lvert\sigma_5\rvert = 6$
(σ_6)	$(3,2,5)$	$G_{202}G_{123} + P_2G_{213} - P_1G_{214} + XG_{225} = 0$	$\lvert\sigma_6\rvert = 4$
(σ_7)	$(2,3,4)$	$P_1G_{123} + ZQ_2G_{202} + XP_2Q_2 + XZG_{124} = 0$	$\lvert\sigma_7\rvert = 8$
(σ_8)	$(2,3,5)$	$P_2G_{123} - XG_{135} + Q_2G_{213} = 0$	$\lvert\sigma_8\rvert = 6$
(σ_9)	$(2,3,5)$	$P_1G_{124} - XG_{135} + ZG_{225} - 3XP_1Q_4 = 0$	$\lvert\sigma_9\rvert = 6$
(σ_{10})	$(2,3,5)$	$Q_3G_{202} + P_1G_{124} + P_2G_{123} + XG_{135} = 0$	$\lvert\sigma_{10}\rvert = 6$
(σ_{11})	$(2,3,6)$	$Q_2G_{214} - 2P_2G_{124} + ZG_{226} - X^2G_{036} + 6XP_2Q_4 = 0$	$\lvert\sigma_{11}\rvert = 4$
(σ_{12})	$(1,4,4)$	$P_1Q_3 - XQ_2^2 + Z^2G_{124} - ZP_2Q_2 = 0$	$\lvert\sigma_{12}\rvert = 10$
(σ_{13})	$(1,4,5)$	$P_2Q_3 - ZG_{135} + Q_2G_{123} = 0$	$\lvert\sigma_{13}\rvert = 8$

Ceux de degré total 6 sont : $\sigma_{14}\,(4,2,6)$, $\sigma_{15}\,(3,3,6)$, $\sigma_{16}\,(3,3,6)$, $\sigma_{17}\,(3,3,7)$, $\sigma_{18}\,(3,3,7)$, $\sigma_{19}\,(3,3,7)$, $\sigma_{20}\,(2,4,6)$, $\sigma_{21}\,(2,4,6)$, $\sigma_{22}\,(2,4,6)$, $\sigma_{23}\,(2,4,7)$, $\sigma_{24}\,(2,4,7)$, $\sigma_{25}\,(2,4,7)$, $\sigma_{26}\,(2,4,8)$, $\sigma_{27}\,(1,5,5)$, $\sigma_{28}\,(1,5,6)$, $\sigma_{29}\,(1,5,7)$, $\sigma_{30}\,(1,5,7)$, et $\sigma_{31}\,(0,6)6$.

En particulier, ils sont de poids:

$|\sigma_{14}|=4$, $|\sigma_{15}|=|\sigma_{16}|=6$, $|\sigma_{17}|=|\sigma_{18}|=|\sigma_{19}|=4$, $|\sigma_{20}|=|\sigma_{21}|=|\sigma_{22}|=8$, $|\sigma_{23}|=|\sigma_{24}|=|\sigma_{25}|=6$, $|\sigma_{26}|=4$, $|\sigma_{27}|=12$, $|\sigma_{28}|=10$, $|\sigma_{29}|=|\sigma_{30}|=8$, $|\sigma_{31}|=12$.

---

(7) $J_{3,5} = k[Q_4, G_{202}, G_{036}, G_{214}, G_{226}, G_{339}]/(R)$

$$R = G_{339}^2 - G_{226}^3 + 3Q_4 G_{202} G_{226}^2 + 3Q_4 G_{214}^2 G_{226} + 3G_{202}G_{036}G_{214}G_{226}$$
$$- G_{036}G_{214}^3 - 9Q_4^2 G_{202} G_{214}^2 - 6Q_4 G_{202}^2 G_{036} G_{214} - G_{202}^3 G_{036}^2$$

$$|R| = 0$$

---

(8) Orbites séparées $F_{1,1}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_2 - x_2y_1,\ x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$

$F_{1,2}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_3 - x_2y_2,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$

$F_{1,3}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_4 - x_2y_3,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ y_4^2 - 2y_3y_5 \end{cases}$

$F_{1,4}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0,\ x_1y_5 - x_2y_4 \end{cases}$

$F_{1,5}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$

$F_{2,1}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_2 - x_3y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$

$F_{2,2}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_3 - x_3y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$

$F_{3,1}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$

$F_{3,2}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$

$$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, P_2, G_{202}, G_{036}, Q_3, G_{124}\}$$

---

(9) Nilcône : $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ Equations invariantes : $X = G_{202} = Z = Q_2 = Q_4 = 0$

Système de paramètres pour $J_{3,5}$ $\{Q_4, G_{202}, G_{036}, G_{214}, G_{226}\}$

on a $G_{339}^2 = G_{226}^3 - 3Q_4G_{202}G_{226}^2 - 3Q_4G_{214}^2G_{226} - 3G_{202}G_{036}G_{214}G_{226}$
$$+ G_{036}G_{214}^3 + 9Q_4^2G_{202}G_{214}^2 + 6Q_4G_{202}^2G_{036}G_{214} + G_{202}^3G_{036}^2$$

---

(10) Séries de Poincaré: $F_{3,5}(a,b,z) = \frac{N}{D} = \frac{N'}{D'}$ avec

$$N = (1+a^3b^3) + (ab + a^2b + ab^2 + a^2b^2 + a^2b^3 - a^4b^3)z^2$$
$$+ (ab + ab^2 + ab^3 - a^3b^3 - a^3b^4 - a^3b^5)z^4$$
$$+ (b^3 - a^2b^3 - a^2b^4 - a^3b^4 - a^2b^5 - a^3b^5)z^6 + (-ab^3 - a^4b^6)z^8$$

$$D = (1-a^2)(1-b^2)(1-b^3)(1-a^2b)(1-a^2b^2)(1-az^2)(1-bz^4)(1-b^2z^4)$$

$$N' = (1-ab+a^2b^2) + (-b + ab + a^2b + 2ab^2 - a^3b^2 - a^2b^3)z^2$$
$$+ (ab + b^2 - 2a^2b^2 - ab^3 - a^2b^3 + a^3b^3)z^4 + (-ab^2 + a^2b^3 - a^3b^4)z^6$$

$$D' = (1-a^2)(1-b^2)(1-b^3)(1-ab)(1-a^2b)(1-az^2)(1-bz^2)(1-bz^4)$$

$$F_{3,5}(a,b,0) = \frac{1+a^3b^3}{(1-a^2)(1-b^2)(1-b^3)(1-a^2b)(1-a^2b^2)}$$

$$= \frac{1-ab+a^2b^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-b^3)(1-ab)(1-a^2b)}$$

$\boxed{\mathcal{S}_{4,5}}$ (Cubique + Quartique)

① $D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_4} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$H = 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + 4y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - 2y_4 \frac{\partial}{\partial y_4} - 4y_5 \frac{\partial}{\partial y_5}$

$D' = 3x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + 4x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 3x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 4y_5 \frac{\partial}{\partial y_4} + 6y_4 \frac{\partial}{\partial y_3} + 6y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + 4y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{K}_{4,5} = k(Z, Q_2, Q_3, Q_4, X, P_1, P_2, P_3)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$Q_4 = G_{024} = y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1$

$P_3 = G_{113} = x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, P_2, P_3, G_{202}, Q_3, G_{036}, G_{123}, G_{124}, G_{125},$
$G_{213}, G_{214}, G'_{214}, G_{303}, G_{136}, G_{225}, G_{226}, G'_{226}, G_{315}, G_{316},$
$G'_{316}, G_{406}, G_{237}, G_{238}, G_{239}, G_{327}, G_{328}, G'_{328}, G''_{328}, G_{417},$
$G'_{417}, G_{418}, G_{3310}, G'_{3310}, G_{429}, G'_{429}, G_{4210}, G'_{4210}, G_{519},$
$G_{3412}, G_{4312}, G'_{4312}, G''_{4312}, G_{5211}, G'_{5211}, G_{4414}, G'_{4414}, G_{5313},$
$G'_{5313}, G_{6213}, G_{4516}, G_{6315}, G'_{6315}, G''_{6315}, G_{6417}, G'_{6417}, G_{6519}\}$

$(\#\mathcal{G} = 60)$

La table publiée par Sylvester et Franklin [9] coïncide avec celle-ci à une exception : ils trouvent en plus un générateur G_{339} ; or l'espace $\mathcal{S}_{4,5}^{(3,3,9)}$ est de dimension 9, et ce G_{339} ne peut donc être qu'une combinaison linéaire de XG_{239}, $P_3Q_4G_{202}$, P_3G_{226}, $P_3G'_{226}$, Q_4G_{315}, P_3^3, $G_{303}G_{036}$, $G_{214}G_{125}$, et $G'_{214}G_{125}$, qui sont libres, comme on peut le vérifier à l'aide de leurs expressions rationnelles du numéro ④.

On ne donne ici que les 35 premiers générateurs, soit ceux de degré total au plus 5 ; outre $Z, \dots, P_3$, ce sont :

$$G_{202} = x_2^2 - 2x_1x_3$$

$$G_{036} = 2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 6y_2^2y_5 + 9y_1y_4^2 - 12y_1y_3y_5$$

$$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_1(3y_1y_4 - y_2y_3)$$

$$G_{124} = x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_2(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_1(2y_3^2 - 3y_2y_4)$$

$$G_{125} = x_4(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_3(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) + x_1(2y_2y_5 - y_3y_4)$$

$$G_{213} = (x_2^2 - 2x_1x_3)y_2 + (3x_1x_4 - x_2x_3)y_1$$

$$G_{214} = (x_2^2 - 2x_1x_3)y_3 + (3x_1x_4 - x_2x_3)y_2 + (2x_3^2 - 3x_2x_4)y_1$$

$$G'_{214} = (x_3^2 - 2x_2x_4)y_1 + 2x_1(x_4y_2 - x_3y_3 + x_2y_4 - x_1y_5)$$

$$G_{303} = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$$

$$G_{136} = 3x_4(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 3x_3(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4)$$
$$- 3x_2(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4) + x_1(4y_3^3 - 9y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2)$$

$$G_{225} = (3x_1x_4 - x_2x_3)(y_2^2 - 2y_1y_3) - (x_2^2 - 2x_1x_3)(3y_1y_4 - y_2y_3)$$

$$G_{226} = (2x_3^2 - 3x_2x_4)(y_2^2 - 2y_1y_3) - (3x_1x_4 - x_2x_3)(3y_1y_4 - y_2y_3) + (x_2^2 - 2x_1x_3)(2y_3^2 - 3y_2y_4)$$

$$G'_{226} = (x_3^2 - x_2x_4)(y_2^2 - 2y_1y_3) + (x_2x_3 - x_1x_4)(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_2^2(2y_3^2 - 3y_2y_4)$$
$$+ 4x_1x_3(y_2y_4 + y_1y_5) + 2x_1x_2(2y_2y_5 - y_3y_4) + x_1^2(3y_4^2 - 4y_3y_5)$$

$$G_{315} = (x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)y_3 - (x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)y_2 - (x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)y_1$$

$$G_{316} = 3(x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)y_4 - 3(x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)y_3$$
$$- 3(x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)y_2 + (4x_3^3 - 9x_2x_3x_4 + 9x_1x_4^2)y_1$$

$$G'_{316} = (2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 9x_1x_4^2)y_1 + 6(x_2^2x_4 - 2x_1x_3x_4)y_2 - 6(x_2^2x_3 - 2x_1x_3^2)y_3$$
$$+ 6(x_2^3 - 3x_1x_2x_3)y_4 - 6(x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3)y_5$$

$$G_{406} = 3x_2^2x_3^2 - 6x_2^3x_4 - 8x_1x_3^3 + 18x_1x_2x_3x_4 - 9x_1^2x_4^2$$

$$G_{237} = 3x_3x_4(2y_1^2y_3 - y_1y_2^2) + (x_3^2 + 3x_2x_4)y_2^3 - 6x_2x_4y_1y_2y_3 - 6x_3^2y_1^2y_4$$
$$- (3x_1x_4 + 5x_2x_3)y_2^2y_3 + 2(3x_1x_4 + x_2x_3)y_1y_3^2 + 12x_2x_3y_1y_2y_4$$
$$+ 4(x_2^2 + x_1x_3)y_2y_3^2 - 3x_2^2y_2^2y_4 - 6(x_2^2 + 2x_1x_3)y_1y_3y_4$$
$$+ 3x_1x_2(-2y_3^3 + 2y_2y_3y_4 + 3y_1y_4^2) + 3x_1^2(2y_3^2y_4 - 3y_2y_4^2)$$

$$
\begin{aligned}
G_{238} = {} & x_4^2(y_1y_2^2 - 2y_1^2y_3) - 2x_3x_4(y_2^3 - 2y_1y_2y_3) + x_3^2(2y_2^2y_3 - y_1y_3^2 - 6y_1y_2y_4 + 6y_1^2y_5) \\
& + 2x_2x_4(y_2^2y_3 - 3y_1y_3^2 + 2y_1y_2y_4 - 2y_1^2y_5) + 2x_1x_4(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 2y_1y_3y_4 + 2y_1y_2y_5) \\
& + 2x_2x_3(-2y_2y_3^2 + y_2^2y_4 + 6y_1y_3y_4 - 4y_1y_2y_5) - 2x_1x_3(y_3^3 - 4y_2y_3y_4 + 9y_1y_4^2 + 2y_2^2y_5 - 6y_1y_3y_5) \\
& + 2x_2^2(2y_3^3 - 4y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 - 2y_1y_3y_5) - 2x_1x_2(3y_3^2y_4 - 7y_2y_4^2 + 4y_2y_3y_5 - 2y_1y_4y_5) \\
& - 2x_1^2(y_3y_4^2 - 5y_3^2y_5 + 6y_2y_4y_5 - 2y_1y_5^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{239} = {} & x_4^2(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 2x_3x_4(y_2^2y_3 - 3y_1y_3^2 + y_1y_2y_4 + 2y_1^2y_5) \\
& + 2(x_3^2 + x_2x_4)(y_2^2y_4 - 3y_1y_3y_4 + 2y_1y_2y_5) + (3x_2x_3 + x_1x_4)(3y_1y_4^2 - 2y_2^2y_5) \\
& - (3x_2^2 + 4x_1x_3)(y_2y_4^2 - 2y_2y_3y_5 + 2y_1y_4y_5) + 2x_1x_2(3y_3y_4^2 - 6y_3^2y_5 + 2y_2y_4y_5 + 4y_1y_5^2) \\
& - 2x_1^2(3y_4^3 - 6y_3y_4y_5 + 4y_2y_5^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{327} = {} & (x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)(y_2^2 - 2y_1y_3) + (x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)(y_2y_3 - 3y_1y_4) \\
& - (x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)(2y_3^2 - 3y_2y_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{328} = {} & x_3x_4^2y_1^2 - (x_2x_4^2 + 2x_3^2x_4)y_1y_2 - (x_1x_4^2 - 3x_2x_3x_4)y_2^2 + (3x_1x_4^2 + 2x_3^3)y_1y_3 \\
& - (x_1x_3x_4 + 3x_2^2x_4 + 3x_2x_3^2)y_2y_3 - (5x_1x_3x_4 - 3x_2^2x_4 + 3x_2x_3^2)y_1y_4 + (3x_1x_2x_4 + x_2^2x_3)y_3^2 \\
& + (x_1x_2x_4 + 4x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3)y_2y_4 - 2(x_1x_2x_4 - 2x_1x_3^2)y_1y_5 - 3(x_1^2x_4 + 3x_1x_2x_3 + x_2^3)y_3y_4 \\
& + 2(x_1^2x_4 - 3x_1x_2x_3)y_2y_5 + 2(2x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2)(y_4^2 + y_3y_5) - 16x_1^2x_2y_4y_5 + 8x_1^3y_5^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'_{328} = {} & (3x_1x_4^2 - 4x_2x_3x_4 + 2x_3^3)(y_2^2 - 2y_1y_3) + 2(2x_2^2x_4 - x_1x_3x_4 - x_2x_3^2)(y_2y_3 - 3y_1y_4) \\
& + 2(2x_1x_3^2 - 3x_1x_2x_4)(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) + 2(3x_1^2x_4 - x_1x_2x_3)(y_3y_4 - 2y_2y_5) \\
& + (x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3)(3y_4^2 - 4y_3y_5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G''_{328} = {} & (9x_1x_4^2 - 18x_2x_3x_4 + 10x_3^3)(y_2^2 - 2y_1y_3) - 6(3x_2^2x_4 - 2x_2x_3^2)(y_2y_3 - 3y_1y_4) \\
& - 6(x_2^2x_3 + 2x_1x_3^2 - 6x_1x_2x_4)(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) + 6(x_2^3 - 6x_1^2x_4)(y_3y_4 - 2y_2y_5) \\
& + 9(x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3)(4y_3y_5 - 3y_4^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{417} = {} & 4(x_1x_2^3 - 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1^3x_4)y_5 - (3x_2^4 - 8x_1x_2^2x_3 - 4x_1^2x_3^2 + 12x_1^2x_2x_4)y_4 \\
& + (3x_2^3x_3 - 10x_1x_2x_3^2 + 3x_1x_2^2x_4 + 6x_1^2x_3x_4)y_3 - (x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 + x_2^3x_4 + 3x_1^2x_4^2)y_2 \\
& + (x_2^2x_3x_4 - 4x_1x_3^2x_4 + 3x_1x_2x_4^2)y_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'_{417} = {} & 2(x_1x_2^3 - 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1^3x_4)y_5 - (3x_2^4 - 10x_1x_2^2x_3 + 4x_1^2x_3^2 + 6x_1^2x_2x_4)y_4 \\
& + (3x_2^3x_3 - 8x_1x_2x_3^2 - 3x_1x_2^2x_4 + 12x_1^2x_3x_4)y_3 - (2x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - x_2^3x_4 + 6x_1^2x_4^2)y_2 \\
& + (x_2x_3^3 - x_2^2x_3x_4 - 5x_1x_3^2x_4 + 6x_1x_2x_4^2)y_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{418} = {} & 6(x_2^4 - 4x_1x_2^2x_3 + 4x_1^2x_3^2)y_5 - 6(x_2^3x_3 - 2x_1x_2x_3^2 - 3x_1x_2^2x_4 + 6x_1^2x_3x_4)y_4 \\
& + 2(3x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 + 3x_2^3x_4 + 9x_1^2x_4^2)y_3 - 2(2x_2x_3^3 - 3x_2^2x_3x_4 - 6x_1x_3^2x_4 + 9x_1x_2x_4^2)y_2 \\
& + (4x_3^4 - 12x_2x_3^2x_4 + 9x_2^2x_4^2)y_1
\end{aligned}
$$

---

(4)

$$G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$$

$$G_{036} = Z^{-3}(Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4)$$

$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$

$$G_{124} = Z^{-2}(XQ_2^2 - P_1Q_3 + ZP_2Q_2)$$

$$G_{125} = Z^{-3}(XQ_2Q_3 - P_1Q_2^2 + Z^2P_1Q_4 + ZP_2Q_3 - Z^2P_3Q_2)$$

$$G_{213} = Z^{-2}(X^2Q_3 - XP_1Q_2 - 3XZ^2P_3 + ZP_1P_2)$$

$$G_{214} = Z^{-3}(X^2Q_2^2 + XP_1Q_3 + 3XZP_2Q_2 - 2P_1^2Q_2 - 3Z^2P_1P_3 + 2Z^2P_2^2)$$

$$G'_{214} = Z^{-3}(X^2Q_2^2 - X^2Z^2Q_4 + 2XZP_2Q_2 - P_1^2Q_2 - 2Z^2P_3P_3 + Z^2P_2^2)$$

$$G_{303} = Z^{-3}(X^3Q_3 - 3X^2Z^2P_3 + 3XZP_1P_2 - P_1^3)$$

$$G_{136} = Z^{-3}(XQ_2^3 + 2XQ_3^2 - 3P_1Q_2Q_3 + 3ZP_2Q_2^2 - 3Z^2P_3Q_3)$$

$$G_{225} = Z^{-3}(2X^2Q_2Q_3 - XP_1Q_2^2 + 2XZP_2Q_3 - 3XZ^2P_3Q_2 - P_1^2Q_3 + ZP_1P_2Q_2)$$

$$G_{226} = Z^{-4}(-X^2Q_3^2 + 2XP_1Q_2Q_3 + XZP_2Q_2^2 + 3XZ^2P_3Q_3 - P_1^2Q_2^2 - ZP_1P_2Q_3$$
$$-3Z^2P_1P_3Q_2 + 2Z^2P_2^2Q_2)$$

$$G'_{226} = Z^{-3}(XP_2Q_2^2 + XZP_3Q_3 - 2XZ^2P_2Q_4 - P_1P_2Q_3 - ZP_1P_3Q_2 + ZP_2^2Q_2)$$

$$G_{315} = Z^{-4}(-X^3Q_2Q_3 + X^2P_1Q_2^2 - X^2ZP_2Q_3 + 3X^2Z^2P_3Q_2 + XP_1^2Q_3 + XZP_1P_2Q_2$$
$$+3XZ^3P_2P_3 - P_1^3Q_2 - 3Z^2P_1^2P_3 + Z^2P_1P_2^2)$$

$$G_{316} = Z^{-5}(-X^3Q_2^3 + 2X^3Q_3^2 - 3X^2P_1Q_2Q_3 - 3X^2ZP_2Q_2^2 - 9X^2Z^2P_3Q_3 + 3XP_1^2Q_2^2$$
$$+6XZP_1P_2Q_3 + 9XZ^2P_1P_3Q_2 + 9XZ^4P_3^2 - P_1^3Q_3 - 3XZP_1^2P_2Q_2$$
$$-9Z^3P_1P_2P_3 + 4Z^3P_2^3)$$

$$G'_{316} = Z^{-5}(-2X^3Q_2^3 + X^3Q_3^2 + 3X^3Z^2Q_2Q_4 - 6X^2ZP_2Q_2^2 + 6X^2Z^3P_2Q_4 - 6X^2Z^2P_3Q_3$$
$$+3XP_1^2Q_2^2 - 3XZ^2P_1^2Q_4 + 6XZP_1P_2Q_3 + 6XZ^2P_1P_3Q_2 - 3XZ^2P_2^2Q_2 + 9XZ^4P_3^2$$
$$-2P_1^3Q_3 - 6Z^3P_1P_2P_3 + 2Z^3P_2^3)$$

$$G_{406} = Z^{-6}(-X^4Q_2^3 - X^4Q_3^2 - 6X^3ZP_2Q_2^2 + 6X^3Z^2P_3Q_3 + 3X^2P_1^2Q_2^2 - 6X^2ZP_1P_2Q_3$$
$$-12X^2Z^2P_2^2Q_2 - 9X^2Z^4P_3^2 + 2XP_1^3Q_3 + 12XZP_1^2P_2Q_2 + 18XZ^3P_1P_2P_3$$
$$-8XZ^3P_2^3 - 3P_1^4Q_2 - 6Z^2P_1^3P_3 + 3Z^2P_1^2P_2^2)$$

$$G_{237} = Z^{-4}(X^2Q_2^2Q_3 - XP_1Q_2^3 - XP_1Q_3^2 - XZP_2Q_2Q_3 + P_1^2Q_2Q_3 + P_1P_2Q_2^2$$
$$-2Z^2P_2^2Q_3 + 3Z^3P_2P_3Q_2)$$

$$G_{238} = Z^{-5}(-X^2Q_2Q_3^2 + X^2Z^4Q_4^2 + 2XP_1Q_2^2Q_3 - 2XZP_2Q_3^2 - P_1^2Q_2^3$$
$$+2ZP_1P_2Q_2Q_3 - 2Z^4P_1P_3Q_4 - Z^2P_2^2Q_2^2 + 3Z^4P_2^2Q_4 + Z^4P_3^2Q_2)$$

$$G_{239} = Z^{-6}(X^2Q_2^2Q_3 - 2X^2Z^2Q_2Q_3Q_4 - XP_1Q_2^4 - XP_1Q_2Q_3^2 + 3XZ^2P_1Q_2^2Q_4 - 2XZ^4P_1Q_4^2$$
$$+2XZP_2Q_2^2Q_3 - 2XZ^3P_2Q_3Q_4 - XZ^2P_3Q_2^3 - XZ^2P_3Q_3^2 + XZ^4P_3Q_2Q_4$$
$$+P_1^2Q_2^2Q_3 - Z^2P_1^2Q_3Q_4 - ZP_1P_2Q_2^3 - ZP_1P_2Q_3^2 + Z^3P_1P_2Q_2Q_4$$
$$+2Z^2P_1P_3Q_2Q_3 + Z^2P_2^2Q_2Q_3 - 2Z^3P_2P_3Q_2^2 + 2Z^5P_2P_3Q_4 + Z^4P_3^2Q_3)$$

$$
\begin{aligned}
G_{327} = Z^{-5}\big(& X^3Q_2^2Q_3 - X^2P_1Q_2^3 + X^2P_1Q_3^2 + 5X^2ZP_2Q_2Q_3 - 3XP_1^2Q_2Q_3 \\
& -4XZP_1P_3Q_2^2 - 3XZ^2P_1P_3Q_3 + 4XZ^2P_2^2Q_3 - 3XZ^3P_2P_3Q_2 + 2P_1^3Q_2^2 \\
& -ZP_1^2P_2Q_3 + 3Z^2P_1^2P_3Q_2 - Z^2P_1P_2^2Q_2 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{328} = Z^{-6}\big(& -X^3Z^2Q_2^2Q_4 + 2X^3Z^4Q_4^2 - X^2P_1Q_2^2Q_3 + 3X^2Z^2P_1Q_3Q_4 - X^2ZP_2Q_2^3 \\
& +X^2Z^3P_2Q_2Q_4 + X^2Z^2P_3Q_2Q_3 + XP_1^2Q_2^3 + XP_1^2Q_3^2 - 2XZ^2P_1^2Q_2Q_4 - XZ^4P_1P_3Q_4 \\
& -2XZ^2P_2^2Q_2^2 + 2XZ^4P_2^2Q_4 + XZ^3P_2P_3Q_3 - XZ^4P_3^2Q_2 - P_1^3Q_2Q_3 + ZP_1^2P_2Q_2^2 \\
& -Z^2P_1^2P_3Q_3 + Z^2P_1P_2^2Q_3 + Z^3P_1P_2P_3Q_2 - Z^3P_2^3Q_2 + Z^5P_2P_3^2 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'_{328} = Z^{-6}\big(& X^3Q_2^4 - 2X^3Z^2Q_2^2Q_4 - 2X^2Z^2P_1Q_3Q_4 + 4X^2ZP_2Q_2^3 - 6X^2Z^3P_2Q_2Q_4 \\
& -2X^2Z^2P_3Q_2Q_3 - 2XP_1^2Q_2^3 - XP_1^2Q_3^2 + 4XZ^2P_1^2Q_2Q_4 - 2XZP_1P_2Q_2Q_3 \\
& -2XZ^2P_1P_3Q_2^2 + 6XZ^4P_1P_3Q_4 + 5XZ^2P_2^2Q_2 - 4XZ^4P_2^2Q_4 - 2XZ^3P_2P_3Q_3 \\
& +3XZ^4P_3^2Q_2 + 2P_1^3Q_2Q_3 - 2ZP_1^2P_2Q_2^2 + 4Z^2P_1^2P_3Q_3 - 2Z^2P_1P_2^2Q_3 - 4Z^3P_1P_2P_3Q_2 \\
& +2Z^3P_2^3Q_2 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G''_{328} = Z^{-6}\big(& 5X^3Q_2^4 - 4X^3Q_2Q_3^2 - 12X^3Z^2Q_2^2Q_4 + 6X^2P_1Q_2^2Q_3 - 12X^2Z^2P_1P_3Q_4 + 18X^2ZP_2Q_2^3 \\
& -6X^2ZP_2Q_3^2 - 30X^2Z^3P_2Q_2Q_4 - 12XP_1^2Q_2^3 - 3XP_1^2Q_3^2 + 24XZ^2P_1^2Q_2Q_4 \\
& -6XZP_1P_2Q_2Q_3 - 18XZ^2P_1P_3Q_2^2 + 36XZ^4P_1P_3Q_4 + 21XZ^2P_2^2Q_2^2 - 12XZ^4P_2^2Q_4 \\
& +9XZ^4P_3^2Q_2 + 8P_1^3Q_2Q_3 - 6ZP_1^2P_2Q_2^2 - 6Z^3P_1^2P_2Q_4 + 18Z^2P_1^2P_3Q_3 \\
& -12Z^2P_1P_2^2Q_3 - 18Z^3P_1P_2P_3Q_2 + 10Z^3P_2^3Q_2 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{417} = Z^{-6}\big(& -X^4Q_2^2Q_3 + 2X^4Z^2Q_3Q_4 + X^3P_1Q_3^2 - X^3ZP_2Q_2Q_3 + 4X^3Z^2P_3Q_2^2 \\
& -6X^3Z^4P_3Q_4 - 3X^2ZP_1P_2Q_2^2 + 6X^2Z^3P_1P_2Q_4 - 2X^2Z^2P_1P_3Q_3 + 7X^2Z^3P_2P_3Q_2 \\
& +XP_1^3Q_2^2 - 2XZ^2P_1^3Q_4 + 3XZP_1^2P_2Q_3 - 2XZ^2P_1^2P_3Q_2 - 3XZ^2P_1P_2^2Q_2 \\
& -3XZ^4P_1P_3^2 + 4XZ^4P_2^2P_3 - P_1^4Q_3 + ZP_1^3P_2Q_2 - Z^3P_1^2P_2P_3 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'_{417} = Z^{-6}\big(& -2X^4Q_2^2Q_3 + X^4Z^2Q_3Q_4 + X^3P_1Q_2^3 - 5X^3ZP_2Q_2Q_3 + 5X^3Z^2P_3Q_2^2 \\
& -3X^3Z^4P_3Q_4 + 3X^2P_1^2Q_2Q_3 + 3X^2Z^3P_1P_2Q_4 + 2X^2Z^2P_1P_3Q_3 - 3X^2Z^2P_2^2Q_3 \\
& +11X^2Z^3P_2P_3Q_2 - XP_1^3Q_2^2 - XZ^2P_1^3Q_4 + 3XZP_1^2P_2Q_3 - 7XZ^2P_1^2P_3Q_2 \\
& -3XZ^2P_1P_2^2Q_2 - 6XZ^4P_1P_3^2 + 5XZ^4P_2^2P_3 - P_1^4Q_3 + 2ZP_1^3P_2Q_2 \\
& +Z^3P_1^2P_2P_3 - Z^3P_1P_2^3 \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{418} = Z^{-7}\big(& -3X^4Q_2Q_3^2 + 3X^4Z^2Q_2^2Q_4 + 6X^3P_1Q_2^2Q_3 + 2X^3ZP_2Q_2^3 - 4X^3ZP_2Q_3^2 \\
& +12X^3Z^3P_2Q_2Q_4 + 12X^3Z^2P_3Q_2Q_3 - 3X^2P_1^2Q_2^3 + 3X^2P_1^2Q_3^2 - 6X^2Z^2P_1^2Q_2Q_4 \\
& +6X^2ZP_1P_2Q_2Q_3 - 12X^2Z^2P_1P_3Q_2^2 + 9X^2Z^2P_2^2Q_2^2 + 12X^2Z^4P_2^2Q_4 + 12X^2Z^3P_2P_3Q_3 \\
& -9X^2Z^4P_3^2Q_2 - 6XP_1^3Q_2Q_3 - 6XZP_1^2P_2Q_2^2 - 12XZ^3P_1^2P_2Q_4 - 12XZ^2P_1^2P_3Q_3 \\
& -12XZ^3P_1P_2P_3Q_2 + 12XZ^3P_2^3Q_2 + 3P_1^4Q_2^2 + 3Z^2P_1^4Q_4 + 2ZP_1^3P_2Q_3 \\
& +12Z^2P_1^3P_3Q_2 - 9Z^2P_1^2P_2^2Q_2 + 9Z^4P_1^2P_3^2 - 12Z^4P_1P_2^2P_3 + 4Z^4P_2^4 \big)
\end{aligned}
$$

⑤ $|P_{pqm}| = 3p + 4q - 2m$

$|Z| = 4$ $|X| = 3$ $|\mathcal{Q}_2| = 4$ $|\mathcal{Q}_4| = 0$ $|P_1| = 5$ $|P_2| = 3$ $|P_3| = 1$ $|G_{202}| = 2$ $|\mathcal{Q}_3| = 6$

$|G_{036}| = 0$ $|G_{123}| = 5$ $|G_{124}| = 3$ $|G_{125}| = 1$ $|G_{213}| = 4$ $|G_{214}| = 2$ $|G'_{214}| = 2$

$|G_{303}| = 3$ $|G_{136}| = 3$ $|G_{225}| = 4$ $|G_{226}| = 2$ $|G'_{226}| = 2$ $|G_{315}| = 3$ $|G_{316}| = 1$

$|G'_{316}| = 1$ $|G_{406}| = 0$ $|G_{237}| = 4$ $|G_{238}| = 2$ $|G_{239}| = 0$ $|G_{327}| = 3$ $|G_{328}| = 1$

$|G'_{328}| = 1$ $|G''_{328}| = 1$ $|G_{417}| = 2$ $|G'_{417}| = 2$ $|G_{418}| = 0$ $|G_{3310}| = 1$ $|G'_{3310}| = 1$

$|G_{429}| = 2$ $|G'_{429}| = 2$ $|G_{4210}| = 0$ $|G'_{4210}| = 0$ $|G_{519}| = 1$ $|G_{3412}| = 1$ $|G_{4312}| = 0$

$|G'_{4312}| = 0$ $|G''_{4312}| = 0$ $|G_{5211}| = 1$ $|G'_{5211}| = 1$ $|G_{4414}| = 0$ $|G'_{4414}| = 0$ $|G_{5313}| = 1$

$|G'_{5313}| = 1$ $|G_{6213}| = 0$ $|G_{4516}| = 0$ $|G_{6315}| = 0$ $|G'_{6315}| = 0$ $|G''_{6315}| = 0$ $|G_{6417}| = 0$

$|G'_{6417}| = 0$ $|G_{6519}| = 0$

---

⑥ $\mathcal{G}_{4,5} = k[\mathcal{G}]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies a des centaines de générateurs. On donne ici ceux de degré au plus 5 ; il y en a 29 (6 de degré 4 et 23 de degré 5) qui sont :

(σ_1) $(3,1,3)$ $P_1 G_{202} - Z G_{303} + X G_{123} = 0$ $|\sigma_1| = 7$

(σ_2) $(2,2,2)$ $P_1^2 - X^2 \mathcal{Q}_2 - 2XZP_2 - Z^2 G_{202} = 0$ $|\sigma_2| = 10$

(σ_3) $(2,2,3)$ $P_1 P_2 - 3XZP_3 + XG_{123} - ZG_{213} = 0$ $|\sigma_3| = 8$

(σ_4) $(2,2,4)$ $2P_2^2 - 3P_1P_3 - 2\mathcal{Q}_2 G_{202} - XG_{124} - ZG_{214} = 0$ $|\sigma_4| = 6$

(σ_5) $(2,2,4)$ $2P_2^2 - 4P_1P_3 - 2\mathcal{Q}_2 G_{202} - 2ZG'_{214} = 0$ $|\sigma_5| = 6$

(σ_6) $(1,3,3)$ $P_1 \mathcal{Q}_2 - X\mathcal{Q}_3 + ZG_{123} = 0$ $|\sigma_6| = 9$

(σ_7) $(4,1,4)$ $P_1 G_{303} - ZG_{202}^2 + XP_2 G_{202} - X^2 G_{214} = 0$ $|\sigma_7| = 8$

(σ_8) $(4,1,5)$ $P_2 G_{303} - G_{202} G_{213} + XG_{315} = 0$ $|\sigma_8| = 6$

(σ_9) $(4,1,6)$ $3P_3 G_{303} - 3G_{202} G_{214} + 2ZG_{406} + XG_{316} = 0$ $|\sigma_9| = 4$

(σ_{10}) $(4,1,6)$ $6G_{202} G'_{214} - 2XG'_{316} + XG_{316} - 3G_{202} G_{214} - 3P_3 G_{303} = 0$ $|\sigma_{10}| = 4$

(σ_{11}) $(3,2,4)$ $P_1 G_{213} + XZG_{214} - ZP_2 G_{202} + X\mathcal{Q}_2 G_{202} = 0$ $|\sigma_{11}| = 9$

(σ_{12}) $(3,2,5)$ $XG_{225} - \mathcal{Q}_2 G_{303} + G_{202} G_{123} = 0$ $|\sigma_{12}| = 7$

(σ_{13}) $(3,2,5)$ $ZG_{315} - G_{202} G_{123} + P_2 G_{213} - 3ZP_3 G_{202} = 0$ $|\sigma_{13}| = 7$

(σ_{14}) $(3,2,5)$ $ZG_{315} + P_1 G_{214} - P_2 G_{213} + \mathcal{Q}_2 G_{303} = 0$ $|\sigma_{14}| = 7$

(σ_{15}) $(3,2,5)$ $P_1 G'_{214} + X^2 G_{125} + XP_2P_3 + 2ZG_{202}P_3 - \mathcal{Q}_2 G_{303} = 0$ $|\sigma_{15}| = 7$

(σ_{16}) $(3,2,6)$ $ZG_{316} + XG_{226} - G_{202} G_{124} + 2P_2 G_{214} - 3P_3 G_{213} = 0$ $|\sigma_{16}| = 5$

(σ_{17}) $(3,2,6)$ $XG'_{226} + P_2 G_{214} - 2P_2 G'_{214} - P_3 G_{213} - 3XP_3^2 = 0$ $|\sigma_{17}| = 5$

(σ_{18}) $(3,2,6)$ $ZG'_{316} + ZG_{316} + 3XG_{226} + 3X\mathcal{Q}_4 G_{202} - 3G_{202} G_{124} + 6P_3 G_{123} - 3P_2 G_{124} = 0$ $|\sigma_{18}| = 5$

(σ_{19}) $(2,3,4)$ $P_1G_{123} + XZG_{124} + XP_2Q_2 + ZQ_2G_{202} = 0$ $\quad |\sigma_{19}| = 10$

(σ_{20}) $(2,3,5)$ $ZG_{225} - Q_2G_{213} + Q_3G_{202} = 0$ $\quad |\sigma_{20}| = 8$

(σ_{21}) $(2,3,5)$ $XZG_{125} - Q_2G_{213} - P_2G_{123} - XP_1Q_4 - 2XP_3Q_2 = 0$ $\quad |\sigma_{21}| = 8$

(σ_{22}) $(2,3,5)$ $XZG_{125} - XP_1Q_4 + XP_3Q_2 + P_1G_{124} + P_2G_{123} + Q_3G_{202} = 0$ $\quad |\sigma_{22}| = 8$

(σ_{23}) $(2,3,6)$ $ZG_{226} + XG_{136} - Q_2G_{214} - 2P_2G_{124} - 3P_3G_{123} = 0$ $\quad |\sigma_{23}| = 6$

(σ_{24}) $(2,3,6)$ $X^2G_{036} - P_2G_{124} + ZG_{226} - 3P_3G_{123} - 2Q_2G_{214} + 3Q_2G'_{214} = 0$ $\quad |\sigma_{24}| = 6$

(σ_{25}) $(2,3,6)$ $ZG'_{226} - P_3G_{123} - P_2G_{124} + 2XP_2Q_4 = 0$ $\quad |\sigma_{25}| = 6$

(σ_{26}) $(2,3,6)$ $P_1G_{125} + ZQ_4G_{202} - ZG'_{226} + P_3G_{123} + Q_2G_{214} - Q_2G'_{214} = 0$ $\quad |\sigma_{26}| = 6$

(σ_{27}) $(1,4,4)$ $P_1Q_3 - XQ_2^2 - ZP_2Q_2 - Z^2G_{124} = 0$ $\quad |\sigma_{27}| = 11$

(σ_{28}) $(1,4,5)$ $P_2Q_3 + Q_2G_{123} - ZP_3Q_2 + ZP_1Q_4 - Z^2G_{125} = 0$ $\quad |\sigma_{28}| = 9$

(σ_{29}) $(1,4,6)$ $3P_3Q_3 - 3Q_2G_{124} + 6XQ_2Q_4 - 2XZG_{036} + ZG_{136} = 0$ $\quad |\sigma_{29}| = 7$

---

(7) $$J_{4,5} = k\,[Q_4, G_{036}, G_{406}, G_{239}, G_{418}, G_{4210}, G'_{4210}, G_{4312}, G'_{4312}, G''_{4312}, G_{4414}, G'_{4414}, G_{6213}, G_{4516}, G_{6315}, G'_{6315}, G''_{6315}, G_{6417}, G'_{6417}, G_{6519}\,] \,/\, (\Sigma_0)$$

où l'idéal Σ_0 des (premières) syzygies <u>de poids nul</u> n'a pas été calculé.

---

(8) <u>Orbites séparées</u>:

$$\mathcal{F}_{1,1} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_2 - x_2y_1,\ x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_2 - x_3y_1,\ x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_2 - x_4y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{4,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1,2} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_3 - x_2y_2,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 - x_4y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_3 - x_3y_2,\ x_2y_4 - x_3y_3 + x_4y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_3 - x_4y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{4,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$\mathcal{F}_{1,3}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_1y_4 - x_2y_3,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,3}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_2y_4 - x_3y_3,\ x_2y_5 - x_3y_4 + x_4y_3 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,4}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0,\ x_1y_5 - x_2y_4 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,4}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0,\ x_2y_5 - x_3y_4 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{1,5}$: $\begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{2,5}$: $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$

$$\mathcal{G}' = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, P_2, P_3, G_{202}, Q_3, G_{036}, G'_{214}, G_{303}, G_{406}, G_{418}\}$$

---

9. Nilcône : $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$

Equations invariantes : $X = G_{202} = Z = Q_2 = Q_4 = 0$

---

10. Séries de Poincaré : $F_{4,5}(a, b, z) = \dfrac{N}{D}$, avec

$$\begin{aligned}
N = {} & (1 + a^4b^2 + a^6b^2 + 2a^4b^3 + 3a^6b^3 + 2a^4b^4 + 2a^6b^4 - a^8b^4 - a^{10}b^4 + a^4b^5 + a^6b^5 \\
& - 2a^8b^5 - 2a^{10}b^5 - 3a^8b^6 - 2a^{10}b^6 - a^8b^7 - a^{10}b^7 - a^{14}b^9) \\
& + (ab + 2a^3b + a^5b + ab^2 + 3a^3b^2 + 2a^5b^2 + 2a^3b^3 + 3a^5b^3 - a^9b^3 + a^3b^4 + 2a^5b^4 - a^9b^4 \\
& + a^5b^5 - 2a^9b^5 - a^{11}b^5 + a^5b^6 - 3a^9b^6 - 2a^{11}b^6 - 2a^9b^7 - 3a^{11}b^7 - a^{13}b^7 - a^9b^8 \\
& - 2a^{11}b^8 - a^{13}b^8)z \\
& + (2a^2b + 2a^4b + 3a^2b^2 + 4a^4b^2 - a^8b^2 + 2a^2b^3 + 5a^4b^3 - 3a^8b^3 + a^2b^4 + 3a^4b^4 - 3a^8b^4 + a^{12}b^4 \\
& + a^4b^5 - 3a^8b^5 - a^{10}b^5 + a^{12}b^5 - 2a^8b^6 - 2a^{10}b^6 - a^8b^7 - 3a^{10}b^7 - 2a^{12}b^7 - 2a^{10}b^8 - 2a^{12}b^8 \\
& - a^{12}b^9 + a^{16}b^9)z^2 \\
& + (a^3 + ab + a^3b - a^5b - a^7b + ab^2 + 3a^3b^2 - 2a^7b^2 + ab^3 + 5a^3b^3 + 2a^5b^3 - 4a^7b^3 + a^{11}b^3 + 3a^3b^4 \\
& + 3a^5b^4 - 3a^7b^4 - 2a^9b^4 + a^{11}b^4 + a^3b^5 + 2a^5b^5 - 3a^7b^5 - 4a^9b^5 + a^{11}b^5 + a^{13}b^5 - 3a^7b^6 \\
& - 3a^9b^6 + a^{13}b^6 - a^7b^7 - 3a^9b^7 - a^{11}b^7 + 2a^{13}b^7 + a^{15}b^7 - a^9b^8 - a^{11}b^8 + a^{13}b^8 + a^{15}b^8 \\
& - a^{11}b^9 - a^{13}b^9 + a^{15}b^9)z^3 \\
& + (a^2b - a^4b - a^6b + 2a^2b^2 - 2a^6b^2 - a^8b^2 + 3a^2b^3 + 2a^4b^3 - 4a^6b^3 - 3a^8b^3 + a^2b^4 + a^4b^4 \\
& - 4a^6b^4 - 5a^8b^4 - a^{10}b^4 + a^{12}b^4 - a^4b^5 - 4a^6b^5 - 5a^8b^5 - a^{10}b^5 + 3a^{12}b^5 + a^{14}b^5 - 2a^4b^6 \\
& - 3a^6b^6 - 2a^8b^6 + a^{10}b^6 + 4a^{12}b^6 + 2a^{14}b^6 - a^4b^7 - a^6b^7 + a^8b^7 + a^{10}b^7 + 4a^{12}b^7 + 3a^{14}b^7 \\
& + 2a^8b^8 + a^{10}b^8 + 2a^{12}b^8 + 2a^{14}b^8 + a^8b^9 + a^{14}b^9 + a^{14}b^{10} + a^{14}b^{11})z^4 \\
& + (ab - a^5b + ab^2 - 3a^5b^2 - 2a^7b^2 - a^3b^3 - 5a^5b^3 - 4a^7b^3 - a^3b^4 - 4a^5b^4 - 5a^7b^4 - a^9b^4 + a^{11}b^4 \\
& - a^3b^5 - 3a^5b^5 - 4a^7b^5 - a^9b^5 + 2a^{11}b^5 + a^{13}b^5 - a^3b^6 - 2a^5b^6 - 2a^7b^6 - a^9b^6 + 2a^{11}b^6 \\
& + 3a^{13}b^6 + a^{15}b^6 - 2a^5b^7 - 2a^7b^7 + a^9b^7 + 4a^{11}b^7 + 4a^{13}b^7 + a^{15}b^7 - a^5b^8 - a^7b^8 + 2a^9b^8 \\
& + 5a^{11}b^8 + 4a^{13}b^8 + a^{15}b^8 + 2a^9b^9 + 4a^{11}b^9 + 4a^{13}b^9 + a^{15}b^9 - a^{17}b^9 + a^9b^{10} + 2a^{11}b^{10} \\
& + a^{13}b^{10})z^5
\end{aligned}$$

$$+(-a^4b^2-2a^6b^2-a^8b^2+b^3-a^2b^3-4a^4b^3-4a^6b^3-2a^8b^3-a^2b^4-4a^4b^4-5a^6b^4-2a^8b^4+a^{10}b^4$$
$$+a^{12}b^4-a^2b^5-4a^4b^5-4a^6b^5-a^8b^5+2a^{10}b^5+2a^{12}b^5-a^2b^6-3a^4b^6-2a^6b^6+a^8b^6$$
$$+2a^{10}b^6+2a^{12}b^6+a^{14}b^6-a^4b^7-2a^6b^7+a^8b^7+4a^{10}b^7+3a^{12}b^7+a^{14}b^7-a^6b^8+a^8b^8$$
$$+5a^{10}b^8+4a^{12}b^8+a^{14}b^8+4a^{10}b^9+5a^{12}b^9+a^{14}b^9+2a^{10}b^{10}+3a^{12}b^{10}-a^{16}b^{10}$$
$$+a^{12}b^{11}-a^{16}b^{11})z^6$$

$$+(-a^3b-a^3b^2-a^3b^3-a^9b^3-2a^3b^4-2a^5b^4-a^7b^4-2a^9b^4-3a^3b^5-4a^5b^5-a^7b^5-a^9b^5+a^{11}b^5$$
$$+a^{13}b^5-2a^3b^6-4a^5b^6-a^7b^6+2a^9b^6+3a^{11}b^6+2a^{13}b^6-a^3b^7-3a^5b^7+a^7b^7+5a^9b^7$$
$$+4a^{11}b^7+a^{13}b^7-a^5b^8+a^7b^8+5a^9b^8+4a^{11}b^8-a^{13}b^8-a^{15}b^8+3a^9b^9+4a^{11}b^9-2a^{13}b^9$$
$$-3a^{15}b^9+a^9b^{10}+2a^{11}b^{10}-2a^{15}b^{10}+a^{11}b^{11}+a^{13}b^{11}-a^{15}b^{11})z^7$$

$$+(-a^2b^3+a^4b^3+a^6b^3-a^2b^4-a^4b^4+a^6b^4+a^8b^4-a^2b^5-2a^4b^5+a^6b^5+3a^8b^5+a^{10}b^5-a^4b^6$$
$$+3a^8b^6+3a^{10}b^6-a^4b^7-a^6b^7+4a^8b^7+3a^{10}b^7-2a^{12}b^7-a^{14}b^7-a^6b^8+2a^8b^8+3a^{10}b^8$$
$$-3a^{12}b^8-3a^{14}b^8-a^6b^9+4a^{10}b^9-2a^{12}b^9-5a^{14}b^9-a^{16}b^9+2a^{10}b^{10}-3a^{14}b^{10}-a^{16}b^{10}$$
$$+a^{10}b^{11}+a^{12}b^{11}-a^{14}b^{11}-a^{16}b^{11}-a^{14}b^{12})z^8$$

$$+(-ab^3+a^5b^3+2a^5b^4+2a^7b^4+2a^5b^5+3a^7b^5+a^9b^5+2a^7b^6+2a^9b^6-a^5b^7+a^7b^7+3a^9b^7$$
$$-a^{13}b^7-a^5b^8+3a^9b^8-3a^{13}b^8-a^{15}b^8+3a^9b^9-5a^{13}b^9-2a^{15}b^9+a^9b^{10}-4a^{13}b^{10}-3a^{15}b^{10}$$
$$-2a^{13}b^{11}-2a^{15}b^{11})z^9$$

$$+(a^4b^4+2a^6b^4+a^8b^4+a^4b^5+3a^6b^5+2a^8b^5+2a^6b^6+3a^8b^6-a^{12}b^6+a^6b^7+2a^8b^7-a^{12}b^7$$
$$+a^8b^8-2a^{12}b^8-a^{14}b^8+a^8b^9-3a^{12}b^9-2a^{14}b^9-2a^{12}b^{10}-3a^{14}b^{10}-a^{16}b^{10}-a^{12}b^{11}-2a^{14}b^{11}$$
$$-a^{16}b^{11})z^{10}$$

$$+(a^3b^3+a^7b^5+a^9b^5+2a^7b^6+3a^9b^6+2a^7b^7+2a^9b^7-a^{11}b^7-a^{13}b^7+a^7b^8+a^9b^8$$
$$-2a^{11}b^8-2a^{13}b^8-3a^{11}b^9-2a^{13}b^9-a^{11}b^{10}-a^{13}b^{10}-a^{17}b^{12})z^{11}$$

$$D=(1-a^4)(1-b^2)(1-b^3)(1-a^4b)(1-a^4b^2)(1-a^2b^3)(1-a^4b^3)(1-az^3)(1-a^2z^2)$$
$$(1-bz^4)(1-b^2z^4)$$

On peut simplifier N et D par $(1+a^2b)(1+az)(1+bz^2)$.

$F_{4,5}(a,b,0)=\dfrac{N_0}{D_0}$ avec

$$N_0=1+a^4b^2+a^6b^2+2a^4b^3+3a^6b^3+2a^4b^4+2a^6b^4-a^8b^4-a^{10}b^4+a^4b^5+a^6b^5$$
$$-2a^8b^5-2a^{10}b^5-3a^8b^6-2a^{10}b^6-a^8b^7-a^{10}b^7-a^{14}b^9$$

$$D_0=(1-a^4)(1-b^2)(1-b^3)(1-a^4b)(1-a^4b^2)(1-a^2b^3)(1-a^4b^3)$$

Après simplification par $(1+a^2b)$, le numérateur devient:

$$1-a^2b+2a^4b^2+a^6b^2+2a^4b^3+a^6b^3-a^8b^3+2a^4b^4-2a^8b^4+a^4b^5-a^6b^5$$
$$-2a^8b^5-a^6b^6-2a^8b^6+a^{10}b^7-a^{12}b^8$$

$\boxed{\mathcal{G}_{5,5}}$ (Quartique + Quartique)

① $D = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4} + x_4\frac{\partial}{\partial x_5} + y_1\frac{\partial}{\partial y_2} + y_2\frac{\partial}{\partial y_3} + y_3\frac{\partial}{\partial y_4} + y_4\frac{\partial}{\partial y_5}$

$H = 4x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_4\frac{\partial}{\partial x_4} - 4x_5\frac{\partial}{\partial x_5} + 4y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - 2y_4\frac{\partial}{\partial y_4} - 4y_5\frac{\partial}{\partial y_5}$

$D' = 4x_5\frac{\partial}{\partial x_4} + 6x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + 6x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + 4x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + 4y_5\frac{\partial}{\partial y_4} + 6y_4\frac{\partial}{\partial y_3} + 6y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + 4y_2\frac{\partial}{\partial y_1}$

---

② $\mathcal{H}_{5,5} = k(Z, Q_2, Q_3, Q_4, X, P_1, P_2, P_3, P_4)$

$Z = G_{010} = y_1$

$Q_2 = G_{022} = y_2^2 - 2y_1y_3$

$Q_3 = G_{033} = y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4$

$Q_4 = G_{024} = y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5$

$X = G_{100} = x_1$

$P_1 = G_{111} = x_1y_2 - x_2y_1$

$P_2 = G_{112} = x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1$

$P_3 = G_{113} = x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1$

$P_4 = G_{114} = x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 - x_4y_2 + x_5y_1$

---

③ $\mathcal{G} = \{Z, X, Q_2, Q_4, P_1, P_2, P_3, P_4, G_{202}, G_{204}, Q_3, G_{036}, G_{123},$
$G_{124}, G_{125}, G_{126}, G_{213}, G_{214}, G_{215}, G_{216}, G_{303}, G_{306},$
$G_{137}, G_{227}, G_{228}, G_{317}, G_{239}, G_{329}\}$ $(\# \mathcal{G} = 28)$

$G_{202} = x_2^2 - 2x_1x_3$

$G_{204} = x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5$

$G_{036} = 2y_3^3 - 6y_2y_3y_4 + 6y_2^2y_5 + 9y_1y_4^2 - 12y_1y_3y_5$

$G_{123} = x_2(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_1(3y_1y_4 - y_2y_3)$

$G_{124} = x_3(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_2(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_1(2y_3^2 - 3y_2y_4)$

$G_{125} = x_4(y_2^2 - 2y_1y_3) + x_3(3y_1y_4 - y_2y_3) + x_2(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) + x_1(2y_2y_5 - y_3y_4)$

$G_{126} = 2x_5(y_2^2 - 2y_1y_3) + 2x_4(3y_1y_4 - y_2y_3) + 2x_3(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5)$
$+ 2x_2(2y_2y_5 - y_3y_4) + x_1(3y_4^2 - 4y_3y_5)$

$$G_{213} = (x_2^2 - 2x_1x_3)\,y_2 + (3x_1x_4 - x_2x_3)\,y_1$$

$$G_{214} = (x_2^2 - 2x_1x_3)\,y_3 + (3x_1x_4 - x_2x_3)\,y_2 + (2x_3^2 - 3x_2x_4)\,y_1$$

$$G_{215} = (x_2^2 - 2x_1x_3)\,y_4 + (3x_1x_4 - x_2x_3)\,y_3 + (x_3^2 - x_2x_4 - 2x_1x_5)\,y_2 + (2x_2x_5 - x_3x_4)\,y_1$$

$$\begin{aligned} G_{216} = {} & 2(x_2^2 - 2x_1x_3)\,y_5 + 2(3x_1x_4 - x_2x_3)\,y_4 + 2(x_3^2 - x_2x_4 - 2x_1x_5)\,y_3 \\ & + 2(2x_2x_5 - x_3x_4)\,y_2 + (3x_4^2 - 4x_3x_5)\,y_1 \end{aligned}$$

$$G_{303} = x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4$$

$$G_{306} = 2x_3^3 - 6x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_5 + 9x_1x_4^2 - 12x_1x_3x_5$$

$$\begin{aligned} G_{137} = {} & 2x_5(y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4) - 2x_4(y_2^2y_3 - 4y_1y_3^2 + 3y_1y_2y_4) \\ & - 2x_3(y_2y_3^2 - 3y_2^2y_4 + 3y_1y_3y_4) + x_2(2y_3^3 - 4y_2y_3y_4 + 3y_1y_4^2 - 2y_2^2y_5 + 4y_1y_3y_5) \\ & - x_1(2y_3^2y_4 - 3y_2y_4^2 - 2y_2y_3y_5 + 6y_1y_4y_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{227} = {} & (x_2^2 - 2x_1x_3)(y_3y_4 - 2y_2y_5) + (3x_1x_4 - x_2x_3)(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) \\ & - (x_3^2 - x_2x_4 - 2x_1x_5)(3y_1y_4 - y_2y_3) - (x_3x_4 - 2x_2x_5)(y_2^2 - 2y_1y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{228} = {} & (3x_4^2 - 4x_3x_5)(y_2^2 - 2y_1y_3) - 2(x_3x_4 - 2x_2x_5)(y_2y_3 - 3y_1y_4) \\ & + 2(x_3^2 - x_2x_4 - 2x_1x_5)(y_3^2 - y_2y_4 - 2y_1y_5) \\ & - 2(x_2x_3 - 3x_1x_4)(y_3y_4 - 2y_2y_5) + (x_2^2 - 2x_1x_3)(3y_4^2 - 4y_3y_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{317} = {} & 2(x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4)\,y_5 - 2(x_2^2x_3 - 4x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_4)\,y_4 \\ & - 2(x_2x_3^2 - 3x_2^2x_4 + 3x_1x_3x_4)\,y_3 + (2x_3^3 - 4x_2x_3x_4 + 3x_1x_4^2 - 2x_2^2x_5 + 4x_1x_3x_5)\,y_2 \\ & - (2x_3^2x_4 - 3x_2x_4^2 - 2x_2x_3x_5 + 6x_1x_4x_5)\,y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{239} = {} & -2x_4x_5(y_1y_2^2 - 2y_1^2y_3) + (x_4^2 + 2x_3x_5)\,y_2^3 - (x_4^2 + 4x_3x_5)\,y_1y_2y_3 - 3x_4^2y_1^2y_4 \\ & - 2(2x_3x_4 + x_2x_5)\,y_2^2y_3 + 4(x_3x_4 + x_2x_5)\,y_1y_3^2 + 6x_3x_4y_1y_2y_4 + 2(x_3^2 + x_2x_4)\,y_2y_3^2 \\ & + 2(x_2x_4 + x_1x_5)\,y_2^2y_4 - 2(3x_3^2 + 5x_2x_4 + 2x_1x_5)\,y_1y_3y_4 - 2x_2x_3y_3^3 - 2x_1x_4y_2y_3y_4 \\ & + 3(3x_2x_3 + 2x_1x_4)\,y_1y_4^2 - 2(x_2x_3 + x_1x_4)(y_2^2y_5 - 2y_1y_3y_5) + (x_2^2 + x_1x_3)(2y_3^2y_4 - 3y_2y_4^2) \\ & + 2(x_2^2 + 2x_1x_3)(y_2y_3y_5 - 3y_1y_4y_5) + x_1x_2(y_3y_4^2 - 8y_3^2y_5 + 8y_2y_4y_5 + 8y_1y_5^2) \\ & - x_1^2(3y_4^3 - 8y_3y_4y_5 + 8y_2y_5^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{329} = {} & -2(x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3)\,y_4y_5 + x_2^3(y_4^2 + 2y_3y_5) - x_1x_2x_3(y_4^2 + 4y_3y_5) - 3x_1^2x_4y_4^2 \\ & - 2x_2^2x_3(2y_3y_4 + y_2y_5) + 4x_1x_3^2(y_3y_4 + y_2y_5) + 6x_1x_2x_4y_3y_4 + 2x_2x_3^2(y_3^2 + y_2y_4) \\ & + 2x_2^2x_4(y_2y_4 + y_1y_5) - 2x_1x_3x_4(3y_3^2 + 5y_2y_4 + 2y_1y_5) - 2x_3^3y_2y_3 - 2x_2x_3x_4y_1y_4 \\ & + 3x_1x_4^2(3y_2y_3 + 2y_1y_4) - 2(x_2^2x_5 - 2x_1x_3x_5)(y_2y_3 + y_1y_4) + (2x_3^2x_4 - 3x_2x_4^2)(y_2^2 + y_1y_3) \\ & + 2(x_2x_3x_5 - 3x_1x_4x_5)(y_2^2 + 2y_1y_3) + (x_3x_4^2 - 8x_3^2x_5 + 8x_2x_4x_5 + 8x_1x_5^2)\,y_1y_2 \\ & - (3x_4^3 - 8x_3x_4x_5 + 8x_2x_5^2)\,y_1^2 \end{aligned}$$

4

$$G_{202} = Z^{-2}(P_1^2 - X^2Q_2 - 2XZP_2)$$

$$G_{204} = Z^{-4}(X^2Q_2^2 - X^2Z^2Q_4 + 2XZP_2Q_2 + 2XZ^3P_4 - P_1^2Q_2 - 2Z^2P_1P_3 + Z^2P_2^2)$$

$$G_{036} = Z^{-3}(Q_3^2 - Q_2^3 + 3Z^2Q_2Q_4)$$

$$G_{123} = Z^{-1}(XQ_3 - P_1Q_2)$$

$$G_{124} = Z^{-2}(XQ_2^2 - P_1Q_3 + ZP_2Q_2)$$

$$G_{125} = Z^{-3}(XQ_2Q_3 - P_1Q_2^2 + Z^2P_1Q_4 + ZP_2Q_3 - Z^2P_3Q_2)$$

$$G_{126} = Z^{-4}(XQ_2^3 + XQ_3^2 - XZ^2Q_2Q_4 - 2P_1Q_2Q_3 + 2ZP_2Q_2^2 - 2Z^3P_2Q_4$$
$$-2Z^2P_3Q_3 + 2Z^3P_4Q_2)$$

$$G_{213} = Z^{-2}(X^2Q_3 - XP_1Q_2 - 3XZ^2P_3 + ZP_1P_2)$$

$$G_{214} = Z^{-3}(X^2Q_2^2 + XP_1Q_3 + 3XZP_2Q_2 - 2P_1^2Q_2 - 3Z^2P_1P_3 + 2Z^2P_2^2)$$

$$G_{215} = Z^{-4}(-X^2Q_2Q_3 + XZ^2P_1Q_4 - XZP_2Q_3 + 2XZ^2P_3Q_2 + P_1^2Q_3 - ZP_1P_2Q_2$$
$$-2Z^3P_1P_4 + Z^3P_2P_3)$$

$$G_{216} = Z^{-5}(X^2Q_3^2 - X^2Z^2Q_2Q_4 - 2XP_1Q_2Q_3 - 2XZP_2Q_2^2 - 4XZ^2P_3Q_3 + P_1^2Q_2^2$$
$$+Z^2P_1^2Q_4 + 2ZP_1P_2Q_3 + 4Z^2P_1P_3Q_2 - 3Z^2P_2^2Q_2 - 4Z^4P_2P_4 + 3Z^4P_3^2)$$

$$G_{303} = Z^{-3}(X^3Q_3 - 3X^2Z^2P_3 + 3XZP_1P_2 - P_1^3)$$

$$G_{306} = Z^{-6}(X^3Q_3^2 - 2X^3Q_2^3 + 3X^3Z^2Q_2Q_4 - 6X^2ZP_2Q_2^2 + 6X^2Z^3P_2Q_4 - 6X^2Z^2P_3Q_3$$
$$-6X^2Z^3P_4Q_2 + 3XP_1^2Q_2^2 - 3XZ^2P_1^2Q_4 + 6XZP_1P_2Q_3 + 6XZ^2P_1P_3Q_2$$
$$-3XZ^2P_2^2Q_2 - 12XZ^4P_2P_4 + 9XZ^4P_3^2 - 2P_1^3Q_3 + 6Z^3P_1^2P_4 - 6Z^3P_1P_2P_3 + 2Z^3P_2^3)$$

$$G_{137} = Z^{-4}(2XQ_2^2Q_3 - 2XZ^2Q_3Q_4 - P_1Q_2^3 - P_1Q_3^2 + P_1Z^2Q_2Q_4 + 2ZP_2Q_2Q_3 - 2Z^2P_3Q_2^2$$
$$+2Z^3P_4Q_3)$$

$$G_{227} = Z^{-5}(X^2Q_2^2Q_3 - 2X^2Z^2Q_3Q_4 - XP_1Q_2^3 - XP_1Q_3^2 + 2XZ^2P_1Q_2Q_4 - XZ^2P_3Q_2^2$$
$$+3XZ^4P_3Q_4 + 2XZ^3P_4Q_3 + P_1^2Q_2Q_3 - Z^3P_1P_2Q_4 + Z^2P_1P_3Q_3 - 2Z^3P_1P_4Q_2$$
$$-Z^2P_2^2Q_3 + Z^3P_2P_3Q_2)$$

$$G_{228} = Z^{-6}(-X^2Q_2^4 + 2X^2Z^2Q_2^2Q_4 - 2X^2Z^4Q_4^2 + 2XP_1Q_2^2Q_3 - 4XZ^2P_1Q_3Q_4$$
$$-2XZP_2Q_2^3 - 2XZ^2P_3Q_2Q_3 - 4XZ^3P_4Q_2^2 + 4XZ^5P_4Q_4 - P_1^2Q_3^2 + 2Z^2P_1^2Q_2Q_4$$
$$+2ZP_1P_2Q_2Q_3 + 2Z^2P_1P_3Q_2^2 + 2Z^4P_1P_3Q_4 + 4Z^3P_1P_4Q_3 - Z^2P_2^2Q_2^2 - 2Z^4P_2^2Q_4$$
$$-2Z^3P_2P_3Q_3 - 4Z^4P_2P_4Q_2 + 3Z^4P_3^2Q_2)$$

$$G_{317} = Z^{-6}(2X^3Z^2Q_3Q_4 + X^2P_1Q_3^2 - X^2Z^2P_1Q_2Q_4 + 2X^2ZP_2Q_2Q_3 + 2X^2Z^2P_3Q_2^2$$
$$-6X^2Z^4P_3Q_4 - 2X^2Z^3P_4Q_3 - 2XP_1^2Q_2Q_3 - 2XZP_1P_2Q_2^2 + 4XZ^3P_1P_2Q_4$$
$$-2XZ^2P_1P_3Q_3 + 2XZ^3P_1P_4Q_2 + 2XZ^2P_2^2Q_3 + 2XZ^3P_2P_3Q_2 + 6XZ^5P_3P_4$$
$$+P_1^3Q_2^2 - Z^2P_1^3Q_4 - Z^2P_1P_2^2Q_2 - 2Z^4P_1P_2P_4 - 3Z^4P_1P_3^2 + 2Z^4P_2^2P_3)$$

$$G_{239} = Z^{-6}(X^2Q_2^3Q_3 - 2X^2Z^2Q_2Q_3Q_4 - XP_1Q_2^4 - XP_1Q_2Q_3^2 + 3XZ^2P_1Q_2^2Q_4 - 2XZ^4P_1Q_4^2$$
$$+2XZP_2Q_2^2Q_3 - 2XZ^3P_2Q_3Q_4 + P_1^2Q_2^2Q_3 - Z^2P_1^2Q_3Q_4 - ZP_1P_2Q_2^3 - ZP_1P_2Q_3^2$$
$$+Z^3P_1P_2Q_2Q_4 + Z^2P_2^2Q_2Q_3 - Z^4P_3^2Q_3 + 2Z^5P_3P_4Q_2)$$

$$G_{329} = Z^{-7}(X^3Q_2^3Q_3 - 2X^3Z^2Q_2Q_3Q_4 - X^2P_1Q_2Q_3^2 - X^2Z^2P_1Q_2^2Q_4 + 2X^2Z^4P_1Q_4^2$$
$$+2X^2ZP_2Q_2^2Q_3 - 2X^2Z^3P_2Q_3Q_4 - 3X^2Z^2P_3Q_2^3 + 6X^2Z^4P_3Q_2Q_4 + 4X^2Z^3P_4Q_2Q_3$$
$$-XP_1^2Q_2^2Q_3 + 3XZ^2P_1^2Q_3Q_4 + XZP_1P_2Q_2^3 - XZP_1P_2Q_3^2 - 3XZ^3P_1P_2Q_2Q_4 + 2XZ^2P_1P_3Q_2Q_3$$
$$+XZ^2P_2^2Q_2Q_3 + 2XZ^3P_1P_4Q_2^2 - 8XZ^5P_1P_4Q_4 - 6XZ^3P_2P_3Q_2^2 + 6XZ^5P_2P_3Q_4$$
$$+4XZ^4P_2P_4Q_3 - XZ^4P_3^2Q_3 - 10XZ^5P_3P_4Q_2 + P_1^3Q_3^2 - 2ZP_1^2P_2Q_2Q_3 + Z^2P_1^2P_3Q_2^2$$
$$-Z^4P_1^2P_3Q_4 - 6Z^3P_1^2P_4Q_3 + Z^2P_1P_2^2Q_2^2 + 2Z^3P_1P_2P_3Q_3 + 6Z^4P_1P_2P_4Q_2 + 3Z^4P_1P_3^2Q_2$$
$$+8Z^6P_1P_4^2 - 3Z^4P_2^2P_3Q_2 - 8Z^6P_2P_3P_4 + 3Z^6P_3^3)$$

(5) $|P_{pqm}| = 4p+4q-2m$;

$|Z|=4$ $|X|=4$ $|\varphi_2|=4$ $|\varphi_4|=0$ $|P_1|=6$ $|P_2|=4$ $|P_3|=2$ $|P_4|=0$

$|G_{202}|=4$ $|G_{204}|=0$ $|\varphi_3|=6$ $|G_{036}|=0$ $|G_{123}|=6$ $|G_{124}|=4$ $|G_{125}|=2$

$|G_{126}|=0$ $|G_{213}|=6$ $|G_{214}|=4$ $|G_{215}|=2$ $|G_{216}|=0$ $|G_{303}|=6$ $|G_{306}|=0$

$|G_{137}|=2$ $|G_{227}|=2$ $|G_{228}|=0$ $|G_{317}|=2$ $|G_{239}|=2$ $|G_{329}|=2$

---

(6) $\mathcal{G}_{5,5} = k[\mathcal{G}]/(\Sigma)$

où l'idéal Σ des (premières) syzygies a une bonne centaine de générateurs. On donne ici les 36 premiers, c'est-à-dire tous ceux de degré total au plus 5 (il y en a 6 de degré 4, et 30 de degré 5 — (σ_j) et (σ'_j) se correspondent par symétrie)

(σ_1) $(3,1,3)$ $P_1G_{202} - XG_{213} + ZG_{303} = 0$

(σ_2) $(2,2,2)$ $P_1^2 - X^2\varphi_2 - 2XZP_2 - Z^2G_{202} = 0$

(σ_3) $(2,2,3)$ $P_1P_2 - ZG_{213} + XG_{123} - 3XZP_3 = 0$

(σ_4) $(2,2,4)$ $P_2^2 - 2P_1P_3 - \varphi_2G_{202} - Z^2G_{204} - X^2\varphi_4 + 2XZP_4 = 0$

(σ_5) $(2,2,4)$ $2P_2^2 - 3P_1P_3 - 2\varphi_2G_{202} - XG_{124} - ZG_{214} = 0$

(σ'_1) $(1,3,3)$ $P_1\varphi_2 + ZG_{123} - X\varphi_3 = 0$

(σ_6) $(4,1,4)$ $P_1G_{303} + ZG_{202}^2 + XP_2G_{202} - X^2G_{214} = 0$

(σ_7) $(4,1,5)$ $P_2G_{303} - XP_1G_{204} + XP_3G_{202} - X^2G_{215} + G_{202}G_{213} = 0$

(σ_8) $(4,1,6)$ $2P_3G_{303} + 2G_{202}G_{214} - 4ZG_{202}G_{204} + 2XP_4G_{202} - 2XP_2G_{204} + XZG_{306} - X^2G_{216} = 0$

(σ_9) $(4,1,7)$ $P_1G_{306} + 2G_{202}G_{215} - 2G_{204}G_{213} + 2P_4G_{303} - XG_{317} = 0$

(σ_{10}) $(3,2,4)$ $P_1G_{213} - ZP_2G_{202} - X\varphi_2G_{202} - XZG_{214} = 0$

(σ_{11}) $(3,2,5)$ $G_{202}G_{123} - 3ZP_3G_{202} + 2P_2G_{213} - P_1G_{214} + \varphi_2G_{303} = 0$

(σ_{12}) $(3,2,5)$ $3XZG_{215} + 3ZP_1G_{204} - G_{202}G_{123} + P_2G_{213} - 2P_1G_{214} + 2\varphi_2G_{303} = 0$

(σ_{13}) $(3,2,5)$ $3X^2G_{125} - 6XP_1P_4 + 3XP_2P_3 + 3ZP_1G_{204} + 2G_{202}G_{123} - 2P_1G_{214} + P_2G_{213} - \varphi_2G_{303} = 0$

(σ_{14}) $(3,2,6)$ $2G_{202}G_{124} - 2P_3G_{213} + 2ZP_2G_{204} - 4X\varphi_4G_{202} + 6ZP_4G_{202} - Z^2G_{306} + XZG_{216} = 0$

(σ_{15}) $(3,2,6)$ $G_{202}G_{124} + P_1G_{215} - P_2G_{214} + X\varphi_2G_{204} - X\varphi_4G_{202} + 2ZP_2G_{204} + 2ZP_4G_{202} = 0$

(σ_{16}) $(3,2,6)$ $X^2G_{126} - 4X\varphi_2G_{204} + 4XP_2P_4 - 3XP_3^2 - Z^2G_{306} - 8ZP_2G_{204} - G_{202}G_{124}$
$- 3P_1G_{215} + 5P_2G_{214} - 4P_3G_{213} = 0$

(σ_{17}) $(3,2,7)$ $XG_{227} + 3ZP_3G_{204} - G_{202}G_{125} - 2G_{204}G_{123} + P_1G_{216} - P_2G_{215} - P_3G_{214} + 2P_4G_{213} = 0$

(σ_{18}) $(3,2,7)$ $ZG_{317} - 6ZP_3G_{204} + 2G_{202}G_{125} + 2G_{204}G_{123} - P_1G_{216} + 2P_3G_{214} - 2P_4G_{213} = 0$

(σ_{19}) $(3,2,7)$ $ZG_{317} - P_1G_{216} + 2P_2G_{215} - 2P_3G_{214} + 2P_4G_{213} - 2\varphi_4G_{303} = 0$

(σ_{20}) $(3,2,8)$ $XG_{228} + G_{202}G_{126} + 4G_{204}G_{124} + \varphi_2G_{306} + 2P_2G_{216} - 6P_3G_{215} + 4P_4G_{214} - 2X\varphi_4G_{204} = 0$

(σ'_{10}) $(2,3,4)$ $P_1G_{123} + XP_2\varphi_2 + Z\varphi_2G_{202} + XZG_{124} = 0$

(σ'_{11}) $(2,3,5)$ $\varphi_2G_{213} + P_1G_{124} + 2P_2G_{123} + \varphi_3G_{202} + 3XP_3\varphi_2 = 0$

$(\sigma'_{12})\ (2,3,5)\ 3XZG_{125} - 3XP_1Q_4 - Q_2G_{213} + 2P_1G_{124} + P_2G_{123} + 2Q_3G_{202} = 0$

$(\sigma'_{13})\ (2,3,5)\ 3Z^2G_{215} + 6ZP_1P_4 - 3ZP_2P_3 - 3XP_1Q_4 + 2Q_2G_{213} + 2P_1G_{124} + P_2G_{123} - Q_3G_{202} = 0$

$(\sigma'_{14})\ (2,3,6)\ XZG_{126} - 4ZQ_2G_{204} - Z^2G_{036} + 6XP_4Q_2 + 2XP_2Q_4 + 2Q_2G_{214} + 2P_3G_{123} = 0$

$(\sigma'_{15})\ (2,3,6)\ ZQ_2G_{204} - ZQ_4G_{202} - 2XP_4Q_2 - 2XP_2Q_4 - Q_2G_{214} + P_1G_{125} + P_2G_{124} = 0$

$(\sigma'_{16})\ (2,3,6)\ Z^2G_{216} - 4ZQ_4G_{202} + 4ZP_2P_4 - 3ZP_3^2 - X^2G_{036} - 8XP_2Q_4 - Q_2G_{21}$
$\qquad + 3P_1G_{125} + 5P_2G_{124} + 4P_3G_{123} = 0$

$(\sigma'_{17})\ (2,3,7)\ ZG_{227} + 3XP_3Q_4 + Q_2G_{215} + 2Q_4G_{213} + P_1G_{126} + P_2G_{125} - P_3G_{124} - 2P_4G_{123} = 0$

$(\sigma'_{18})\ (2,3,7)\ XG_{137} + 6XP_3Q_4 + 2Q_2G_{215} + 2Q_4G_{213} + P_1G_{126} - 2P_3G_{124} - 2P_4G_{123} = 0$

$(\sigma'_{19})\ (2,3,7)\ XG_{137} + P_1G_{126} + 2P_2G_{125} + 2P_3G_{124} + 2P_4G_{123} - 2Q_3G_{204} = 0$

$(\sigma'_{20})\ (2,3,8)\ ZG_{228} + Q_2G_{216} + 4Q_4G_{214} + G_{202}G_{036} + 2P_2G_{126} - 6P_3G_{125} + 4P_4G_{124} - 2ZQ_4G_{204} = 0$

$(\sigma'_6)\ (1,4,4)\ Z^2G_{124} - ZP_2Q_2 - XQ_2^2 + P_1Q_3 = 0$

$(\sigma'_7)\ (1,4,5)\ Q_2G_{123} - Z^2G_{125} + ZP_1Q_4 - ZP_3Q_2 + P_2Q_3 = 0$

$(\sigma'_8)\ (1,4,6)\ 2Q_2G_{124} - 2P_3Q_3 - 4XQ_2Q_4 + 2ZP_4Q_2 - 2ZP_2Q_4 + XZG_{036} - Z^2G_{126} = 0$

$(\sigma'_9)\ (1,4,7)\ 2Q_2G_{125} - 2Q_4G_{123} + 2P_4Q_3 - P_1G_{036} - ZG_{137} = 0$

On a $|\sigma_1| = |\sigma'_1| = 10$, $|\sigma_2| = 12$, $|\sigma_3| = 10$, $|\sigma_4| = |\sigma_5| = 8$, $|\sigma_6| = |\sigma'_6| = 12$, $|\sigma_7| = |\sigma'_7| = 10$, $|\sigma_8| = |\sigma'_8| = 8$, $|\sigma_9| = |\sigma'_9| = 6$, $|\sigma_{10}| = |\sigma'_{10}| = 12$, $|\sigma_{11}| = |\sigma'_{11}| = |\sigma_{12}| = |\sigma'_{12}| = |\sigma_{13}| = |\sigma'_{13}| = 10$, $|\sigma_{14}| = |\sigma'_{14}| = |\sigma_{15}| = |\sigma'_{15}| = |\sigma_{16}| = |\sigma'_{16}| = 8$, $|\sigma_{17}| = |\sigma'_{17}| = |\sigma_{18}| = |\sigma'_{18}| = |\sigma_{19}| = |\sigma'_{19}| = 6$, $|\sigma_{20}| = |\sigma'_{20}| = 4$.

---

(7) $J_{5,5} = k[Q_4, P_4, G_{204}, G_{036}, G_{126}, G_{216}, G_{306}, G_{228}]/(R)$

$$\begin{aligned}
R = {} & 4G_{228}^3 - 12G_{228}^2G_{204}Q_4 - 12G_{228}^2P_4^2 + 48G_{228}G_{204}P_4^2Q_4 \\
& + 12G_{228}G_{306}G_{126}Q_4 - 12G_{228}G_{306}G_{036}P_4 + 12G_{228}G_{036}G_{216}G_{204} \\
& - 12G_{228}G_{216}^2Q_4 - 12G_{228}G_{126}^2G_{204} + 12G_{228}G_{216}G_{126}P_4 \\
& + G_{306}^2G_{036}^2 - 4G_{306}^2Q_4^3 - 4G_{036}^2G_{204}^3 - 6G_{306}G_{036}G_{216}G_{126} \\
& + 24G_{306}G_{216}P_4Q_4^2 + 24G_{036}G_{126}G_{204}^2P_4 + 4G_{306}G_{126}^3 + 4G_{036}G_{216}^3 \\
& - 48G_{306}G_{126}P_4^2Q_4 - 48G_{036}G_{216}G_{204}P_4^2 + 32G_{306}G_{036}P_4^3 \\
& - 3G_{216}^2G_{126}^2 - 12G_{216}^2G_{204}Q_4^2 - 12G_{126}^2G_{204}^2Q_4 \\
& + 36G_{216}G_{126}G_{204}P_4Q_4 + 16G_{204}^3P_4^3 - 48G_{204}^2P_4^2Q_4^2
\end{aligned}$$

$$|R| = 0$$

---

(8) Orbites séparées:

$$F_{1,1} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_1y_2 - x_2y_1,\ x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 - x_4y_2 + x_5y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$F_{2,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_2 - x_3y_1,\ x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1,\ x_2y_4 - x_3y_3 + x_4y_2 - x_5y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$F_{3,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_2 - x_4y_1,\ x_3y_3 - x_4y_2 + x_5y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$F_{4,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \neq 0,\ x_4y_2 - x_5y_1 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$F_{5,1} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 \\ y_1 \neq 0,\ y_2^2 - 2y_1y_3,\ y_2^3 - 3y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4,\ y_3^2 - 2y_2y_4 + 2y_1y_5 \end{cases}$$

$$F_{1,2} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,\ x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ x_1y_3 - x_2y_2,\ x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 - x_4y_2 \end{cases}$$

$$F_{2,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_2y_3 - x_3y_2,\ x_2y_4 - x_3y_3 + x_4y_2,\ x_2y_5 - x_3y_4 + x_4y_3 - x_5y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$F_{3,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \neq 0,\ x_3y_3 - x_4y_2,\ x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$F_{4,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 \neq 0,\ x_4y_3 - x_5y_2 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$F_{5,2} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 \neq 0,\ y_3^2 - 2y_2y_4,\ y_3^3 - 3y_2y_3y_4 + 3y_2^2y_5 \end{cases}$$

$$F_{1,3} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,\ x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_1y_4 - x_2y_3,\ x_1y_5 - x_2y_4 + x_3y_3 \end{cases}$$

$$F_{2,3} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4,\ x_3^3 - 3x_2x_3x_4 + 3x_2^2x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \neq 0,\ x_2y_4 - x_3y_3,\ x_2y_5 - x_3y_4 + x_4y_3 \end{cases}$$

$$F_{1,4} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,\ x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0,\ x_1y_5 - x_2y_4 \end{cases}$$

$$F_{2,4} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4,\ x_3^3 - 3x_2x_3x_4 + 3x_2^2x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0,\ x_2y_5 - x_3y_4 \end{cases}$$

$$F_{1,5} : \begin{cases} x_1 \neq 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3,\ x_2^3 - 3x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_4,\ x_3^2 - 2x_2x_4 + 2x_1x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$$

$$F_{2,5} : \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3^2 - 2x_2x_4,\ x_3^3 - 3x_2x_3x_4 + 3x_2^2x_5 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 \end{cases}$$

$$\mathcal{OJ}' = \{ Z, X, Q_2, Q_3, Q_4, P_1, P_2, P_3, P_4, G_{202}, G_{303}, G_{204}, G_{306}, G_{036}, G_{126}, G_{216} \}$$

(9) Nilcône : $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$

Equations invariantes : $X = G_{202} = G_{204} = Z = Q_2 = Q_4 = 0$

Système de paramètres pour $J_{5,5}$: $\{Q_4, P_4, G_{204}, G_{036}, G_{306}, G_{216}, G_{126}\}$

G_{228} est entier de degré 3 sur ceux-ci (par la relation $\mathcal{R} = 0$, cf (7)).

---

(10) Séries de Poincaré : $F_{5,5}(a,b,z) = \dfrac{N}{D} = \dfrac{N'}{D'}$, avec

$$\begin{aligned}
N = {} & (1+a^2b^2+a^4b^4) + (ab+a^2b+a^3b+ab^2+a^2b^2+a^3b^2+ab^3+a^2b^3+a^3b^3)z^2 \\
& +(ab+a^2b+ab^2+a^2b^2+a^3b^3+a^4b^3+a^3b^4-a^5b^4-a^6b^4-a^4b^5-a^4b^6)z^4 \\
& +(a^3+ab+a^2b-a^4b-a^5b+ab^2+a^2b^2-a^3b^2-2a^4b^2-a^5b^2+b^3-a^2b^3-3a^3b^3-2a^4b^3 \\
& \quad -a^5b^3-ab^4-2a^2b^4-2a^3b^4-ab^5-a^2b^5-a^3b^5)z^6 \\
& +(-a^4b^2-a^5b^2-a^6b^2-2a^4b^3-2a^5b^3-a^6b^3-a^2b^4-2a^3b^4-3a^4b^4-a^5b^4+a^7b^4-a^2b^5 \\
& \quad -2a^3b^5-a^4b^5+a^5b^5+a^6b^5-a^2b^6-a^3b^6+a^5b^6+a^6b^6+a^4b^7)z^8 \\
& +(-a^3b-a^3b^2-ab^3-a^2b^3+a^4b^3+a^3b^4+a^4b^4+a^5b^5+a^6b^5+a^5b^6+a^6b^6)z^{10} \\
& +(a^4b^4+a^5b^4+a^6b^4+a^4b^5+a^5b^5+a^6b^5+a^4b^6+a^5b^6+a^6b^6)z^{12} \\
& +(a^3b^3+a^5b^5+a^7b^7)z^{14}
\end{aligned}$$

$$D = (1-a^2)(1-a^3)(1-b^2)(1-b^3)(1-ab)(1-a^2b)(1-ab^2)(1-az^4)(1-a^2z^4)(1-bz^4)(1-b^2z^4)$$

$$\begin{aligned}
N' = {} & (1+a^2b^2+a^4b^4) + (-a-b+ab+a^2b+a^3b+ab^2+a^2b^2+ab^3+a^3b^3-a^5b^4-a^4b^5)z^2 \\
& +(a^2+2ab-a^3b-a^4b+b^2-a^2b^2-2a^3b^2-ab^3-2a^2b^3-ab^4-a^5b^4-a^4b^5+a^5b^5)z^4 \\
& +(ab-a^2b-ab^2-a^5b^2-2a^4b^3-a^5b^3-2a^3b^4-a^4b^4+a^6b^4-a^2b^5-a^3b^5+2a^5b^5+a^4b^6)z^6 \\
& +(-a^2b-ab^2+a^3b^3+a^5b^3+a^4b^4+a^5b^4+a^3b^5+a^4b^5+a^5b^5-a^6b^5-a^5b^6)z^8 \\
& +(a^2b^2+a^4b^4+a^6b^6)z^{10}
\end{aligned}$$

$$D' = (1-a^2)(1-a^3)(1-b^2)(1-b^3)(1-ab)(1-a^2b)(1-ab^2)(1-az^2)(1-az^4)(1-bz^2)(1-bz^4)$$

$$F_{5,5}(a,b,0) = \frac{1+a^2b^2+a^4b^4}{(1-a^2)(1-a^3)(1-b^2)(1-b^3)(1-ab)(1-a^2b)(1-ab^2)}$$

APPENDICE : COVARIANTS DE CERTAINS POIDS ET DE BAS DEGRÉ (≤ 7)

On donne ici une application de la table précédente au calcul des covariants (c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{S}_{n_1,\dots,n_d}$) qui sont de degré donné ≤ 7 et de poids donné $\leq \sup_r n_r - 1$ dans les cas relevant de la table et où les n_r sont tous impairs.

Pour chaque cas, poids et degré, on donne une base explicite de l'espace des covariants (les notations sont celles de la table). Lorsqu'un degré (ou poids) n'est pas cité, c'est que l'espace de covariants correspondant est nul.

$\mathcal{S}_3$

Poids 0 : deg 0 : 1 deg 2 : Q_2 deg 4 : Q_2^2 deg 6 : Q_2^3

Poids 2 : deg 1 : Z deg 3 : ZQ_2 deg 5 : ZQ_2^2 deg 7 : ZQ_2^3

$\mathcal{S}_5$

Poids 0 : deg 0 : 1 deg 2 : Q_4 deg 3 : G_{36} deg 4 : Q_4^2

deg 5 : $Q_4 G_{36}$ deg 6 : Q_4^3 , G_{36}^2 deg 7 : $Q_4^2 G_{36}$

Poids 4 : deg 1 : Z deg 2 : Q_2 deg 3 : ZQ_4 deg 4 : ZG_{36}, Q_2Q_4

deg 5 : ZQ_4^2, Q_2G_{36} deg 6 : ZQ_4G_{36}, $Q_2Q_4^2$

deg 7 : ZQ_4^3, ZG_{36}^2, $Q_2Q_4G_{36}$

$\mathcal{S}_{3,3}$

Poids 0 : deg 0 : 1 deg 2 : P_2, Q_2, G_{202}

deg 4 : P_2^2, P_2Q_2, Q_2^2, P_2G_{202}, Q_2G_{202}, G_{202}^2 (#6)

deg 6 : P_2^3, $P_2^2Q_2$, $P_2^2G_{202}$, $P_2Q_2^2$, $P_2Q_2G_{202}$, $P_2G_{202}^2$, Q_2^3, $Q_2^2G_{202}$, $Q_2G_{202}^2$, G_{202}^3 (#10)

Poids 2 deg 1 : Z, X deg 2 : P_1

deg 3 : ZP_2, ZQ_2, ZG_{202}, XP_2, XQ_2, XG_{202} (#6)

deg 4 : P_1P_2, P_1Q_2, P_1G_{202} (#3)

deg 5 : ZP_2^2, ZP_2Q_2, ZP_2G_{202}, ZQ_2^2, ZQ_2G_{202}, ZG_{202}^2
XP_2^2, XP_2Q_2, XP_2G_{202}, XQ_2^2, XQ_2G_{202}, XG_{202}^2 (#12)

deg 6 : $P_1P_2^2$, $P_1P_2Q_2$, $P_1P_2G_{202}$, $P_1Q_2^2$, $P_1Q_2G_{202}$, $P_1G_{202}^2$ (#6)

$\underline{deg\,7}$: $ZP_2^3, ZP_2^2Q_2, ZP_2^2G_{202}, ZP_2Q_2^2, ZP_2Q_2G_{202}, ZP_2G_{202}^2,$
(#20) $ZQ_2^3, ZQ_2^2G_{202}, ZQ_2G_{202}^2, ZG_{202}^3, XP_2^3, XP_2^2Q_2, XP_2^2G_{202},$
$XP_2Q_2^2, XP_2Q_2G_{202}, XP_2G_{202}^2, XQ_2^3, XQ_2^2G_{202}, XQ_2G_{202}^2, XG_{202}^3$

$\mathcal{S}_{3,5}$ $\underline{\text{Poids } 0}$: $\underline{deg\,0}$: 1 $\underline{deg\,2}$: Q_4, G_{202} (#2) $\underline{deg\,3}$: G_{036}, G_{214} (#2)
$\underline{deg\,4}$: $Q_4^2, G_{202}^2, Q_4G_{202}, G_{226}$ (#4)
$\underline{deg\,5}$: $Q_4G_{036}, Q_4G_{214}, G_{202}G_{036}, G_{202}G_{214}$ (#4)
$\underline{deg\,6}$: $Q_4^3, Q_4^2G_{202}, Q_4G_{202}^2, G_{202}^3, G_{036}^2, G_{036}G_{214},$
$G_{214}^2, Q_4G_{226}, G_{202}G_{226}, G_{339}$ (#10)
$\underline{deg\,7}$: $Q_4^2G_{036}, Q_4G_{202}G_{036}, G_{202}^2G_{036}, G_{036}G_{226},$
$Q_4^2G_{214}, Q_4G_{202}G_{214}, G_{202}^2G_{214}, G_{214}G_{226}$ (#8)

$\underline{\text{Poids } 2}$ $\underline{deg\,1}$: X $\underline{deg\,2}$: P_2
$\underline{deg\,3}$: $XQ_4, XG_{202}, G_{124}, G_{213}$ (#4)
$\underline{deg\,4}$: $XG_{036}, XG_{214}, P_2Q_4, P_2G_{202}, G_{225}$ (#5)
$\underline{deg\,5}$: $XQ_4^2, XG_{202}^2, XQ_4G_{202}, XG_{226}, P_2G_{036}, P_2G_{214},$
$G_{124}Q_4, G_{124}G_{202}, G_{213}Q_4, G_{213}G_{202}, G_{237}$ (#11)
$\underline{deg\,6}$: $XQ_4G_{036}, XQ_4G_{214}, XG_{202}G_{036}, XG_{202}G_{214},$
$P_2Q_4^2, P_2Q_4G_{202}, P_2G_{202}^2, P_2G_{226}, G_{124}G_{036},$
$G_{124}G_{214}, G_{213}G_{036}, G_{213}G_{214}, G_{225}Q_4, G_{225}G_{202}$ (#14)
$\underline{deg\,7}$: $XQ_4^3, XQ_4^2G_{202}, XQ_4G_{202}^2, XG_{202}^3, XG_{036}^2, XG_{036}G_{214},$
$XG_{214}^2, XQ_4G_{226}, XG_{202}G_{226}, P_2Q_4G_{036}, P_2Q_4G_{214},$
$P_2G_{202}G_{036}, P_2G_{202}G_{214}, G_{124}Q_4^2, G_{124}Q_4G_{202}, G_{124}G_{202}^2,$
$G_{124}G_{226}, G_{213}Q_4^2, G_{213}Q_4G_{202}, G_{213}G_{202}^2, G_{213}G_{226},$
$G_{225}G_{036}, G_{225}G_{214}, G_{237}Q_4, G_{237}G_{202}$ (#25)
(XG_{339} est lié à $G_{213}Q_4G_{202}, G_{213}G_{226}, G_{225}G_{214}$, et
$G_{237}G_{202}$ par une seule relation linéaire)

$\underline{\text{Poids } 4}$ $\underline{deg\,1}$: Z $\underline{deg\,2}$: Q_2, P_1, X^2 $\underline{deg\,3}$: $ZQ_4, ZG_{202}, G_{123}, XP_2$ (#4)
$\underline{deg\,4}$: $ZG_{036}, ZG_{214}, Q_2Q_4, Q_2G_{202}, P_1Q_4, P_1G_{202}, X^2Q_4, X^2G_{202}, XG_{124},$
XG_{213}, G_{135} (#11)
(P_2^2 est lié à $Q_2G_{202}, ZG_{214}, XG_{124}$ et X^2Q_4 par (σ_3))
$\underline{deg\,5}$: $ZQ_4^2, ZQ_4G_{202}, ZG_{202}^2, Q_2G_{036}, Q_2G_{214}, P_1G_{036}, P_1G_{214}, G_{123}Q_4,$
$G_{123}G_{202}, X^2G_{036}, X^2G_{214}, XP_2Q_4, XP_2G_{202}, P_2G_{124}, P_2G_{213}$ (#15)
(XG_{225} est lié à P_1G_{214}, P_2G_{213}, et $G_{202}G_{123}$ par (σ_6);
ZG_{226} est lié à $Q_2G_{214}, P_2G_{124}, X^2G_{036}$ et XP_2Q_4 par (σ_{11}).)

$\underline{\deg 6}$: ZQ_4G_{036}, ZQ_4G_{214}, $ZG_{202}G_{036}$, $ZG_{202}G_{214}$, $Q_2Q_4^2$, $Q_2Q_4G_{202}$,
$Q_2G_{202}^2$, Q_2G_{226}, $P_1Q_4^2$, $P_1Q_4G_{202}$, $P_1G_{202}^2$, $G_{123}G_{036}$, $G_{123}G_{214}$,
$G_{135}Q_4$, $G_{135}G_{202}$, $X^2Q_4^2$, $X^2Q_4G_{202}$, $X^2G_{202}^2$, X^2G_{226}, XP_2G_{036},
XP_2G_{214}, $XG_{124}Q_4$, $XG_{124}G_{202}$, $XG_{213}Q_4$, $XG_{213}G_{202}$, $G_{124}G_{213}$ (#26)

($P_2^2Q_4$ est lié à $Q_2Q_4G_{202}$, ZQ_4G_{214}, XQ_4G_{124}, $X^2Q_4^2$ par (σ_3) ;
$P_2^2G_{202}$ " " $Q_2G_{202}^2$, $ZG_{202}G_{214}$, $XG_{202}G_{124}$, $X^2G_{202}Q_4$ par (σ_3) ;
G_{213}^2 " " XP_2G_{214}, $P_2^2G_{202}$, X^2G_{226} par (σ_{14}) ;

$\left.\begin{array}{l} P_1G_{226} \\ P_2G_{225} \\ XG_{237} \end{array}\right\}$ " " $\left\{\begin{array}{l} XQ_4G_{213}, P_1Q_4G_{202}, G_{202}G_{135}, \\ G_{213}G_{124}, \text{ et } G_{214}G_{123} \end{array}\right\}$ par trois relations : $\left\{\begin{array}{l} (\sigma_{17}) \\ (\sigma_{18}) \\ (\sigma_{19}) \end{array}\right.$;

G_{124}^2 " " $\left\{\begin{array}{l} X^2Q_4^2, XP_2G_{036}, XQ_4G_{124}, ZG_{202}G_{036} \\ ZQ_4G_{214}, G_{202}Q_2Q_4, Q_2G_{226} \end{array}\right\}$ par une relation (σ_{26}))

$\underline{\deg 7}$: ZQ_4^3, $ZQ_4^2G_{202}$, $ZQ_4G_{202}^2$, ZG_{202}^3, ZG_{036}^2, $ZG_{036}G_{214}$, ZG_{214}^2,
$Q_2Q_4G_{036}$, $Q_2Q_4G_{214}$, $Q_2G_{202}G_{036}$, $Q_2G_{202}G_{214}$, $P_1Q_4G_{036}$, $P_1Q_4G_{214}$,
$P_1G_{202}G_{036}$, $P_1G_{202}G_{214}$, $G_{123}Q_4^2$, $G_{123}Q_4G_{202}$, $G_{123}G_{202}^2$, $G_{123}G_{226}$, $G_{135}G_{036}$,
$X^2Q_4G_{036}$, $X^2Q_4G_{214}$, $X^2G_{202}G_{036}$, $X^2G_{202}G_{214}$, $XP_2Q_4^2$, $XP_2Q_4G_{202}$,
$XP_2G_{202}^2$, XP_2G_{226}, $XG_{124}G_{036}$, $XG_{124}G_{214}$, $XG_{213}G_{036}$, $XG_{213}G_{214}$,
$P_2G_{124}Q_4$, $P_2G_{124}G_{202}$, $P_2G_{213}Q_4$, $P_2G_{213}G_{202}$, $G_{124}G_{225}$ (#37)

($P_2^2G_{036}$ est lié à $Q_2G_{202}G_{036}$, $ZG_{214}G_{036}$, $XG_{124}G_{036}$, $X^2Q_4G_{036}$ par (σ_3) ;
$P_2^2G_{214}$ " " $Q_2G_{202}G_{214}$, ZG_{214}^2, $XG_{124}G_{214}$, $X^2Q_4G_{214}$ " (σ_3) ;
ZQ_4G_{226} " " $Q_2Q_4G_{214}$, $P_2Q_4G_{124}$, $XP_2Q_4^2$, $X^2Q_4G_{036}$ " (σ_{11}) ;
$ZG_{202}G_{226}$ " " $Q_2G_{202}G_{214}$, $P_2G_{202}G_{124}$, $XP_2Q_4G_{202}$, $X^2G_{202}G_{036}$ " (σ_{11}) ;
XQ_4G_{225} " " $Q_4G_{202}G_{123}$, $P_2Q_4G_{213}$, $P_1Q_4G_{214}$ " (σ_6) ;
$XG_{202}G_{225}$ " " $G_{202}^2G_{123}$, $P_2G_{202}G_{213}$, $P_1G_{202}G_{214}$ " (σ_6) ;

$G_{213}G_{225}$ " " $\left\{\begin{array}{l} X^2G_{202}G_{036}, X^2Q_4G_{214}, XP_2Q_4G_{202}, XP_2G_{226} \\ XG_{214}G_{124}, ZQ_4G_{202}^2, ZG_{214}^2, P_2G_{202}G_{124}, Q_2G_{202}G_{214} \end{array}\right.$
par $\underline{\text{une}}$ autre relation ; enfin

$\left.\begin{array}{l} ZG_{339} \\ P_2G_{237} \\ G_{214}G_{139} \end{array}\right\}$ sont liés à $\left\{\begin{array}{l} XG_{213}G_{036}, P_1G_{202}G_{036}, Q_4G_{202}G_{123} \\ P_1Q_4G_{214}, P_2Q_4G_{213}, G_{123}G_{226}, G_{124}G_{225} \end{array}\right.$
par $\underline{\text{trois}}$ autres relations.

$\mathcal{G}_{5,5}$ $\underline{\text{Poids } 0}$ $\underline{\deg 0}$: 1 $\underline{\deg 2}$: Q_4, P_4, G_{204} (#3)
$\underline{\deg 3}$: G_{036}, G_{126}, G_{216}, G_{306} (#4)
$\underline{\deg 4}$: Q_4^2, Q_4P_4, Q_4G_{204}, P_4^2, P_4G_{204}, G_{204}^2, G_{228} (#7)
$\underline{\deg 5}$: Q_4G_{036}, Q_4G_{126}, Q_4G_{216}, Q_4G_{306}, P_4G_{036}, P_4G_{126}, P_4G_{216},
P_4G_{306}, $G_{204}G_{036}$, $G_{204}G_{126}$, $G_{204}G_{216}$, $G_{204}G_{306}$ (#12)

deg 6: $\mathcal{Q}_4^3, \mathcal{Q}_4^2 P_4, \mathcal{Q}_4^2 G_{204}, \mathcal{Q}_4 P_4^2, \mathcal{Q}_4 P_4 G_{204}, \mathcal{Q}_4 G_{204}^2, P_4^3, P_4^2 G_{204}, P_4 G_{204}^2,$
$G_{204}^3, \mathcal{Q}_4 G_{228}, P_4 G_{228}, G_{204} G_{228}, G_{036}^2, G_{036} G_{126}, G_{036} G_{216}, G_{036} G_{306},$
$G_{126}^2, G_{126} G_{216}, G_{126} G_{306}, G_{216}^2, G_{216} G_{306}, G_{306}^2$ (#23)

deg 7: $\mathcal{Q}_4^2 G_{036}, \mathcal{Q}_4 P_4 G_{036}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{036}, P_4^2 G_{036}, P_4 G_{204} G_{036}, G_{204}^2 G_{036},$
$\mathcal{Q}_4^2 G_{126}, \mathcal{Q}_4 P_4 G_{126}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{126}, P_4^2 G_{126}, P_4 G_{204} G_{126}, G_{204}^2 G_{126},$
$\mathcal{Q}_4^2 G_{216}, \mathcal{Q}_4 P_4 G_{216}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{216}, P_4^2 G_{216}, P_4 G_{204} G_{216}, G_{204}^2 G_{216},$
$\mathcal{Q}_4^2 G_{306}, \mathcal{Q}_4 P_4 G_{306}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{306}, P_4^2 G_{306}, P_4 G_{204} G_{306}, G_{204}^2 G_{306},$
$G_{036} G_{228}, G_{126} G_{228}, G_{216} G_{228}, G_{306} G_{228}$ (#28)

Poids 2

deg 2: P_3 (#1)

deg 3: G_{125}, G_{215} (#2)

deg 4: $P_3 \mathcal{Q}_4, P_3 P_4, P_3 G_{204}, G_{137}, G_{227}, G_{317}$ (#6)

deg 5: $P_3 G_{036}, P_3 G_{126}, P_3 G_{216}, P_3 G_{306}, G_{125} \mathcal{Q}_4, G_{125} P_4, G_{125} G_{204},$
$G_{215} \mathcal{Q}_4, G_{215} P_4, G_{215} G_{204}, G_{239}, G_{329}$ (#12)

deg 6: $P_3 \mathcal{Q}_4^2, P_3 \mathcal{Q}_4 P_4, P_3 \mathcal{Q}_4 G_{204}, P_3 P_4^2, P_3 P_4 G_{204}, P_3 G_{204}^2, P_3 G_{228},$
$G_{125} G_{036}, G_{125} G_{126}, G_{125} G_{216}, G_{125} G_{306}, G_{215} G_{036}, G_{215} G_{126},$
$G_{215} G_{216}, G_{215} G_{306}, G_{137} \mathcal{Q}_4, G_{137} P_4, G_{137} G_{204}, G_{227} \mathcal{Q}_4, G_{227} P_4,$
$G_{227} G_{204}, G_{317} \mathcal{Q}_4, G_{317} P_4, G_{317} G_{204}$ (#24)

deg 7: $P_3 \mathcal{Q}_4 G_{036}, P_3 \mathcal{Q}_4 G_{126}, P_3 \mathcal{Q}_4 G_{216}, P_3 \mathcal{Q}_4 G_{306}, P_3 P_4 G_{036}, P_3 P_4 G_{126},$
$P_3 P_4 G_{216}, P_3 P_4 G_{306}, P_3 G_{204} G_{036}, P_3 G_{204} G_{126}, P_3 G_{204} G_{216}, P_3 G_{204} G_{306},$
$G_{125} \mathcal{Q}_4^2, G_{125} \mathcal{Q}_4 P_4, G_{125} \mathcal{Q}_4 G_{204}, G_{125} P_4^2, G_{125} P_4 G_{204}, G_{125} G_{204}^2,$
$G_{215} \mathcal{Q}_4^2, G_{215} \mathcal{Q}_4 P_4, G_{215} \mathcal{Q}_4 G_{204}, G_{215} P_4^2, G_{215} P_4 G_{204}, G_{215} G_{204}^2,$
$G_{137} G_{036}, G_{227} G_{036}, G_{317} G_{036}, G_{137} G_{126}, G_{227} G_{126}, G_{317} G_{126},$
$G_{137} G_{216}, G_{227} G_{216}, G_{317} G_{216}, G_{137} G_{306}, G_{227} G_{306}, G_{317} G_{306},$
$G_{239} \mathcal{Q}_4, G_{239} P_4, G_{239} G_{204}, G_{329} \mathcal{Q}_4, G_{329} P_4, G_{329} G_{204}$ (#42)

($G_{125} G_{228}$ est lié à $P_3 \mathcal{Q}_4 G_{216}, P_3 P_4 G_{126}, P_3 G_{204} G_{036}, P_4^2 G_{125}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{125},$ $G_{215} P_4 \mathcal{Q}_4, G_{317} G_{036}, G_{227} G_{126}, G_{137} G_{216}, G_{239} P_4$ et $G_{329} \mathcal{Q}_4$ par une seule relation linéaire ; et $G_{215} G_{228}$ est lié à $P_3 \mathcal{Q}_4 G_{306}, P_3 P_4 G_{216}, P_3 G_{204} G_{126},$ $P_4 G_{204} G_{125}, P_4^2 G_{215}, \mathcal{Q}_4 G_{204} G_{215}, G_{317} G_{126}, G_{227} G_{216}, G_{137} G_{306}, G_{239} G_{204},$ et $G_{329} P_4$ par une seule relation linéaire, symétrique de l'autre)

Poids 4: (Ici sont de plus soulignés les éléments dont le degré partiel par rapport aux x_j dépasse de 1 leur degré par rapport aux y_j)

deg 1: $Z, \underline{X}$ (#2)

deg 2: $\mathcal{Q}_2, P_2, G_{202}$ (#3)

deg 3: $Z\mathcal{Q}_4, ZP_4, \underline{ZG_{204}}, X\mathcal{Q}_4, \underline{XP_4}, XG_{204}, G_{124}, \underline{G_{214}}$ (#8)

deg 4: $ZG_{036}, ZG_{126}, ZG_{216}, ZG_{306}, XG_{036}, XG_{126}, XG_{216}, XG_{306},$
$\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_4, \mathcal{Q}_2 P_4, \mathcal{Q}_2 G_{204}, P_2 \mathcal{Q}_4, P_2 P_4, P_2 G_{204}, G_{202} \mathcal{Q}_4, G_{202} P_4, G_{202} G_{204}, P_3^2$ (#18)

$\underline{\deg 5}$: $ZQ_4^2, ZQ_4P_4, ZQ_4G_{204}, ZP_4^2, \underline{ZP_4G_{204}}, ZG_{204}^2, XQ_4^2, XQ_4P_4, \underline{XQ_4G_{204}},$
$\underline{XP_4^2}, XP_4G_{204}, XG_{204}^2, Q_2G_{036}, P_2G_{036}, G_{202}G_{036}, Q_2G_{126}, P_2G_{126}, \underline{G_{202}G_{126}},$
$Q_2G_{216}, \underline{P_2G_{216}}, G_{202}G_{216}, \underline{Q_2G_{306}}, P_2G_{306}, G_{202}G_{306}, G_{124}Q_4, G_{124}P_4,$
$\underline{G_{124}G_{204}}, G_{214}Q_4, \underline{G_{214}P_4}, G_{214}G_{204}, P_3G_{125}, \underline{P_3G_{215}}$ (#32)

(ZG_{228} et $\underline{XG_{228}}$ leur sont liés par (σ'_{20}) et (σ_{20}) respectivement)
(l'espace des soulignés est de dimension 9)

$\underline{\deg 6}$: $ZQ_4G_{036}, ZP_4G_{036}, ZG_{204}G_{036}, ZQ_4G_{126}, ZP_4G_{126}, ZG_{204}G_{126},$
$ZQ_4G_{216}, ZP_4G_{216}, ZG_{204}G_{216}, ZQ_4G_{306}, ZP_4G_{306}, ZG_{204}G_{306},$
$XQ_4G_{036}, XP_4G_{036}, XG_{204}G_{036}, XQ_4G_{126}, XP_4G_{126}, XG_{204}G_{126},$
$XQ_4G_{216}, XP_4G_{216}, XG_{204}G_{216}, XQ_4G_{306}, XP_4G_{306}, XG_{204}G_{306},$
$Q_2Q_4^2, Q_2Q_4P_4, Q_2Q_4G_{204}, Q_2P_4^2, Q_2P_4G_{204}, Q_2G_{204}^2, Q_2G_{228}$
$P_2Q_4^2, P_2Q_4P_4, P_2Q_4G_{204}, P_2P_4^2, P_2P_4G_{204}, P_2G_{204}^2$
$G_{202}Q_4^2, G_{202}Q_4P_4, G_{202}Q_4G_{204}, G_{202}P_4^2, G_{202}P_4G_{204}, G_{202}G_{204}^2, G_{202}G_{228}$
$G_{124}G_{036}, G_{124}G_{126}, G_{124}G_{216}, G_{124}G_{306}, G_{214}G_{036}, G_{214}G_{126}, G_{214}G_{216}, G_{214}G_{306},$
$P_3^2Q_4, P_3^2P_4, P_3^2G_{204}, G_{125}G_{215}$ (#56)

(G_{214}^2 et P_3G_{317} sont liés à par deux relations $\left\{\begin{array}{l} XG_{204}G_{126}, XP_4G_{216}, XQ_4G_{306}, ZG_{204}G_{216}, ZP_4G_{306} \\ G_{202}G_{228}, G_{202}G_{204}Q_4, G_{202}P_4^2, G_{204}^2Q_2, G_{204}P_2P_4, \\ G_{204}P_3^2, G_{306}G_{124}, \text{ et } G_{214}G_{216} \end{array}\right.$

G_{125}^2 et P_3G_{137} sont liés à par les deux relations symétriques $\left\{\begin{array}{l} ZQ_4G_{216}, ZP_4G_{126}, ZG_{204}G_{036}, XQ_4G_{126}, XP_4G_{036} \\ Q_2G_{228}, Q_2G_{204}Q_4, Q_2P_4^2, Q_4^2G_{202}, Q_4P_2P_4, \\ Q_4P_3^2, G_{036}G_{214}, \text{ et } G_{124}G_{126} \end{array}\right.$

Enfin P_3G_{227} et P_2G_{228} sont liés à par deux autres relations $\left\{\begin{array}{l} XQ_4G_{216}, XP_4G_{126}, XG_{204}G_{036}, ZG_{204}G_{126}, \\ ZP_4G_{216}, ZQ_4G_{306}, G_{202}Q_4P_4, G_{204}P_2Q_4, G_{204}Q_4P_2, \\ P_2P_4^2, P_3^2P_4, G_{214}G_{126}, G_{215}G_{125}, \text{ et } G_{216}G_{124} \end{array}\right.$)

$\underline{\deg 7}$: (la dimension totale de cet espace est 100 – on en décrit les sous-espaces de multidegré donné):

$(7,0,12)$: $XG_{306}^2, G_{202}G_{204}G_{306}, XG_{204}^3$ (libres ; #3)

$(6,1,12)$: $XG_{204}^2P_4, XG_{306}G_{216}, ZG_{306}^2, ZG_{204}^3, G_{202}G_{204}G_{216}, P_4G_{202}G_{306},$
$G_{204}^2G_{214}, P_2G_{204}G_{306}$ (libres ; #8)

$(5,2,12)$: $XG_{204}^2Q_4, XG_{204}P_4^2, XG_{204}G_{228}, XG_{306}G_{126}, XG_{216}^2, ZG_{204}^2P_4, ZG_{306}G_{216},$
$P_2P_4G_{306}, P_3^2G_{306}, G_{202}G_{204}G_{126}, P_4G_{202}G_{216}, Q_4G_{202}G_{306}, G_{204}^2G_{124},$
$P_2G_{204}G_{216}, P_3G_{204}G_{215}, P_4G_{204}G_{214}, Q_2G_{204}G_{306}, G_{215}G_{317}$
(liés par deux relations, $G_{204}\cdot(\sigma_{20})$, qui permet d'éliminer par exemple $XG_{204}G_{228}$, et une autre (σ_{57}) qui permet sans doute d'éliminer XG_{216}^2 ; la dimension de ce sous-espace est donc 16)

$(4,3,12)$: $XG_{204}P_4Q_4$, XP_4^3, XP_4G_{228}, $XG_{306}G_{036}$, $XG_{216}G_{126}$, $ZG_{204}^2Q_4$, $ZG_{204}P_4^2$, $ZG_{204}G_{228}$, $ZG_{306}G_{126}$, ZG_{216}^2, $Q_4G_{202}G_{216}$, $P_4G_{202}G_{126}$, $G_{202}G_{204}G_{036}$, $Q_2G_{204}G_{216}$, $Q_4G_{204}G_{214}$, $P_2G_{204}G_{126}$, $P_3G_{204}G_{125}$, $P_4G_{204}G_{124}$, $P_2P_4G_{216}$, $P_3^2G_{216}$, $P_2Q_4G_{306}$, $P_3P_4G_{215}$, P_3G_{329}, $P_4^2G_{214}$, $P_4Q_2G_{306}$, $G_{214}G_{228}$, $G_{215}G_{227}$, $G_{125}G_{317}$

(soit 28 polynômes liés par 5 relations linéaires:
$G_{204}\cdot(\sigma'_{20})$ qui permet d'éliminer $ZG_{204}G_{228}$
$P_4\cdot(\sigma_{20})$ " " " XP_4G_{228}
(σ_{68}), (σ_{69}), (σ_{70}) qui permettent sans doute d'éliminer $G_{214}G_{228}$, $G_{215}G_{227}$ et ZG_{216}^2 par exemple ; il reste un espace de dimension 23)

Les sous-espaces de multidegré $(3,4,12)$, $(2,5,12)$, $(1,6,12)$ et $(0,7,12)$ s'obtiennent par symétrie à partir des précédents ...

Bien que les anneaux $\mathcal{G}_7$ et $\mathcal{G}_9$ ne figurent pas dans la table, on peut donner ici quelques indications sur leurs éléments de degré ≤ 7 et de poids ≤ 6 (resp. 8) :

$\mathcal{G}_7$ a un système de 26 générateurs qui sont (on a ici $|P_{pm}| = 6p-2m$) :
de poids 0 : $Q_6 = G_{26}$, G_{412}, G_{618}, G_{1030}, G_{1545}
de poids 2 : G_{38}, G_{514}, G_{720}, G_{823}, G_{1029}, G_{1235}
de poids 4 : $Q_4 = G_{24}$, G_{410}, G_{513}, G_{719}, G_{925}
de poids 6 : G_{36}, G_{49}, G_{615}, G'_{615}, $Z = G_{10}$
de poids 8 : $Q_2 = G_{22}$, $Q_5 = G_{35}$, G_{511}
de poids 10 : G_{47}
de poids 12 : $Q_3 = G_{33}$

D'où : Poids 0 : deg 0 : 1   deg 2 : Q_6 deg 4 : Q_6^2, G_{412} (#2)
deg 6 : Q_6^3, Q_6G_{412}, G_{618} (#3)

Poids 2 : deg 3 : G_{38} deg 5 : G_{514}, Q_6G_{38} (#2)
deg 7 : $Q_6^2G_{38}$, $G_{38}G_{412}$, Q_6G_{514}, G_{720} (#4)

Poids 4 : deg 2 : Q_4 deg 4 : Q_4Q_6, G_{410} (#2)   deg 5 : G_{513}
deg 6 : $Q_4Q_6^2$, Q_4G_{412}, Q_6G_{410}, G_{38}^2 (#4)   deg 7 : Q_6G_{513}, G_{719} (#2)

Poids 6 : deg 1 : Z deg 3 : ZQ_6, G_{36} (#2)   deg 4 : G_{49}
deg 5 : ZQ_6^2, ZG_{412}, Q_4G_{38}, Q_6G_{36} (#4)   deg 6 : Q_6G_{49}, G_{615}, G'_{615} (#3)
deg 7 : ZQ_6^3, ZQ_6G_{412}, ZG_{618}, $G_{36}Q_6^2$, $G_{36}G_{412}$, $Q_4Q_6G_{38}$, Q_4G_{514}, $G_{38}G_{410}$ (#8, liés par une relation ; dimension 7)
(tous les autres sont libres)

φ_9 a un système de 69 générateurs qui sont (on a ici $|P_{pm}| = 8p-2m$) :

de poids 0 : $\varphi_8 = G_{28}, G_{312}, G_{416}, G_{520}, G_{624}, G_{728}, G_{832}, G_{936}, G_{1040}$

de poids 2 : $G_{519}, G_{623}, G_{727}, G'_{727}, G_{831}, G'_{831}, G_{935}, G'_{935}, G''_{935}, G_{1039},$
$G'_{1039}, G_{1143}, G'_{1143}, G_{1247}$

de poids 4 : $\varphi_6 = G_{26}, G_{310}, G_{414}, G'_{414}, G_{518}, G'_{518}, G_{622}, G'_{622}, G_{726}, G'_{726},$
$G_{830}, G'_{830}, G_{934}$

de poids 6 : $G_{39}, G_{413}, G_{517}, G'_{517}, G_{621}, G'_{621}, G''_{621}, G_{725}, G'_{725}, G''_{725},$
G_{829}, G'_{829}

de poids 8 : $Z = G_{10}, \varphi_4 = G_{24}, G_{38}, G_{412}, G_{516}, G_{620}$

de poids 10 : $\varphi_7 = G_{37}, G_{411}, G'_{411}, G_{515}, G'_{515}, G''_{515}, G_{619}$

de poids 12 : $\varphi_2 = G_{22}, G_{36}, G_{410}$

de poids 14 : $\varphi_5 = G_{35}, G_{49}, G_{513}$

de poids 18 : $\varphi_3 = G_{33}, G_{47}$

D'où : <u>Poids 0</u> : <u>deg 2</u> : φ_8 <u>deg 3</u> : G_{312} <u>deg 4</u> : φ_8^2, G_{416} <u>deg 5</u> : $\varphi_8 G_{312}, G_{520}$
<u>deg 6</u> : $\varphi_8^3, \varphi_8 G_{416}, G_{312}^2, G_{624}$ <u>deg 7</u> : $\varphi_8^2 G_{312}, \varphi_8 G_{520}, G_{312} G_{416}, G_{728}$

<u>Poids 2</u> : <u>deg 5</u> : G_{519} <u>deg 6</u> : G_{623} <u>deg 7</u> : G_{727}, G'_{727}

<u>Poids 4</u> : <u>deg 2</u> : φ_6 <u>deg 3</u> : G_{310} <u>deg 4</u> : $\varphi_6 \varphi_8, G_{414}, G'_{414}$
<u>deg 5</u> : $\varphi_6 G_{312}, \varphi_8 G_{310}, G_{518}, G'_{518}$
<u>deg 6</u> : $\varphi_6 \varphi_8^2, \varphi_6 G_{416}, G_{310} G_{312}, G_{414} \varphi_8, G'_{414} \varphi_8, G_{622}, G'_{622}$
<u>deg 7</u> : $\varphi_6 \varphi_8 G_{312}, \varphi_6 G_{520}, \varphi_8^2 G_{310}, G_{310} G_{416}, G_{312} G_{414}, G_{312} G'_{414}, \varphi_8 G_{518},$
$\varphi_8 G'_{518}, G_{726}, G'_{726}$

<u>Poids 6</u> : <u>deg 3</u> : G_{39} <u>deg 4</u> : G_{413} <u>deg 5</u> : $\varphi_8 G_{39}, G_{517}, G'_{517}$
<u>deg 6</u> : $G_{39} G_{312}, \varphi_8 G_{413}, G_{621}, G'_{621}, G''_{621}$
<u>deg 7</u> : $\varphi_8^2 G_{39}, G_{39} G_{416}, G_{413} G_{312}, \varphi_8 G_{517}, \varphi_8 G'_{517}, \varphi_6 G_{519}, G_{725}, G'_{725}, G''_{725}$

<u>Poids 8</u> <u>deg 1</u> : Z <u>deg 2</u> : φ_4 <u>deg 3</u> : $Z\varphi_8, G_{38}$ <u>deg 4</u> : $ZG_{312}, \varphi_4 \varphi_8, \varphi_6^2, G_{412}$
<u>deg 5</u> : $Z\varphi_8^2, ZG_{416}, \varphi_4 G_{312}, \varphi_8 G_{38}, \varphi_6 G_{310}, G_{516}$
<u>deg 6</u> : $Z\varphi_8 G_{312}, ZG_{520}, \varphi_4 \varphi_8^2, \varphi_4 G_{416}, G_{38} G_{312}, \varphi_8 G_{412}, \varphi_6 G_{414},$
$\varphi_6 G'_{414}, G_{310}^2, \varphi_6^2 \varphi_8, G_{620}$
<u>deg 7</u> : $Z\varphi_8^3, Z\varphi_8 G_{416}, ZG_{312}^2, ZG_{624}, \varphi_4 \varphi_8 G_{312}, \varphi_4 G_{520}, \varphi_8^2 G_{38},$
$G_{38} G_{416}, G_{312} G_{412}, \varphi_8 G_{516}, \varphi_6 G_{518}, \varphi_6 G'_{518}, \varphi_6 \varphi_8 G_{310},$
$G_{310} G_{414}, G_{310} G'_{414}$

Mais les relations (dans les quatre derniers cas) n'ont pas été calculées.

REFERENCES

[1] BRION Michel, « Invariants de plusieurs formes binaires » Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), p. 429-445

[2] BRION Michel, « Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple », Annales Inst. Fourier, 33 (1983), p. 1-27

[3] CEREZO André, « Sur les invariants algébriques du groupe engendré par une matrice nilpotente », preprint, Nice 1986.

[4] DIXMIER Jacques, « Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II », Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), p. 325-388

[5] KEMPF George, « The Hochster-Roberts theorem of invariant theory », Michigan Math Journal, 26 (1979), p. 19-32

[6] KRAFT Hanspeter, « Geometrische Methoden in der Invariantentheorie » Vieweg, Braunschweig 1984.

[7] STANLEY Richard P., « Hilbert Functions of Graded Algebras » Advances in Math, 28 (1978), p. 57-83

[8] SYLVESTER J.J & FRANKLIN F. « Tables of the Generating Functions and Groundforms for the binary Quantics of the first ten orders », Amer. J. Math. 7 (1885) p. 223-251.

[9] SYLVESTER J.J. & FRANKLIN F. « Tables of the Generating Functions and Groundforms for simultaneous binary Quantics of the first four orders, taken two and two together », Amer. J. Math. 2 (1879), p. 293-306.