TOPOLOGIE GÉNÉRALE

(André Cerezo)

Ce cours contient des énoncés (et preuves) des théorèmes de Borel-Lebesgue, Tychonoff, Baire, Heine, "du point fixe", Urysohn, Dini, Ascoli, Stone-Weierstrass, Kakutani-Krein, Hölder, Minkovski, Banach-Steinhaus, Neumann, Banach, "du graphe fermé", Hahn-Banach, Riesz, "d'orthogonalisation de Schmidt", Lax-Milgram, ... et quelques autres.

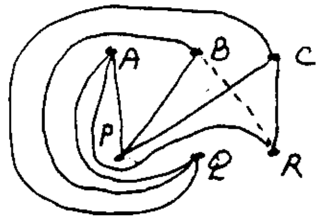
INTRODUCTION

A force de calculer et raisonner avec des nombres (réels par exemple), on s'aperçoit qu'on manipule quelques idées simples et "profondes" en ce sens qu'elles sont susceptibles d'une portée beaucoup plus générale. Par exemple en dégageant les propriétés de base des deux "opérations" (somme et produit), on fabrique de nouveaux ensembles de nombres, puis toute l'"algèbre commutative" qui permet à son tour de résoudre d'autres questions; en étudiant la notion de combinaison linéaire (déjà suggérée par la description des idéaux d'entiers) on construit l'"algèbre linéaire", véritable socle des mathématiques; de la comparaison des nombres se dégage la notion d'ordre, utile dans bien d'autres contextes...

Une autre de ces idées profondes, qui fait l'objet de ce cours, est la notion de "proximité": 3,1415926535 est vraiment très proche de π, ce qu'on n'oserait pas dire de 17,3. Mais aucun classement des nombres réels en "ceux qui sont proches de π" et les autres n'obtiendrait l'unanimité; 3 est déjà proche de π, mais beaucoup moins que 3,1416... et apparaît la notion de "limite", déjà contenue dans la notion même de nombre réel, puisqu'on ne sait définir la plupart d'entre eux que par des suites de "valeurs approchées" (ce n'est pourtant pas le cas de π, être "géométrique")

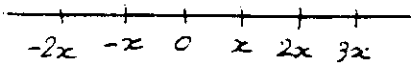
La mise en forme de ces idées (proximité, limite), en un corpus de résultats utiles dans toutes sortes de situations, s'appelle la "topologie". A l'édifier on gagne, non seulement de la clarté dans la manipulation des nombres, mais beaucoup de réponses, parfois inattendues, à des questions qui se posent dans des domaines très divers, portant sur des ensembles géométriques, des familles de fonctions, etc. En voici quelques exemples en désordre

— Il est impossible de joindre chacun des trois points P, Q, R à chacun des trois points A, B, C par des chemins tracés sur cette feuille "sans lever le crayon", sans que ces chemins ne se recoupent.

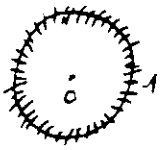


— Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ décroissante et surjective (en particulier $f(0)=1$ et $f(1)=0$) Alors il existe $t \in]0,1[$ tel que $f(t)=t$.

— Les multiples d'un réel x non nul sont tous distincts et "isolés",

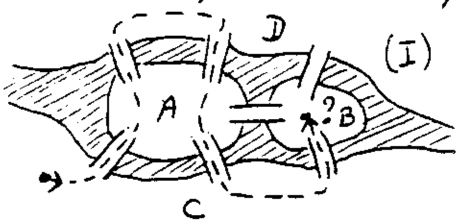


c'est-à-dire que chacun est à distance au moins $|x|>0$ des autres. Mais leurs images sur le cercle-unité du plan complexe par



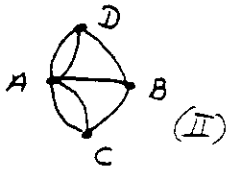
l'application $x \mapsto e^{ix}$, bien que toutes distinctes dès que $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, sont aussi proches qu'on veut les unes des autres : $\forall p \in \mathbb{Z}, \varepsilon>0, \exists q \in \mathbb{Z}$, $p \neq q$ et $|e^{ipx}-e^{iqx}|<\varepsilon$; elles sont même "denses" : n'importe quel point du cercle est approché à n'importe quelle précision.

— Aucun promeneur ne peut emprunter les sept ponts de Königsberg



une seule fois s'il ne sait pas nager, et ceci d'où qu'il parte et où qu'il arrive.

Preuve-sic : il y a 4 "lieux" permis, les deux rives et les deux îles, joints par 7 chemins permis (les ponts). Si une telle promenade était possible, des lieux de "transit" (id est autre que celui de départ et celui d'arrivée) partiraient forcément un nombre pair de chemins (chaque fois qu'on arrive, on repart...) ; or ces nombres sont ici tous impairs. ■



Remarque : réduire le problème (I) au problème (II), c'est-à-dire remarquer que beaucoup de données sont inconséquentes (la taille des îles, la position exacte des ponts, le sens du courant, l'âge du promeneur, ...!), c'est faire de la topologie

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable, dont une dérivée au moins s'annule en chaque point. Alors f est un polynôme.

Remarque : il s'agit en fait d'"échanger deux quantificateurs", pour passer de l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=0$

à la conclusion $\exists n \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=0$.

— Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 .\quad \text{Alors } f \equiv 0 .$$

Remarque : Les intégrales écrites s'appellent les "coefficients de Fourier" de f, et ce résultat est à la base de la théorie des séries de Fourier. Mais le phénomène est beaucoup plus général ; par exemple
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} f(x)\, x^n \, dx = 0 \implies f \equiv 0 .$$

— Une idée d'une importance extrême est le "théorème du point fixe" pour une application "contractante" (à ne pas confondre avec le deuxième exemple ci-dessus) : on suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est "contractante" :

$$\exists k \in]0,1[\ , \ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$$

Alors f admet (au moins) un point fixe : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \ f(\ell) = \ell$.

Preuve : On part de $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire, et on définit une suite de nombres par récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Comme

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k\,|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^n\,|x_1 - x_0|,$$

la suite est de Cauchy : dès que $p, q \geq N$, avec par exemple $p \geq q$,

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - x_{p-1}| + \dots + |x_{q+1} - x_q| \leq k^q(1 + \dots + k^{p-q-1})|x_1 - x_0|$$
$$= \frac{k^q(1-k^{p-q})}{1-k}\,|x_1 - x_0| \leq \left(\frac{|x_1 - x_0|}{1-k}\right) k^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Donc (x_n) est convergente : $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, et comme $|f(x_n) - f(\ell)| \leq k\,|x_n - \ell|$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell)$, d'où "à la limite" $\ell = f(\ell)$. ∎

Remarque : C'est par des généralisations convenables de cette idée presque banale qu'on obtient les résultats les plus fondamentaux de l'analyse, comme le fameux "théorème des fonctions implicites", ou encore le "théorème de Cauchy (-Lipschitz)" qui résout les équations différentielles : si f est une fonction de deux variables réelles "lipschitzienne"

$$\left(\exists M > 0, \ \forall x, y, x', y', \ |f(x', y') - f(x, y)| \leq M\,(|x - x'| + |y - y'|) \right)$$

alors il existe une et seule fonction $y(x)$ solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ et vérifiant de plus la "condition initiale" $y(x_0) = y_0$, où x_0, y_0 sont donnés quelconques.

Preuve-sic : Soit I un intervalle de longueur ε autour de x_0, et notons $\|z\| = \sup_{x \in I} |z(x)|$ pour une fonction $z : I \to \mathbb{R}$. Posons $y_0(x) = y_0$, puis, par récurrence,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \qquad (x \in I). \qquad (*)$$

On a $y'_{n+1} = f(x, y_n(x))$, et pour $x \in I$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))|\,dt \leq M \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|\,dt$$

d'où $\|y_{n+1} - y_n\| \leq M\varepsilon\,\|y_n - y_{n-1}\| \leq \dots \leq (M\varepsilon)^n\,\|y_1 - y_0\|$

La suite de fonctions (y_n) est donc uniformément convergente sur I, donc vers une fonction continue $y(x)$, et par "passage à la limite" dans $(*)$ il vient $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, d'où $y' = f(x, y)$ et $y(x_0) = y_0$.

Enfin si y et z sont deux solutions, et $x \in I$,

$|y(x) - z(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) - f(t, z(t))\,dt\right|$, d'où $\|y - z\| \leq (M\varepsilon)\,\|y - z\|$, ce qui implique $\|y - z\| = 0$ dès que $\varepsilon < \frac{1}{M}$, c'est-à-dire $y \equiv z$ sur I. ∎

La notion de proximité exploitée au dernier exemple est fondée sur certaines notions de "distance" : distance de deux nombres réels x, y définie par $|x-y|$, mais aussi distance de deux fonctions $y, z : I \to \mathbb{R}$, définie par $\|y - z\| = \sup_{x \in I} |y(x) - z(x)|$.

Pourtant on peut souvent modifier la notion de distance utilisée sans affecter l'idée de proximité qui s'en déduit. Ainsi dans la définition ci-dessus d'une fonction lipschitzienne, on a fait usage de la "distance" entre deux points (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$ définie par $|x-x'| + |y-y'|$; mais on aurait pû employer plutôt leur distance "euclidienne" $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, sans rien modifier, ni à l'énoncé ni à sa preuve, ou encore par exemple $\sup(|x-x'|, |y-y'|)$.

Bien que, le plus souvent dans les applications de la topologie qu'on a en tête, on dispose d'une notion de distance, qui simplifie les énoncés et leurs preuves, il importe donc de dégager d'abord une notion de proximité plus subtile, pouvant s'appliquer à d'autres cas. C'est l'objet des définitions générales, abstraites, du début de ce cours. Sans s'y attarder ici, on étudie ensuite plus à fond le cas des espaces "métriques" (ensembles munis d'une "distance").

Puis, mêlant topologie et algèbre linéaire, on étudie les "espaces vectoriels normés", dont les plus intéressants sont les espaces de fonctions ou de suites. C'est dans ce cadre qu'on obtient la plupart des résultats vraiment profonds. Enfin c'est en imitant au plus près la métrique euclidienne de la géométrie classique, c'est-à-dire dans le cadre des "espaces de Hilbert", qu'on peut "faire de la géométrie en dimension infinie" de la façon la plus riche et la plus utile aussi bien en mathématiques qu'en physique.

CHAPITRE I
NOTIONS DE TOPOLOGIE

Ce chapitre contient surtout des définitions assorties de remarques faciles, dont l'intérêt s'éclaire de l'usage qu'on en fait ensuite.

(A) VOISINAGES, OUVERTS, FERMÉS, ...

1 – Un ensemble E est dit muni d'une <u>topologie</u> (et on dit alors que E est un <u>espace topologique</u>) lorsqu'on s'est donné une famille $\mathcal{U}$ de parties de E, appelées les <u>ouverts</u>, vérifiant:

$$(*)\begin{cases} (a) & \emptyset \in \mathcal{U} \text{ et } E \in \mathcal{U}. \\ (b) & \text{Toute réunion d'éléments de } \mathcal{U} \text{ est dans } \mathcal{U} \\ (c) & \text{Toute intersection finie aussi.} \end{cases}$$

<u>Exemple de base</u>: $E = \mathbb{R}^n$, et les ouverts sont les parties qui ont la propriété suivante:

(*) <u>Avec chaque point, un ouvert contient aussi tous les points assez voisins pour la distance euclidienne</u>, c'est-à-dire:

$U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si:

$$\forall a \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U$$

(où $d(a,x) = \left((a_1 - x_1)^2 + \cdots + (a_n - x_n)^2\right)^{1/2}$, si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$.)

(a),(b),(c) sont clairs, et dans la suite on considèrera toujours $\mathbb{R}^n$ comme muni de cette topologie naturelle; de même $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ en séparant les parties réelles et imaginaires, ou encore en recopiant la même définition mais avec la distance "hermitienne" $d(a,x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j - x_j|^2\right)^{1/2}$, ce qui revient au même.

Ainsi dans $\mathbb{R}^n$, la "<u>boule ouverte de centre a et de rayon r</u>" $r > 0$, c'est-à-dire $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$ est un ouvert, et d'ailleurs les ouverts sont les réunions (quelconques) de telles boules (d'après (*)). L'image d'un ouvert par une isométrie, ou par une homothétie, est un ouvert; et dès que U ou V est ouvert, leur "somme" $U + V = \{x + y \mid x \in U \text{ et } y \in V\}$ est un ouvert.

En particulier pour $n = 1$, $\mathbb{R}$ est un espace topologique dont les ouverts sont les réunions d'intervalles ouverts, ou encore les parties qui contiennent un intervalle autour de chacun de leurs points: par exemple $]a,b[$, $]-\infty,a[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}]n, n+\frac{1}{2n}[$ sont des ouverts; $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $\mathbb{Z}$ ne le sont pas.

Autres exemples • E est un ensemble quelconque et $\mathcal{U} = \{\emptyset, E\}$; cette topologie est dite "grossière".

• E est un ensemble et $\mathcal{U} = \mathcal{P}(E)$: tout le monde est ouvert ; cette topologie est dite "discrète".

• E est un espace vectoriel, et $U \subset E$ est "ouvert" si c'est le complémentaire de la réunion d'une famille finie (éventuellement vide) de sous-espaces vectoriels.

• E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; à chaque famille finie $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de E et chaque famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs, on associe un "ouvert" $U = U_{(f_i), (\varepsilon_i)}$ par :

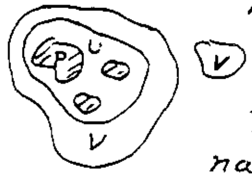
$$f \in U \Leftrightarrow \forall i \in I \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon_i ,$$

et les autres "ouverts" sont les réunions (quelconques) de ceux-ci. (!)

• $E = \mathbb{R}$ et les ouverts sont les parties de la forme $]-\infty, -A] \cup [A, +\infty[$ pour $A \geq 0$, plus $\emptyset$.

• E est un ensemble, et les ouverts sont les complémentaires des parties finies de E, plus $\emptyset$.

2 - Si P est une partie d'un espace topologique E, un voisinage V de P est une partie V de E contenant un ouvert U qui contient P.



Toute partie contenant un voisinage de P est un voisinage de P ; une intersection finie de voisinages de P est un voisinage de P ; un voisinage de P est un voisinage de toute partie de P.

On peut alors redéfinir les ouverts de E comme les parties de E qui sont voisinages de chacun de leurs points (cf. (*) de 1)

Exemple : Pour $P \subset \mathbb{R}^n$, $P \neq \emptyset$, et $\varepsilon > 0$, posons $P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{y \in P} d(x,y) < \varepsilon\}$

On a $P_\varepsilon = P + B(0, \varepsilon)$, donc P_ε est ouvert, et $P_\varepsilon \supset P$.

Donc P_ε est un voisinage de P, et donc aussi toute partie de $\mathbb{R}^n$ qui contient P_ε pour un certain $\varepsilon > 0$ assez petit.

Mais la réciproque est fausse : $\bigcup_{n=1}^{\infty}]n - \frac{1}{2n}, n + \frac{1}{2n}[= V$ est un voisinage de $P = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ qui ne contient aucun P_ε.

3 - Une partie F d'un espace topologique E est appelée un fermé si son complémentaire est ouvert. Il résulte aussitôt de 1 que

$$(*) \begin{cases} (a) & \emptyset \text{ et } E \text{ sont fermés} \\ (b) & \text{Toute intersection de fermés est fermée} \\ (c) & \text{Toute réunion finie aussi.} \end{cases}$$

Exemples dans $\mathbb{R}^n$: L'image d'un fermé par une isométrie, ou par une homothétie de $\mathbb{R}^n$, est fermée. Les points $\{a\}$, les parties finies $\{a_1, \dots, a_p\}$ sont fermés. Une somme de fermés n'est pas toujours fermée :

si $F_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ et $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0\}$, F_1 et F_2 sont des fermés de $\mathbb{R}^2$, mais $F_1 + F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ est ouvert (et pas fermé !).

Un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, bornés ou non, en nombre fini ou dénombrable. L'énoncé semblable pour un fermé est faux.

La "boule fermée" de centre a et de rayon $r > 0$, $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq r\}$ est un fermé, de même que la "sphère" $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) = r\}$.

4 - Soit E un espace topologique, et $P \subset E$. On dit que $a \in E$ est adhérent à P si tout voisinage de $\{a\}$ rencontre P. Un point adhérent à $P' \subset P$ est adhérent à P. On dit que a est un point d'accumulation de P si tout voisinage de $\{a\}$ rencontre $P - \{a\}$. Un point d'accumulation de $P' \subset P$ est un point d'accumulation de P.

L'ensemble $\overline{P}$ des points adhérents à P s'appelle l'adhérence de P : c'est la réunion de P et de ses points d'accumulation. On a $P \subset \overline{P}$, et $\overline{P}$ est le plus petit fermé contenant P (c'est l'intersection de tous les fermés contenant P). On l'appelle aussi la fermeture de P.

Il est équivalent de dire que P est fermé, ou que $P = \overline{P}$, ou encore que P contient tous ses points d'accumulation.

On appelle intérieur de P, et on note $\mathring{P}$ le plus grand ouvert contenu dans P (c'est la réunion de tous, éventuellement $\emptyset$). On a clairement :

$$\mathring{P} = \complement(\overline{\complement P}) \ , \ \overline{P} = \complement(\mathring{\overbrace{\complement P}}) \ , \ \mathring{P} \subset P \subset \overline{P}, \text{ et } P = \mathring{P} \Leftrightarrow P \text{ ouvert.}$$

On appelle frontière de P, et on note ∂P l'ensemble fermé :

$$\partial P = \overline{P} - \mathring{P} = \{a \in \overline{P} \mid a \notin \mathring{P}\} = \overline{P} \cap (\overline{\complement P})$$

C'est donc l'ensemble des points adhérents à la fois à P et à $\complement P$, et $\partial \complement P = \partial P$.

Exercices : – dans $\mathbb{R}^n$, les points a adhérents à une partie P sont les "limites" de suites de points de P : $\exists (a_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $a_p \in P$ et $d(a_p, a) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$. De même les points d'accumulation a de P sont les limites de suites de points de $P - \{a\}$.

– déterminer $\overline{P}, \mathring{P}, \partial P$ quand $P = \emptyset$, $\mathbb{R}^n$, $B(a,r)$, $\mathbb{Q}^n$, $\prod_{j=1}^{n} I_j$ où les I_j sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

– comparer $\overbrace{P \cap Q}^{\circ}$ et $\mathring{P} \cap \mathring{Q}$, $\overline{P \cap Q}$ et $\overline{P} \cap \overline{Q}$, $\overbrace{P \cup Q}^{\circ}$ et $\mathring{P} \cup \mathring{Q}$, $\overline{P \cup Q}$ et $\overline{P} \cup \overline{Q}$.

– décrire une partie P non vide de $\mathbb{R}$ telle que $P = \partial P$ et dont tous les points sont des points d'accumulation.

5 - Un espace topologique E est dit séparé si deux points distincts ont des voisinages disjoints. Dans un espace séparé les points sont fermés, les parties finies aussi.

Exemples : $\mathbb{R}^n$ est bien sûr séparé, de même que la plupart des espaces topologiques qu'on rencontrera. Mais pas tous les exemples du 1.

(B) COMPACITÉ

1 - Soit E un espace topologique <u>séparé</u>, et K une partie de E.
On dit que K est un <u>compact</u> de E s'il a la propriété suivante :

(*) "<u>De tout recouvrement de K par des ouverts de E on peut extraire un recouvrement fini</u>" : c'est-à-dire dans toute famille d'ouverts de E $(U_i)_{i\in I}$ telle que $K\subset \bigcup_{i\in I} U_i$, on peut choisir une sous-famille finie $(U_i)_{i\in J}$, $J\subset I$, J <u>fini</u> ayant la même propriété : $K\subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Ou encore, de façon équivalente :
"<u>De toute famille de fermés de E dont l'intersection ne rencontre pas K, on peut extraire une sous-famille finie ayant la même propriété</u>" :

$$\forall (F_i)_{i\in I},\ \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big)\cap K=\emptyset \Rightarrow \exists J\subset I, J \text{ fini}, \Big(\bigcap_{i\in J} F_i\Big)\cap K=\emptyset.$$

$\emptyset$, les points $\{a\}$, les parties finies $\{a_1,\dots,a_p\}$ sont des compacts évidents.

<u>Proposition</u> : <u>Un compact est fermé. Tout fermé contenu dans un compact est compact.</u>

Preuve : Soit K un compact de E et $a\in \complement K$. Pour tout $x\in K$ on peut trouver des voisinages ouverts disjoints U_x de x et V_x de a. Du recouvrement $(U_x)_{x\in K}$ de K par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini $(U_{x_i})_{i=1,\dots,p}$. Si $V=\bigcap_{i=1}^{p} V_{x_i}$, c'est un voisinage ouvert de a qui ne rencontre aucun des U_{x_i} $(i=1,\dots,p)$, donc pas K. Autrement dit $\complement K$ est ouvert.

Si $F\subset K$ et F fermé, et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés dont l'intersection ne rencontre pas F, les $F'_i=F_i\cap F$ sont des fermés d'intersection vide, dont on peut donc extraire une famille finie dont l'intersection G ne rencontre pas K, donc pas F... ∎

Les numéros 2, 3, 4 décrivent les compacts de $\mathbb{R}^n$.

2 - <u>Théorème de Borel-Lebesgue</u> : <u>Les intervalles fermés bornés sont des compacts de $\mathbb{R}$.</u>

Preuve : Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$ et $K=[a,b]$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ recouvrant K, et notons K' l'ensemble des $x\in[a,b]$ tels que $[a,x]$ soit recouvert par un nombre fini des U_i. K' est une partie non vide $(a\in K')$ de $\mathbb{R}$ majorée par b. Posons $m=\sup K'\le b$. Il existe $i_0\in I$ tel que $m\in U_{i_0}$, donc aussi $\varepsilon>0$ tel que $[m-\varepsilon, m+\varepsilon]\subset U_{i_0}$, puis $x\in K'$ tel que $m-\varepsilon<x\le m$. Il s'ensuit que $[a,m+\varepsilon]$ est recouvert par un nombre fini de U_i (ceux qui recouvrent $[a,x]$, et U_{i_0}). Si l'on avait $m<b$, on pourrait choisir ε tel que $m<m+\varepsilon\le b$, et on conclurait $m+\varepsilon\in K'$, ce qui est absurde. Donc $m=b$, et $[a,b]$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i. ∎

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est <u>bornée</u> si elle est contenue dans une boule ; il revient au même de dire qu'elle est contenue dans un <u>pavé</u> c'est-à-dire un produit d'intervalles bornés $\prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$. (Un tel pavé est ouvert (ou fermé) si tous les intervalles le sont.)

Remarque : Tout compact de $\mathbb{R}^n$ est borné, car une partie non bornée n'est recouverte par aucune sous-famille finie de la famille $(B(a,p))_{p\in\mathbb{N}}$ qui recouvre tout l'espace ($a\in\mathbb{R}^n$ quelconque).

Corollaire : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont ses fermés bornés

Preuve : Tout compact est fermé par la proposition 1 et borné par la remarque précédente. Réciproquement si K est fermé et borné, il existe $A>0$ tel que $K\subset[-A,A]$, et cet intervalle est compact par le théorème de Borel-Lebesgue, donc K aussi par la proposition 1. ■

3 – Proposition : Si $K\subset\mathbb{R}^n$ et $L\subset\mathbb{R}^m$ sont compacts, $K\times L$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+m}$

Preuve : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $K\times L$. Chaque $z=(x,y)\in K\times L$ est dans l'un des ouverts, U_{i_z}. Comme le produit des boules $B(x,\frac{\varepsilon}{\sqrt2})$ de $\mathbb{R}^n$ et $B(y,\frac{\varepsilon}{\sqrt2})$ de $\mathbb{R}^m$ est contenu dans la boule $B(z,\varepsilon)$ de $\mathbb{R}^{n+m}$, on peut trouver des voisinages ouverts V_z de x dans $\mathbb{R}^n$ et W_z de y dans $\mathbb{R}^m$ tels que $V_z\times W_z\subset U_{i_z}$.
Pour $x_0\in K$ fixé, les $W_{(x_0,y)}$ pour $y\in L$ recouvrent L, et on peut en choisir un nombre fini $W_{(x_0,y_1)},\dots,W_{(x_0,y_p)}$ recouvrant L. Alors $V_{x_0}=V_{(x_0,y_1)}\cap\dots\cap V_{(x_0,y_p)}$ est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$. Si $(x,y)\in V_{x_0}\times L$, il existe $j\in\{1,\dots,p\}$ tel que $y\in W_{(x_0,y_j)}$, d'où $(x,y)\in V_{(x_0,y_j)}\times W_{(x_0,y_j)}\subset U_{i_{(x_0,y_j)}}$.
Donc chaque $V_{x_0}\times L$ est recouvert par un nombre fini des U_i. Les $(V_{x_0})_{x_0\in K}$ recouvrent K, et on peut en extraire un recouvrement fini $\{V_{x_1},\dots,V_{x_q}\}$. Alors $K\times L\subset\bigcup_{k=1}^{q}V_{x_k}\times L$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i. ■

En itérant, on obtient : un produit fini de compacts est compact.

Corollaire : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont ses fermés bornés

Preuve : Par le théorème de Borel-Lebesgue et la proposition précédente, les pavés fermés $\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ sont compacts. L'énoncé se déduit alors de la proposition 1 et de la remarque du 2, comme dans le cas précédent $(n=1)$. ■

Remarque : En particulier les pavés fermés sont compacts, mais aussi les boules fermées, et les sphères. Tout point de $\mathbb{R}^n$ admet donc des voisinages compacts contenus dans tout voisinage donné

4 – Proposition : Pour une partie K de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) K est compact

(b) De toute suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de K.

Preuve : (b) ⇒ (a) Si K n'était pas borné, on construirait facilement une suite de points de K sans point d'accumulation. Si K n'était pas fermé et $b\in\bar K-K$, on construirait facilement une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K tendant vers b, et donc b soit le seul point d'accumulation. Une suite extraite ne peut alors tendre que vers b, et donc $b\in K$. Donc K est fermé et borné et on conclut par le corollaire 3.

(a) ⇒ (b) Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K compact. Les ensembles

$F_{p_0} = \overline{\{a_p \mid p \geq p_0\}}$ sont des fermés contenus dans $\bar{K} = K$, et les intersections d'un nombre fini d'entre eux sont non vides. Donc il existe un point a dans l'intersection de tous : $a \in \bigcap_{p_0 \in \mathbb{N}} F_{p_0} \subset F_0 \subset \bar{K} = K$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $p(n) \in \mathbb{N}$ tel que $p(n) > p(n-1) > \cdots > p(1)$ et $d(a, a_{p(n)}) < \frac{1}{n}$.
D'où $a_{p(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$. ■

5 - On dit qu'un espace topologique E séparé est <u>compact</u> si c'est un compact de E. La partie (a) ⇒ (b) de la démonstration précédente se généralise alors aussitôt en <u>toute suite de points d'un espace compact E admet au moins un point adhérent</u>.

On dit qu'un espace topologique E séparé est <u>normal</u> si deux fermés disjoints admettent des voisinages ouverts disjoints.

<u>Proposition</u> : <u>Un espace compact est normal</u>

Preuve : Soient F et G deux fermés disjoints de E compact. F et G sont compacts par la proposition 1. Pour $a \in F$ et $b \in G$, on peut trouver des voisinages ouverts disjoints $U_{a,b}$ de a et $V_{a,b}$ de b. Les $(V_{a,b})_{b \in G}$ recouvrent G, et on peut en extraire $V_{a,b_1}, \ldots, V_{a,b_{p_a}}$ recouvrant G. Posons $U_a = \bigcap_{i=1}^{p_a} U_{a,b_i}$, $V_a = \bigcup_{i=1}^{p_a} V_{a,b_i}$.
Ce sont des ouverts disjoints, et $a \in U_a$, $G \subset V_a$. Les $(U_a)_{a \in F}$ recouvrent F et on peut en extraire un recouvrement fini par $U_{a_1}, \ldots, U_{a_q}$, puis poser $U = \bigcup_{j=1}^{q} U_{a_j}$ et $V = \bigcap_{j=1}^{q} V_{a_j}$. On a $F \subset U$, $G \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. ■

Ⓒ TOPOLOGIE INDUITE

1 - Soit E un espace topologique et P une partie de E. On munit alors P d'une topologie naturelle dont les ouverts sont les $U \cap P$, où U est un ouvert de E. Les fermés de P sont donc les $F \cap P$, où F est un fermé de E, et un voisinage d'une partie Q de P dans P est de la forme $V \cap P$, où V est un voisinage de Q dans E.

Si P est ouvert (resp. fermé) dans E, les ouverts (resp. fermés) de P ne sont autres que les ouverts (resp. fermés) de E contenus dans P.
Cette topologie s'appelle la topologie <u>induite</u> sur P par E. Si $Q \subset P \subset E$, les topologies sur Q induites par E et par P (muni de la topologie induite par E) coïncident.

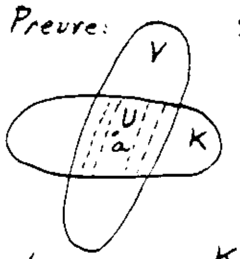
Muni de la topologie induite, P est appelé un "sous-espace topologique" de E. Il est clair que

- <u>tout sous-espace d'un espace séparé est séparé</u>
- <u>tout sous-espace d'un espace normal est normal</u>.
- <u>les compacts d'un sous-espace sont les compacts de l'espace contenus dans le sous-espace</u> (parler de compacts suppose l'espace séparé)

En particulier, pour $K \subset E$ séparé, il revient au même de dire que K est un compact de E, ou que K (muni de la topologie induite) est un espace compact.

2- Proposition: Soit E un espace topologique séparé, $a \in E$, et K un voisinage compact de a. Alors pour tout voisinage V de a, il existe un voisinage de a K' compact contenu dans V (et même compact dans V)

Preuve:



Si $F = K - V = K \cap \complement V$, F et $\{a\}$ sont des fermés disjoints de K, et par la proposition B.5 il existe des voisinages ouverts U de $\{a\}$ et W de F dans K, disjoints. En particulier $U \subset V$, mais même $\overline{U} \subset V$, car $\overline{U} \subset K$ et $\overline{U} \subset \complement W$, donc $\overline{U}$ ne peut rencontrer $K - V = F$. Il suffit de poser $K' = \overline{U}$; K' est un fermé de K, donc compact, et $K' \supset U \ni a$. Remarquons qu'on peut supposer V ouvert.

On dit qu'un espace topologique séparé E est localement compact si tout point de E possède un voisinage compact. La proposition précédente implique alors qu'il en a assez pour en trouver un contenu dans (et donc compact dans) tout voisinage donné à l'avance. De plus il est clair qu'un espace compact est localement compact. Enfin:

Proposition: Les ouverts et les fermés d'un espace localement compact sont localement compacts

Preuve: Pour les ouverts, cela résulte de la proposition précédente (prendre V ouvert). Si $F \subset E$ est fermé, $a \in F$ et K est un voisinage compact de a dans E, $K \cap F$ est un voisinage compact de a dans F. ■

Exemples: • $\mathbb{R}^n$ est localement compact: de tout point $a \in \mathbb{R}^n$, la boule fermée $\overline{B}(a,1)$ est un voisinage compact.
• Donc tout ouvert de $\mathbb{R}^n$, tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est localement compact.
• Par contre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par exemple n'est pas localement compact (pour la topologie induite):
Preuve: si $a \in \mathbb{Q}$ avait un voisinage compact K dans $\mathbb{Q}$, K contiendrait $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Mais K est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{Q}$ (cf. 1), donc K est fermé dans $\mathbb{R}$ et contient donc $\overline{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, ce qui est absurde puisque $K \subset \mathbb{Q}$. ■

3- En particulier si E est compact et $a \in E$, $E - \{a\}$ est ouvert dans E, puisque E est séparé, et $E - \{a\}$ est donc localement compact. De plus les ouverts de E sont de deux sortes:
- ceux qui ne contiennent pas a sont les ouverts de $E - \{a\}$
- les autres sont de la forme $\{a\} \cup ((E - \{a\}) - K)$ où K est un compact de $E - \{a\}$ (en effet si $U \subset E$ est ouvert et $U \ni a$, $F = \complement_E U$ est un fermé de E compact, donc un compact de E contenu dans $E - \{a\}$, donc un compact de $E - \{a\}$!)

Proposition: Soit E un espace localement compact. Notons $\hat{E}$ l'ensemble obtenu en rajoutant aux points de E un autre point, noté ω, et munissons $\hat{E}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de E et les parties de la forme $U_K = \{\omega\} \cup \complement_E K$, où K est un compact de E.
Alors $\hat{E}$ est compact, $\hat{E} - \{\omega\} = E$ (en tant qu'espace topologique), et les voisinages de ω dans $\hat{E}$ sont les parties contenant l'un des U_K ci-dessus

Preuve: D'abord $\hat{E}$ est séparé: si $x, y \in E$ on peut trouver des voisinages ouverts U de x et V de y disjoints qui sont des ouverts de E, puisque E est séparé; si $x \in E$ et $y = \omega$, x admet un voisinage compact K dans E, donc il existe U ouvert dans E tel que $x \in U \subset K$; U et U_K sont des voisinages ouverts disjoints de x et ω dans $\hat{E}$.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de $\hat{E}$ par des ouverts, l'un d'entre eux, soit U_{i_0} contient ω, donc est de la forme U_K où K est un compact de E, recouvert par les U_i, donc par un nombre fini d'entre eux $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$.
Mais alors $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$ recouvrent $\hat{E}$.
Donc $\hat{E}$ est compact. Le reste est clair ■

$\hat{E}$ s'appelle le <u>compactifié d'Alexandroff</u> de l'espace localement compact E, et ω le <u>point à l'infini</u> de E.

<u>Remarques</u>: • Si E était déjà compact, $\{\omega\} = U_E$ est ouvert et fermé, et on n'a fait que rajouter à E un point "à côté", isolé. Cette "compactification" n'est intéressante que quand E n'est pas compact. Par exemple $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une notion utile en géométrie projective.
• La façon "canonique" de "compactifier" un espace localement compact non compact qu'on vient de décrire n'est pas la seule utile; par exemple on fait aussi usage d'un autre "compactifié" de $\mathbb{R}$, obtenu en lui rajoutant <u>deux</u> "points à l'infini", notés $+\infty$ et $-\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est un ensemble naturellement totalement ordonné (alors que $\hat{\mathbb{R}}$ ne l'est pas), et un espace topologique <u>compact</u> si l'on définit les voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme les parties de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant toute une demi-droite "complétée" $\{+\infty\} \cup]a, +\infty[$ (resp. $\{-\infty\} \cup]-\infty, a[$) pour un certain $a \in \mathbb{R}$. (imiter la preuve ci-dessus).

(D) CONNEXITÉ

1 - Soit E un espace topologique, et $P \subset E$. Les trois propriétés suivantes sont clairement équivalentes:
(a) il existe une partie de P, distincte de $\emptyset$ et de P ouverte et fermée dans P.
(b) P est la réunion disjointe de deux de ses ouverts non vides.
(c) P est la réunion disjointe de deux de ses fermés non vides.
Dans ce cas, on dit que P est <u>non connexe</u>. On dit que P est <u>connexe</u> dans le cas contraire. E lui-même est connexe si c'est une partie connexe de E.
$\emptyset$ est connexe. Tout point est connexe.
<u>Exemple</u>: <u>Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles</u> (bornés ou non)
Preuve: Soit $P \subset \mathbb{R}$ connexe non vide, $a = \inf P$ et $b = \sup P$ (finis ou non).
Soit $x_0 \in]a, b[$. Si $x_0 \notin P$, P est la réunion disjointe de ses deux ouverts non vides $]-\infty, x_0[\cap P$ et $]x_0, +\infty[\cap P$. Donc $x_0 \in P$, et $P \supset]a, b[$. Donc P est l'un des quatre intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, ou $[a, b]$.

Réciproquement, si $Q \subset (a, b)$ non vide est à la fois ouvert et fermé dans $P = (a, b)$ soit $c \in Q$. Dès que $c < b$, Q ouvert contient $[c, c+\varepsilon[$. Si $d = \sup_{[c,x[\subset Q} x$, on a forcément $d = b$ (car Q fermé contient d ...).
En raisonnant de même avec $e = \inf_{]y,c] \subset Q} y$, on voit que $Q \supset]e, d[=]a, b[$, d'où finalement $Q = P$. ■

En particulier <u>$\mathbb{R}$ est connexe</u>.

2 - <u>Proposition: Soit $P \subset E$, P connexe, et $Q \subset E$ tel que $P \subset Q \subset \bar{P}$. Alors Q est connexe. En particulier $\bar{P}$ est connexe.</u>

Preuve: Si Q est la réunion disjointe de $Q \cap U_1$ et $Q \cap U_2$, où U_1 et U_2 sont des ouverts de E, P est la réunion disjointe de $P \cap U_1$ et $P \cap U_2$, donc par exemple $P \cap U_2 = \emptyset$, d'où $P \subset \complement U_2$, puis $\bar{P} \subset \complement U_2$, et $Q \subset \complement U_2$, soit $Q \cap U_2 = \emptyset$. ■

Par contre <u>P connexe $\not\Rightarrow \overset{\circ}{P}$ connexe</u> (considérer la réunion de deux disques fermés tangents extérieurement dans $\mathbb{R}^2$, et lui appliquer le résultat suivant).

3 - <u>Proposition: Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E, telle que pour tous $i, j \in I$, $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Alors $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ est connexe.</u>

Preuve: Soient U_1 et U_2 deux ouverts de E tels que P soit la réunion disjointe de $U_1' = P \cap U_1$ et $U_2' = P \cap U_2$. Pour chaque $i \in I$, P_i est la réunion disjointe de $U_1' \cap P_i$ et $U_2' \cap P_i$, donc l'un des deux est vide. Posons $I_k = \{i \in I \mid P_i \subset U_k'\}$ $(k = 1, 2)$. Alors $U_1' = \bigcup_{i \in I_1} P_i$ et $U_2' = \bigcup_{i \in I_2} P_i$. Comme tous les P_i se rencontrent, U_1' ou U_2' est vide. ■

<u>En particulier une chaîne de $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ connexes, telle que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, a une réunion $P = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} P_i$ connexe.</u> (considérer les $\bigcup_{-n \leq i \leq n} P_i$)

Le résultat suivant est ici particularisé au cas de $\mathbb{R}^n$.

4 - <u>Proposition: Soit P une partie connexe de $\mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, et pour tout $x \in P$, Q_x une partie connexe de $\mathbb{R}^m$ contenant b. Alors $R = \{(x, y) \mid x \in P, y \in Q_x\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ est connexe.</u>

Preuve: Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^{n+m}$ tels que R soit la réunion disjointe de $R \cap U_1$ et $R \cap U_2$. Pour tout $x \in P$, $\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in U_j\}$ est un ouvert V_j de $\mathbb{R}^m$ $(j = 1, 2)$, et Q_x est la réunion disjointe de $Q_x \cap V_1$ et $Q_x \cap V_2$, donc l'un des deux est vide. Notons $P_j = \{x \in P \mid Q_x \subset V_j\}$ $(j = 1, 2)$.
En particulier pour $x \in P_j$, $(x, b) \in U_j$, et comme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, b) \in U_j\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, P_1 et P_2 sont deux ouverts de P, et P en est la réunion disjointe. Donc P_2 par exemple est vide. Alors pour tout $x \in P$, $Q_x \subset V_1$, et finalement $P \subset U_1$. ■

<u>Corollaire: Un produit fini de connexes de $\mathbb{R}^n$ est connexe.</u>

Preuve: dès que les facteurs sont non vides, la proposition suivante s' avec des Q_x constants. ■

Par exemple (et d'après 1), $\mathbb{R}^n$ est connexe, ainsi que tout produit d'intervalles, et en particulier les <u>pavés</u>, ouverts ou fermés ou non. Mais la proposition précédente s'applique aussi pour démontrer, par récurrence sur n, que les <u>boules</u> ouvertes ou fermées sont connexes. On en déduit que tout voisinage d'un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ en contient un autre connexe (et même compact si l'on veut): une boule assez petite. On dit que U est <u>"localement connexe"</u>

5 - Revenons au cas général. Soit $P \subset E$ et $x \in P$. La réunion de toutes les parties connexes de P qui contiennent x (il y a au moins $\{x\}$) est encore connexe par la proposition 3. C'est donc <u>la plus grande</u> partie connexe de P contenant x. On l'appelle la <u>composante connexe</u> de x dans P. On appelle <u>composantes connexes</u> de P les composantes connexes des points de P (dans P).

Proposition. Les composantes connexes de P forment une partition de P en parties fermées (dans P).

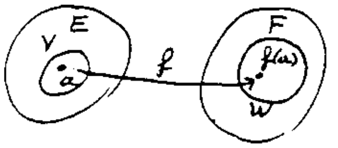
Preuve: Notons C_x la composante connexe de $x \in P$. Dès que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \cup C_y$ est connexe par la proposition 3 et contient x et y, d'où $C_x = C_x \cup C_y = C_y$. Enfin $\overline{C_x}$ est connexe par la proposition 2, d'où $\overline{C_x} = C_x$. ■

Par contre les composantes connexes ne sont pas ouvertes dans P en général: considérer celle de 0 dans $P = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

Remarquons enfin qu'avoir une seule composante connexe signifie être connexe (et non vide!).

(E) CONTINUITÉ

1 - Soient E, F deux espaces topologiques, $a \in E$, et $f : E \to F$ une application. On dit que f est continue au point a, si pour tout voisinage W de $f(a)$ il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. On dit que f est continue (sur E) si elle est continue en tout point de E.



Lemme: Si $f : E \to F$ est continue, et $P \subset E$, $f(\overline{P}) \subset \overline{f(P)}$

Preuve: Soit $a \in \overline{P}$ et W un voisinage de $f(a)$. Il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Il existe $b \in P \cap V$, donc $f(b) \in f(P) \cap W$ ■

Proposition: Pour $f : E \to F$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) f est continue sur E

(b) Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E.

(c) Pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est fermé dans E.

(d) Pour toute partie P de E, $f(\overline{P}) \subset \overline{f(P)}$.

Preuve: (a) ⇒ (d) par le lemme.

(d) ⇒ (c): si $H = f^{-1}(G)$, on a $f(H) \subset G$, donc $f(\overline{H}) \subset \overline{f(H)} \subset G$, d'où $\overline{H} = H$.

(c) ⇒ (b) par passage au complémentaire

(b) ⇒ (a): Si $a \in E$ et W est un voisinage de $f(a)$, il existe un ouvert U de F tel que $f(a) \in U \subset W$; $V = f^{-1}(U)$ est un ouvert contenant a, et $f(V) = U \subset W$. ■

(Par contre l'image (directe) d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue n'est ni ouverte ni fermée en général; exemple: l'image de $]-1, 1[$ par $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $[0, 1[$.)

2 - Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications entre des espaces topologiques E, F, G. Alors

(a) Si f est continue en $a \in E$ et g en $f(a)$, $g \circ f$ est continue en a.

(b) Si f et g sont continues, $g \circ f$ aussi.

Preuve: Il suffit de "composer" les définitions. ■

Remarquons ici aussi que la restriction d'une application continue à un sous-espace est encore continue.

3 - Proposition: Une image continue de compact est compacte: si E, F sont séparés, $f : E \to F$ continue, et $K \subset E$ compact, $f(K)$ est compact.

Preuve : Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(K)$, $V_i = f^{-1}(U_i)$ est ouvert, et $(V_i)_{i\in I}$ recouvre K, d'où un recouvrement fini de K par $V_{i_1},\dots,V_{i_p}$, et $U_{i_1},\dots,U_{i_p}$ recouvrent $f(K)$, qui est séparé puisque F l'est. ∎

Corollaire : Soit E un espace topologique séparé, $f : E \to \mathbb{R}$ continue, et K un compact de E. Alors $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes en des points de K.

Preuve : $f(K)$ est compact, donc fermé et borné dans $\mathbb{R}$ (corollaire B2).
Si $M = \sup_{x\in K} f(x)$, $M \in \overline{f(K)} = f(K)$: $\exists a \in K$, $f(a) = M$. De même pour $m = \inf_{x\in K} f(x)$. ∎

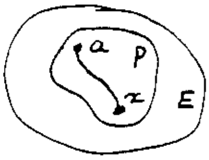
4 - Proposition : Une image continue de connexe est connexe

Preuve : Soit $f : E \to F$ continue, $P \subset E$ connexe, et U_1 et U_2 deux ouverts de F tels que $f(P)$ soit la réunion disjointe de $f(P)\cap U_1$ et $f(P)\cap U_2$; $V_1 = f^{-1}(U_1)$ et $V_2 = f^{-1}(U_2)$ sont ouverts, $V_1 \cap P$ et $V_2 \cap P$ sont disjoints, et P en est la réunion. Donc $V_2 \cap P = \emptyset$ par exemple, c'est-à-dire $P \subset V_1$, et $f(P) \subset U_1$, donc $f(P)\cap U_2 = \emptyset$. ∎

Corollaire : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, $P \subset E$ connexe, et $a, b \in P$. Alors tout nombre de l'intervalle $[f(a), f(b)]$ est atteint par f dans P.

Preuve : $f(P)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle I (exemple D.1) et $I \ni f(a), f(b)$, donc $I \supset [f(a), f(b)]$ ∎

5- Une application $f : [a,b] \to E$ continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique E s'appelle un chemin continu paramétré (ou arc continu paramétré). Par la proposition 2, on peut toujours supposer $a=0$ et $b=1$ sans changer l'image de f. Les images de 0 et 1 s'appellent l'origine et l'extrémité du chemin, ou encore ses bouts.



On dit qu'une partie P de E est connexe par arcs si deux points quelconques de P sont les bouts d'un arc continu paramétré "tracé dans P" (id est $f([0,1]) \subset P$).

Exemples : $\mathbb{R}^n$, ses boules, ses pavés sont connexes par arcs ; ses sphères aussi dès que $n \geq 2$ (exercice).

Proposition : Toute partie P connexe par arcs est connexe

Preuve : Soient $a, x \in P$ et $f_x : [0,1] \to P$ un arc continu tel que $f(0) = a$ et $f(1) = x$.
$P_x = f_x([0,1])$ est une partie connexe de P par la proposition 4, et $P = \bigcup_{x\in P} P_x$.
Comme tous les P_x contiennent a, on conclut par la proposition D.3 ∎

Exercice : Dans un espace topologique, la relation : $a \sim b$ si et seulement si a et b sont les bouts d'un arc paramétré est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent "composantes connexes par arcs". Elles forment une partition a priori plus fine que les composantes connexes.

6 - Une bijection $f : E \to F$ entre espaces topologiques est appelée un homéomorphisme si elle est "bicontinue", c'est-à-dire si $f : E \to F$ et $f^{-1} : F \to E$ sont continues.

Exemples : • Les isométries, les homothéties sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même ; de toute partie de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

- $x \mapsto \operatorname{Th} x$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ (et de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1,1]$)
- $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même
- La projection "verticale" $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ de la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^3$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } z \geq 0\}$ sur le disque-unité de $\mathbb{R}^2$ $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ est un homéomorphisme
- Toute "homographie" $z \xmapsto{h} \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$ est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ sur lui-même, quand on pose $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ (avec $\frac{a}{c} = -\frac{d}{c} = \infty$ si $c=0$).
- Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme entre espaces localement compacts, et qu'on pose $\hat{f}(\infty) = \infty$ et $\hat{f}(x) = f(x)$ pour $x \in E$, $\hat{f}$ est un homéomorphisme de $\hat{E}$ sur $\hat{F}$.

Une fonction continue strictement croissante d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme sur son image, qui est un intervalle ouvert.

Remarques : - Il résulte de la proposition 1 qu'un homéomorphisme de E sur F échange les ouverts de E et de F et leurs fermés, donc aussi leurs parties compactes, connexes, ...
- Par la proposition 2, un composé d'homéomorphismes est un homéomorphisme.

Proposition : Soit K compact, E séparé, et $f : K \to E$ continue injective. Alors f est un homéomorphisme de K sur $f(K)$.

Preuve. Si F est un fermé de K, il est compact (prop. B 1), donc $f(F)$ aussi (prop. E.3), donc fermé (B.1) dans E, donc dans $f(K)$. Et $f^{-1} : f(K) \to K$ a la propriété (c) le la proposition E.1, donc est continue. ∎

Par contre c'est faux si K n'est pas compact : considérons $x \mapsto e^{ix}$, continue et bijective de $[0,2\pi[\subset \mathbb{R}$ sur $S(0,1) \subset \mathbb{C}$; ce n'est pas un homéomorphisme puisque $S(0,1)$ est compact, mais pas $[0,2\pi[$ (l'application réciproque n'est pas continue au point 1).

(F) TOPOLOGIES "NATURELLES"

1- Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur un même ensemble E (elles sont définies par la donnée de leurs familles d'ouverts). On dit que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$ si tout ouvert pour $\mathcal{T}'$ est ouvert pour $\mathcal{T}$. (On note $\mathcal{T} > \mathcal{T}'$) La relation $>$ est une relation d'ordre (non total) qui admet un "plus grand" élément (la topologie discrète) et un "plus petit" (la topologie grossière). Dire que $\mathcal{T} > \mathcal{T}'$ équivaut à dire que l'identité est continue de E muni de $\mathcal{T}$ sur E muni de $\mathcal{T}'$.

Soit maintenant E un ensemble et $(f_i : E \to E_i)_{i \in I}$ une famille d'applications de E dans des espaces topologiques. Parmi toutes les topologies dont on peut munir E qui rendent toutes les f_i continues, il en existe une plus fine (la discrète), et une moins fine, appelée topologie initiale (pour la famille $(f_i)_{i \in I}$) : on l'obtient en décrétant que tous les $f_i^{-1}(U_i)$, où U_i est un ouvert de E_i, sont ouverts, et en complétant cette famille de parties de E par intersections finies et réunions quelconques.

Par exemple si E est un espace topologique, et $P \subset E$, ce qu'on a appelé "topologie induite" sur P (par E) au paragraphe C n'est autre que la topologie initiale pour l'injection canonique $i : P \hookrightarrow E$. (et la famille des $i^{-1}(U_i)$ n'a pas, dans ce cas, besoin d'être complétée)

De même si $(g_i : E_i \to E)_{i \in I}$ est une famille d'applications d'espaces topologiques E_i dans un ensemble E, parmi toutes les topologies sur E qui rendent toutes les g_i continues, il en existe une moins fine (la grossière), et une plus fine, appelée topologie <u>finale</u> (pour la famille $(g_i)_{i \in I}$) : ses ouverts sont les parties P de E telles que pour tout $i \in I$, $g_i^{-1}(P)$ est ouvert dans U_i (il y a au moins $\emptyset$ et E, et la famille est stable par réunion et par intersection finie).

Par exemple si E est un espace topologique et $\pi : E \twoheadrightarrow F$ est une surjection sur un ensemble F, les ouverts de la topologie finale de F sont ses parties de la forme $\pi(U)$, où U est un ouvert "<u>saturé</u>" de E (c'est-à-dire tel que si $x \in U$, et $y \in E$, $\pi(y) = \pi(x) \Rightarrow y \in U$)

Les trois notions qui suivent sont des exemples intéressants de ces idées générales.

2 - Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. L'ensemble-produit $E = \prod_{i \in I} E_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \; x_i \in E_i\}$ possède une topologie naturelle, appelée <u>topologie-produit</u>, qui est sa topologie <u>initiale</u> pour la famille des projections $(\pi_i : E \to E_i)_{i \in I}$, définies par $\pi_i(x) = x_i$ si $x = (x_i)_{i \in I}$. Il résulte de sa définition que les ouverts de E pour la topologie-produit sont les réunions quelconques de ses parties de la forme $\prod_{i \in I} U_i$, où U_i est un ouvert de E_i, <u>égal</u> à E_i <u>sauf pour un nombre fini</u> d'indices i.

En particulier <u>quand I est fini</u>, les ouverts de E sont les <u>réunions de produits d'ouverts</u> (des E_i)

Par exemple $\mathbb{R}^n$ est muni de la topologie-produit de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

<u>Théorème (de Tychonoff)</u>: <u>Un produit de compacts est compact</u>

La preuve utilise le théorème de Zorn, et on ne la donne pas ici en général. Mais dans le cas d'un <u>produit fini</u>, la preuve est beaucoup plus facile : il suffit en effet, en itérant, de démontrer que le produit de deux compacts est compact ; or il est clairement séparé, et il ne reste plus alors qu'à recopier la preuve de la proposition B.3, qui traitait le cas de compacts de $\mathbb{R}^n$, avec la modification mineure qui s'impose. ■

De même : <u>Théorème</u> : <u>Un produit de connexes est connexe</u>

A nouveau le cas d'un produit infini se traite par le théorème de Zorn, et le cas d'un produit <u>fini</u> a déja été traité (prop. D.4) pour des parties connexes de $\mathbb{R}^n$, et la preuve s'adapte aussitôt. ■

3- Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur "réunion disjointe" $E = \coprod_{i\in I} E_i = \{(i,x) \mid i\in I, x\in E_i\}$ possède une topologie naturelle, muni de laquelle E s'appelle "somme disjointe" (ou "somme directe", ou "réunion disjointe") des E_i, et qui est sa topologie finale pour la famille des injections $(\alpha_i : E_i \hookrightarrow E)_{i\in I}$ définies par $\alpha_i(x) = (i,x)$ pour $x\in E_i$. Si l'on identifie E_i avec $\alpha_i(E_i)$ (d'où le nom de réunion disjointe), les ouverts de E sont donc ses parties P telles que $P\cap E_i$ est ouvert dans E_i, pour tout $i\in I$.

Exemple : Le groupe $O(2)$ s'identifie à la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ formée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, avec $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$, $ab+cd=0$. En particulier il est fermé et borné, donc compact (pour la topologie induite par $\mathbb{R}^4$).
L'application $e^{i\theta} \xmapsto{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ est injective et continue de $S = S(0,1) \subset \mathbb{C}$ dans $O(2)$, d'image $SO(2)$, le sous-groupe des matrices orthogonales directes (de déterminant >0)
Comme S est compact, $SO(2)$ aussi et α est un homéomorphisme (prop E.6)
L'application $e^{i\theta} \xmapsto{\beta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ est continue et injective de S dans $O(2)$, d'image $O^-(2)$, l'ensemble des matrices orthogonales indirectes (de déterminant <0).
De même β est donc un homéomorphisme de S sur le compact $O^-(2)$
Il en résulte que $O(2)$ est homéomorphe à $S \amalg S$: deux cercles "côte à côte".

4- Soit E un espace topologique, et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble quotient $E/\sim$ possède une topologie naturelle, appelée topologie-quotient, qui est sa topologie finale pour la surjection canonique $E \xrightarrow{\pi} E/\sim$ définie par $\pi(x) = \dot{x}$ pour $x\in E$.
Cette topologie naturelle se rencontre en particulier quand on considère le quotient d'un espace topologique sous l'action d'un groupe. Il faut prendre garde que (alors qu'un produit ou une somme disjointe d'espaces séparés sont séparés), l'espace-quotient d'un espace séparé n'est pas en général séparé

Exemples : - Le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence "au signe près" est homéomorphe à la demi-droite $[0,+\infty[$

- Le quotient de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ par le groupe des homothéties de centre 0 s'appelle "l'espace projectif réel de dimension n" et se note $P_n(\mathbb{R})$. $P_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle.
- Soit E l'espace-quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe des bijections linéaires de matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$, avec $a>0$. Décrire la topologie de E.
Qu'est-ce qu'une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$?