Agrégation Analyse (F. Rouvière) **8.1.02**

RÉSUMÉ SUR L'INTÉGRALE DE FOURIER

À une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ on associe sa transformée de Fourier

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi tx} dx \ , \ t \in \mathbb{R} \ .$$

Voir remarque finale sur cette définition. En particulier $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$.

Théorème 1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, bornée, et tend vers zéro à l'infini. De plus*

$$\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \leq \|f\|_1 \ .$$

Formulaire

- si f est paire (resp. impaire), alors $\widehat{f}$ est paire (resp. impaire)
- $g(x) = f(x-a)$ donne $\widehat{g}(t) = e^{-2i\pi at}\widehat{f}(t)$ (avec a constante réelle)
- $h(x) = e^{2i\pi ax} f(x)$ donne $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t-a)$
- si $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{(f')}(t) = 2i\pi t\, \widehat{f}(t)$
- si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x\, f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et $-2i\pi \widehat{(x\, f)}(t) = \left(\widehat{f}\right)'(t)$
- $\widehat{(f * g)}(t) = \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(t)$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, g(t)\, dt$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Ces formules s'obtiennent facilement par les outils classiques du calcul intégral (convergence dominée, Fubini,...). On retiendra notamment que Fourier transforme translation en multiplication par une exponentielle (et vice versa), dérivation en multiplication par la variable (et vice versa), produit de convolution en produit ordinaire. Ces remarquables propriétés opératoires justifient à elles seules l'intérêt de la transformation de Fourier. Elles peuvent servir également au calcul de certaines transformées de Fourier.

Exemples.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) & \text{donne} & \widehat{f}(t) = (\sin 2\pi at)/\pi t \\ f(x) = e^{-2\pi|x|} & \text{donne} & \widehat{f}(t) = 1/\pi(1+t^2) \\ f(x) = e^{-\pi x^2} & \text{donne} & \widehat{f}(t) = e^{-\pi t^2} \end{array}$$

Théorème 2 (*formule d'inversion de Fourier*). *On suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, e^{2i\pi tx} dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R} \ .$$

Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, la formule est valable en tout point x.

Les amateurs de chapeaux pourront l'écrire aussi $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$.

Remarque. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec f et f' et $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et le théorème 2 s'applique.

Théorème 3 (*formule de Plancherel*). *On suppose $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a*

$$\|f\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2 \text{, c'est-à-dire } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \, dt \ .$$

La tranformation $f \mapsto \widehat{f}$ peut se prolonger de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier, en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même qui conserve le produit scalaire (et la norme) de cet espace.

Danger. Une fonction de carré intégrable n'est pas nécessairement intégrable : pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ l'intégrale de Fourier $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi tx} dx$ n'a peut-être plus de sens ! La transformée $\widehat{f}$ ne peut alors se définir que grâce à un prolongement par densité. On peut montrer par exemple que

$$\widehat{f}(t) = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-2i\pi tx} dx$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la convergence ayant lieu au sens de la norme L^2.

Remarque sur la définition. De nombreux livres définissent la transformée de Fourier par l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-itx} dx \ .$$

La définition adoptée ici, avec un facteur 2π dans l'exposant, a l'avantage de ne faire apparaître *aucun autre facteur* constant dans les formules et théorèmes ci-dessus (convolution, inversion, Plancherel).

Références.

FARAUT, *Calcul intégral*, chapitre 9.
BUCHWALTER, *Le calcul intégral*, p.120-145.
RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, chapitre 9.
GASQUET et WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, p.127-169.
ZUILY et QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, p.320-325.