

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

(révisions pour l'agrégation)

F. Rouvière, automne 2004

Table des matières

1	Théorèmes “élémentaires”	3
2	Théorèmes “intermédiaires”	4
3	Théorèmes “positifs”	7
4	Théorèmes de Lebesgue	9
5	Intégrales semi-convergentes	17
6	Intégration et dérivation	20

Introduction

Dans de nombreuses situations on souhaite permuter entre eux deux des quatre outils de l'analyse \lim , \sum , ∂ , \int (limite, sommation d'une série, dérivation, intégration), ce qui pose plusieurs questions : la dérivée de la limite est-elle la limite des dérivées ? l'intégrale de la somme d'une série est-elle la somme de la série des intégrales ? etc. Pour une réponse affirmative sous des hypothèses appropriées, on a en principe besoin de $4(4 + 1)/2 = 10$ théorèmes tels que $\partial \lim = \lim \partial$ ou $\int \sum = \sum \int$ ou $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$ etc., selon le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 \lim \lim & \sum \lim & \partial \lim & \int \lim \\
 \lim \sum & \sum \sum & \partial \sum & \int \sum \\
 \lim \partial & \sum \partial & \partial \partial & \int \partial \\
 \lim \int & \sum \int & \partial \int & \int \int
 \end{array}$$

On ne s'intéressera ici qu'aux quatre résultats issus de la dernière ligne ; ils concernent les intégrales qui comportent, en plus de la variable d'intégration, un paramètre (entier ou réel). Les résultats utiles sont alors des théorèmes de *passage à la limite, sommation de série, dérivation, ou intégration sous le signe somme*. Ils sont liés entre eux : une dérivée, c'est une limite ; sommer une série, c'est prendre la limite de ses sommes partielles, c'est aussi intégrer sur l'ensemble des nombres entiers. On pourrait donc espérer réduire à deux ($\lim \int$ et $\int \int$) le nombre minimal de théorèmes indispensables...

Il est hélas utile d'en connaître beaucoup plus, directement adaptés à différents cadres ou à différentes notions d'intégrales. Lorsqu'il s'agit de braves fonctions continues intégrées sur un banal intervalle compact (**chapitre 1**), il serait un peu déplacé sans doute de faire appel à la puissante théorie de Lebesgue, alors qu'on s'en tire si bien avec les outils élémentaires de l'analyse de deuxième année (convergence uniforme, continuité uniforme). Ces premiers résultats s'étendent même aisément aux intégrales impropres absolument

convergentes sur des intervalles non compacts et conduisent, toujours par des moyens élémentaires, à des théorèmes simples et efficaces dont certains n'ont pas à rougir devant les énoncés correspondants de Lebesgue (**chapitre 2**). Les deux chapitres suivants ont pour cadre l'intégrale de Lebesgue, dont un des mérites est de permettre l'intégration sur des ensembles "quelconques" de fonctions très peu régulières. Lorsqu'on se limite aux fonctions positives, certains énoncés ($\sum f$ et $\int f$) sont alors d'une simplicité si merveilleuse qu'il eût été bien dommage de ne pas les mettre en lumière (**chapitre 3**). Les classiques théorèmes de Lebesgue (convergence dominée, Fubini,...) sont ensuite passés en revue au **chapitre 4**, et la puissance de ces outils est illustrée de nombreux exercices.

Ces quatre points de vue conduisent à 4 fois 4 théorèmes environ¹, et même un peu plus... En effet, bien que conséquence directe des théorèmes $\lim \int$, la continuité d'une intégrale à paramètre donne lieu à des énoncés souvent plus agréables, et fort utiles; d'autre part le théorème $\partial \int$ de Lebesgue se simplifie sensiblement lorsqu'on dérive par rapport à une variable complexe, ce qui justifie un énoncé supplémentaire.

Et ce n'est pas tout : les intégrales non absolument convergentes (dont l'exemple le plus célèbre est $\int_0^\infty (\sin x/x) dx$), qui ne sont pas des intégrales de Lebesgue, doivent être traitées à part ! Mais il n'y a que peu d'outils spécifiques adaptés à ce cas (**chapitre 5**), si ce n'est de tenter un retour vers les rivages rassurants de l'absolue convergence, par exemple grâce à une intégration par parties.

On donne enfin quelques indications sur le problème des primitives (**chapitre 6**), généralement mal connu hormis le cas élémentaire des fonctions continues.

La plupart des théorèmes ci-dessous sont cités sans démonstration (on les trouvera dans les références), et sans prétendre au maximum de généralité. Une trentaine d'**exercices** sont proposés pour les mettre en pratique.

Alors que choisir ? On attendait quatre théorèmes ($\lim \int$, $\sum \int$, $\partial \int$, $\int f$), on en trouve une vingtaine dans ce qui suit ! Pour guider le choix :

- Si on souhaite se passer de la théorie de Lebesgue, on se contentera des chapitres 1 (fonctions continues sur un compact), 2 (intégrales impropres absolument convergentes) et 5 (intégrales impropres non absolument convergentes).
- Dans le cadre de la théorie de Lebesgue, on notera l'extrême facilité d'emploi des théorèmes "positifs" (chapitre 3), strictement réservés aux fonctions... positives. Quant aux théorèmes de Lebesgue proprement dits (chapitre 4), ce sont des outils puissants et commodes pour toutes les intégrales absolument convergentes.

Un exemple. Pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$, on peut envisager les trois méthodes suivantes. Chacun(e) choisira en son âme et conscience, selon son éthique professionnelle :

1. $\sin^n x \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, (\pi/2) - \varepsilon]$, et $0 \leq \int_{(\pi/2) - \varepsilon}^{\pi/2} \sin^n x dx \leq \varepsilon$ (convergence uniforme, théorème 1).
2. $1 - \sin^n x$ est une suite croissante de fonctions positives sur $[0, \pi/2]$ (convergence monotone, théorème 10).
3. $\sin^n x \rightarrow 0$ simplement sur $[0, \pi/2[$, et domination $|\sin^n x| \leq 1$ (convergence dominée, théorème 14).

¹Pas de théorème $\partial \int$ dans le chapitre 3 cependant, la dérivation n'ayant aucune raison de respecter la positivité des fonctions.

1 Théorèmes “élémentaires”

On intègre ici des fonctions *continues* sur un *compact* $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, avec des hypothèses de *convergence uniforme* sur $[a, b]$.

Référence : [P] §21.

Théorème 1 ($\lim f$) Si les f_n sont continues et convergent uniformément sur $[a, b]$ on a

$$\lim_n \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\lim_n f_n(x) \right) dx .$$

Théorème 2 (Continuité de l'intégrale) Si f est continue sur $[a, b] \times I$ (où I est un intervalle quelconque), la fonction

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

est continue en t sur I .

Théorème 3 ($\sum f$) Si les u_n sont continues et si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ on a

$$\sum_n \left(\int_a^b u_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_n u_n(x) \right) dx .$$

Théorème 4 (∂f) Si f et $\partial f / \partial t$ sont continues sur $[a, b] \times I$, l'intégrale de f est continûment dérivable en t sur I et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx .$$

Noter que, l'intégrale $\int_a^b f(x, t) dx$ ne dépendant que de la seule variable t , il n'y a pas lieu d'utiliser le symbole $\partial / \partial t$ de dérivée partielle au premier membre de l'égalité.

Théorème 5 ($\int \int$) Si f est continue sur le produit de compacts $[a, b] \times [c, d]$ on a

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx .$$

Exercice 1. La série magnifique. En développant en série $x^x = e^{x \ln x}$, montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

(“series mirabili” de Johann Bernoulli, 1697).

[Le changement $x = e^{-t}$ pourra être agréable dans les calculs.]

Application : en s'aidant du théorème des séries alternées, donner la valeur numérique de l'intégrale à 10^{-6} près.

Exercice 1 bis. Formule de Simon Plouffe². Soit à montrer que

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) .$$

²Découverte le 19 septembre 1995 après un mois de tâtonnements, cette formule permet un calcul très performant des décimales de π en base 16 [Delahaye, *Le fascinant nombre π* , Belin 1997]. Le record actuel (1241 milliards de décimales en base 10) est détenu par Yasumasa Kanada (décembre 2002), par une autre méthode.

a. Soit $P(x) = 16x$, $Q(x) = (1 + x^2)(1 + 2x - x^2)$. En décomposant P/Q sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{1 + x^2} + \frac{B(x)}{1 + 2x - x^2},$$

où A et B sont des polynômes de degré 1, montrer que $I = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \pi$.

b. Observer que $I = \int_0^1 \frac{P(1-x)}{Q(1-x)} dx$. Développer $(P/Q)(1-x)$ en série entière autour de l'origine et conclure.

[On conseille de multiplier $P(1-x)$ et $Q(1-x)$ par $(2+x^2)(2+2x+x^2)$.]

Exercice 2. *Division par x* ([P] p.194, [Gou] p.164) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $g(x) = f(x)/x$, a priori non définie à l'origine, se prolonge en une fonction C^∞ sur \mathbb{R} , et que $g^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0)/(n+1)$.

[Considérer $\int_0^1 f'(tx) dt$.]

Exercice 3. *Période du pendule.* La période des oscillations d'amplitude 2α d'un pendule simple est

$$T(x) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}, \text{ avec } x = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Montrer que c'est une fonction continue de x sur $] -1, 1[$, et même développable en série entière (les coefficients de la série obtenue font intervenir les classiques intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta . d\theta$).

Exercice 4. *Un calcul d'intégrale* ([LFA] p.465 ; autres méthodes dans [Gou] p.181). Soit r un réel, $r \neq \pm 1$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 4\pi \ln |r| & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

[Pour $|r| < 1$ la fonction à intégrer est $2 \operatorname{Re} \ln(1 - re^{i\theta}) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (r^n/n) \cos n\theta$; pour $|r| > 1$, poser $r' = 1/r$.]

Exercice 5. *Preuve élémentaire de Fubini* ([V] p.147). Démontrer le théorème 5 :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx$$

si f est continue sur $[a, b] \times [c, d]$.

[On pourra remplacer la borne d par $y \in [c, d]$, et comparer la dérivée par rapport à y des deux membres grâce aux théorèmes 2 et 4.]

2 Théorèmes “intermédiaires”

Le cadre est celui des *intégrales impropres absolument convergentes sur un intervalle non compact*, avec des fonctions *continues* (à valeurs réelles ou complexes) et une hypothèse de *convergence uniforme sur tout compact* et de *domination*. Les théorèmes de ce chapitre sont des versions simplifiées (et souvent suffisantes en pratique) des théorèmes correspondants de Lebesgue. Leur principale qualité est de pouvoir s'obtenir avec des outils du niveau bac+2. Le principal défaut des théorèmes 6 et 8 est d'obliger à établir une convergence uniforme; en revanche les théorèmes 7 et 9 sont, en pratique, presque aussi puissants que les énoncés de Lebesgue.

On note I un intervalle quelconque (non compact, sinon le chapitre 1 suffirait). L'intégrale impropre d'une fonction continue sur I est définie comme la limite (si elle existe) :

$$\int_I f(x) dx = \lim \int_a^b f(x) dx ,$$

lorsque $a, b \in I$ tendent vers les bornes respectives de I . Les résultats ci-dessous se démontrent facilement en appliquant les théorèmes élémentaires sur le compact $[a, b]$ et en passant à la limite ; on esquisse seulement la preuve du premier, les autres sont laissées en exercice.

Références : [KV] chapitre 4, [LFA] chapitre XI, ou même [Ro] p.112 pour le théorème 9.

Théorème 6 ($\lim f$) *On suppose les f_n continues sur I et*

(i) f_n converge uniformément sur tout compact de I quand $n \rightarrow \infty$

(ii) domination : il existe g , continue sur I et indépendante de n , telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, et $\int_I g(x) dx < \infty$. Alors

$$\lim_n \left(\int_I f_n(x) dx \right) = \int_I \left(\lim_n f_n(x) \right) dx .$$

Preuve. Soit $f = \lim f_n$, continue sur I ; comme $|f| \leq g$, l'intégrale $\int_I f$ converge absolument. En écrivant I comme réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts I_k , on a

$$\left| \int_I f - \int_I f_n \right| \leq \int_{I \setminus I_k} |f - f_n| + \int_{I_k} |f - f_n| .$$

L'inégalité $|f - f_n| \leq 2g$ et la convergence de $\int_I g$ montrent que la première intégrale est petite pour k assez grand (uniformément par rapport à n) ; l'entier k étant ainsi choisi, la deuxième intégrale est petite pour n assez grand, grâce à la convergence uniforme sur le compact I_k , d'où

$$\int_I f = \lim \int_I f_n .$$

Théorème 7 (Continuité de l'intégrale) *On suppose f continue sur $I \times J$ (où J est un autre intervalle) et la domination : il existe g , continue sur I et indépendante du paramètre t , telle que $|f(x, t)| \leq g(x)$ pour tous $x \in I$, $t \in J$ et $\int_I g(x) dx < \infty$. Alors la fonction*

$$F(t) = \int_I f(x, t) dx$$

est continue en t sur J .

Théorème 8 ($\sum f$) *On suppose les u_n continues sur I , la série $\sum_n u_n(x)$ uniformément convergente sur tout compact de I et $\int_I (\sum_n |u_n(x)|) dx < \infty$. Alors*

$$\sum_n \left(\int_I u_n(x) dx \right) = \int_I \left(\sum_n u_n(x) \right) dx .$$

Le théorème 8 se déduit du théorème 6 en dominant les sommes partielles par la fonction $g(x) = \sum_n |u_n(x)|$.

Théorème 9 (∂f) On suppose f et $\partial f/\partial t$ continues sur $I \times J$, l'existence de $F(t) = \int_I f(x, t) dx$ pour chaque $t \in J$ et la domination : il existe g , continue sur I et indépendante du paramètre t , telle que $|(\partial f/\partial t)(x, t)| \leq g(x)$ pour tous $x \in I, t \in J$, avec $\int_I g(x) dx < \infty$. Alors F est continûment dérivable sur J et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_I f(x, t) dx \right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx .$$

Exercice 6. Un calcul d'intégrale . Soit n un entier, $n \geq 1$. En dérivant n fois l'intégrale

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} ,$$

établir l'égalité, pour $a > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2a^{n+(1/2)}} .$$

[On pourra dominer les dérivées pour $a \geq \varepsilon > 0$.]

Exercice 7. Fonction Gamma d'Euler ([P] p.196, [ZQ] p.305). Montrer que la fonction

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

est C^∞ sur la demi-droite $s > 0$, et que ses dérivées se calculent sous le signe somme.

[Établir une inégalité de domination pour $0 < \alpha \leq s \leq \beta$, en distinguant les cas $x \leq 1$ et $x \geq 1$].

Remarque : On a en particulier, pour $s > 0$,

$$\Gamma''(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^2 dx > 0 ,$$

ce qui montre que la fonction Γ est *convexe* sur $]0, \infty[$. Mieux même : la fonction $\ln \Gamma$ est convexe sur cet intervalle (on dit que Γ est *logarithmiquement convexe*), car

$$(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma \Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

et, en posant $f(x) = e^{-x/2} x^{(s-1)/2}$ et $g(x) = e^{-x/2} x^{(s-1)/2} \ln x$,

$$\begin{aligned} \Gamma'(s)^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \ln x dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty f(x) g(x) dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^\infty f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^\infty g(x)^2 dx \right) = \Gamma(s) \Gamma''(s) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où $(\ln \Gamma)'' \geq 0$.

Exercice 8. Intégrales de Fresnel ([F] p.94). De nombreuses intégrales peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction Γ . En voici un exemple parmi tant d'autres (voir aussi l'exercice 17) : établir les égalités, pour $p > 1$,

$$\int_0^\infty \cos(x^p) dx = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2p}\right) \text{ et } \int_0^\infty \sin(x^p) dx = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) .$$

Pour $p = 2$ on obtient les intégrales de Fresnel proprement dites.

[Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction holomorphe e^{iz^p} sur un secteur circulaire de sommet 0 et d'angle $\pi/2p$].

Exercice 9. *Transformée de Fourier d'une gaussienne* ([ZQ] p.322). Montrer que, pour $\omega > 0$, la fonction

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\omega x^2} e^{-2i\pi xt} dx$$

(transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi\omega x^2}$) est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\widehat{f}(t) = -\frac{2\pi t}{\omega}\widehat{f}(t),$$

et en déduire³ que

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-\pi t^2/\omega}.$$

Exercice 10. *Zéta et Gamma.* Pour $\operatorname{Re} s > 1$ on a

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$

où $\zeta(s) = \sum_1^{\infty} n^{-s}$.

[Considérer la série $\sum_1^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}$, uniformément convergente pour $\varepsilon \leq x \leq a$.]

3 Théorèmes “positifs”

Le cadre est un espace mesuré X , avec l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables *positives* sur X , sans aucune autre hypothèse! En pratique X sera un intervalle quelconque, et les fonctions seront continues sur X (sauf éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité).

Références : [F] p.8-11 et 56, [Ru] Th. 1.26, 1.27, 1.28 et 8.8, ou votre cours préféré de calcul intégral.

Théorème 10 ($\lim f$; théorème de la limite croissante) *Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives sur X on a*

$$\lim_n \left(\int_X f_n(x) dx \right) = \int_X \left(\lim_n f_n(x) \right) dx.$$

Le théorème 10 est aussi appelé “théorème de la convergence monotone”, ou “théorème de Beppo Levi”.

Théorème 11 ($\lim f$; lemme de Fatou) *Si (f_n) est une suite quelconque de fonctions mesurables positives sur X on a*

$$\int_X \left(\liminf_n f_n(x) \right) dx \leq \liminf_n \left(\int_X f_n(x) dx \right).$$

³On admettra ici l'égalité $\Gamma(1/2) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, établie par exemple à l'Exercice 18.

Dans le lemme de Fatou, l'inégalité peut être stricte : voir la suite $f_{2n} = \chi_{]0,1[}$, $f_{2n+1} = \chi_{]-1,0[}$ (fonctions caractéristiques d'intervalles), qui donne 0 à gauche et 1 à droite. Ce lemme est surtout utilisé dans des exercices "théoriques", comme la preuve du théorème 14 de convergence dominée ou celle du théorème 23.

Théorème 12 ($\sum f$) Si les u_n sont mesurables positives sur X on a

$$\sum_n \left(\int_X u_n(x) \right) dx = \int_X \left(\sum_n u_n(x) \right) dx .$$

Théorème 13 ($\int \int$; théorème de Fubini-Tonelli) Si X et Y sont deux espaces mesurés σ -finis⁴ et f une fonction mesurable positive sur $X \times Y$ on a

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy .$$

Remarque. L'intégrale sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers, muni de la mesure du dénombrement, est la sommation des séries. En prenant $Y = \mathbb{N}$ dans le théorème 13 on retrouve le théorème 12; en prenant $X = Y = \mathbb{N}$ on obtient un important résultat sur les *séries doubles* :

$$\sum_p \left(\sum_q u_{pq} \right) = \sum_q \left(\sum_p u_{pq} \right) , \text{ si } u_{pq} \geq 0 \text{ pour tous } p, q .$$

Exercice 11. Reprendre l'exercice 10, lorsque s est un réel > 1 ; tout souci de convergence a maintenant disparu grâce au théorème 12!

Exercice 12. En considérant la série $\sum_0^\infty x e^{-(2n+1)x}$ montrer que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^2}{2} .$$

Exercice 13. *Série zéta de Riemann.* En considérant la série $\sum_0^\infty (xyz)^n$ montrer que

$$\iiint \frac{dx dy dz}{1 - xyz} = \zeta(3) ,$$

où l'intégrale est étendue au cube $0 < x, y, z < 1$.

Exercice 14*. ([Ge] p.92) Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sin nx|} = 1$$

[Établir la convergence de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f(nx) dx$, où $f(x) = (\ln |\sin x|)^2$. En déduire par le théorème 12 que $f(nx)/n^2$ tend vers 0 pour presque tout x .]

⁴L'hypothèse σ -fini signifie réunion dénombrable de parties de mesure finie; c'est le cas notamment pour un intervalle, un ouvert de \mathbb{R}^n , l'ensemble des entiers...

4 Théorèmes de Lebesgue

Le cadre est encore un espace mesuré X , avec l'intégrale de Lebesgue des fonctions *intégrables* sur X (à valeurs réelles ou complexes) et des hypothèses de *domination*. On rappelle qu'une fonction f est intégrable sur X (au sens de Lebesgue) si elle est mesurable et si $\int_X |f|$ est finie. Les expressions “*presque partout*” ou “*pour presque tout x* ” signifient “sauf sur un ensemble de mesure nulle”.

Références : [B] §§1.8, 1.10 et 2.2, [F] p.16, 54 et chapitre VII, [Gr] p.102-105 et 191, [ZQ] chapitre IX, ou bien sûr votre cours favori de calcul intégral.

Théorème 14 ($\lim f$; théorème de convergence dominée) *On suppose les f_n mesurables et*

(i) f_n converge simplement presque partout sur X quand $n \rightarrow \infty$

(ii) domination : il existe g , intégrable sur X et indépendante de n , telle que, pour chaque n , on ait l'inégalité $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors $\lim f_n$ (définie presque partout) est intégrable sur X et

$$\lim_n \left(\int_X f_n(x) dx \right) = \int_X \left(\lim_n f_n(x) \right) dx .$$

Théorème 15 (Continuité de l'intégrale) *Soient I un intervalle et $f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que*

(i) pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable sur X

(ii) pour presque tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I

(iii) domination : il existe g , intégrable sur X et indépendante du paramètre t , telle que, pour chaque $t \in I$, on ait l'inégalité $|f(x, t)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors la fonction

$$F(t) = \int_X f(x, t) dx$$

est continue en t sur I .

Théorème 16 ($\sum f$) *On suppose les u_n mesurables sur X et*

$$\sum_n \left(\int_X |u_n(x)| dx \right) < \infty \text{ ou bien } \int_X \left(\sum_n |u_n(x)| \right) dx < \infty .$$

Alors

$$\sum_n \left(\int_X u_n(x) dx \right) = \int_X \left(\sum_n u_n(x) \right) dx .$$

Dans cette égalité il est sous-entendu (et garanti par le théorème) que les deux membres de l'égalité ont un sens, à savoir : chaque u_n est intégrable sur X , la série de leurs intégrales est absolument convergente, la série des $u_n(x)$ est absolument convergente pour presque tout x , et sa somme (définie presque partout) est une fonction intégrable sur X . Quant à l'hypothèse de finitude, ses deux variantes sont équivalentes d'après le théorème 12; on choisira celle qui semble la plus commode à vérifier.

Remarque. En appliquant directement le théorème 14 aux sommes partielles $f_n = \sum_{p=0}^n u_p$, on obtiendrait le résultat du théorème 16 sous l'hypothèse de convergence simple presque partout de la série avec domination $\left| \sum_{p=0}^n u_p(x) \right| \leq g(x)$. Sous l'hypothèse du théorème 16 cela est évidemment vérifié avec $g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} |u_p(x)|$. Le théorème 16 est donc un peu plus faible, mais plus facile à utiliser.

Théorème 17 (∂f) Soient I un intervalle et $f : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que
 (i) pour chaque $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur X
 (ii) pour chaque $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ admet une dérivée $(\partial f / \partial t)(x, t)$
 (iii) domination : il existe g , intégrable sur X et indépendante du paramètre t , telle que, pour tous $x \in X$ et $t \in I$, on ait $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)$.
 Alors la fonction $F(t) = \int_X f(x, t) dx$ est dérivable sur I et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_X f(x, t) dx \right) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx .$$

Théorème 18 (∂f , version holomorphe) Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que
 (i) pour chaque $z \in \Omega$ la fonction $x \mapsto f(x, z)$ est intégrable sur X
 (ii) pour chaque $x \in X$ la fonction $z \mapsto f(x, z)$ est holomorphe sur Ω
 (iii) domination : il existe g , intégrable sur X et indépendante du paramètre z , telle que, pour tous $x \in X$ et $z \in \Omega$, on ait $|f(x, z)| \leq g(x)$.
 Alors la fonction $F(z) = \int_X f(x, z) dx$ est holomorphe sur Ω et

$$\frac{d}{dz} \left(\int_X f(x, z) dx \right) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) dx .$$

Remarque. Comparer les théorèmes 17 et 18 : dans la version holomorphe la domination porte sur f et non sur sa dérivée ! Une domination sur chaque compact de Ω serait en fait suffisante.

Théorème 19 ($\int \int$; théorème de Fubini-Lebesgue) Soient X et Y deux espaces mesurés σ -finis⁵ et $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable sur l'espace produit. On suppose

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \text{ ou bien } \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy < \infty .$$

Alors on a

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy .$$

Dans cet énoncé il est sous-entendu (et garanti par le théorème) que les deux membres de l'égalité ont un sens, à savoir : $f(x, y)$ est intégrable en y sur Y pour presque tout x , son intégrale est une fonction de x intégrable sur X , et vice-versa.

Remarque. En prenant $Y = \mathbb{N}$ dans le théorème 19 ($\int \int$) on retrouve le théorème 16 ($\Sigma \int$). En prenant $X = Y = \mathbb{N}$ on obtient un important résultat sur les *séries doubles* ($\Sigma \Sigma$) :

$$\text{si } \sum_p \left(\sum_q |u_{pq}| \right) < \infty , \text{ alors } \sum_p \left(\sum_q u_{pq} \right) = \sum_q \left(\sum_p u_{pq} \right) .$$

Exercice 15. Reprendre les exercices 7, 9 ou 10 ([Ge] p.78) du chapitre 2 à l'aide des théorèmes de Lebesgue.

Exercice 16. Fonction Gamma d'Euler ([P] p.208, [ZQ] p.305). On rappelle la définition

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx .$$

⁵L'hypothèse σ -fini signifie "réunion dénombrable de parties de mesure finie"; c'est le cas pour un intervalle, pour un ouvert de \mathbb{R}^n , ou pour l'ensemble des entiers.

a. Montrer qu'on a, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx$$

[on vérifiera que les fonctions $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} \chi_n(x)$, où χ_n est la fonction caractéristique de $[0, n]$, sont dominées par $g(x) = e^{-x} x^{\operatorname{Re} s - 1}$].

b. En déduire, par intégrations par parties,

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} .$$

c. Montrer que la fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

Exercice 17. *Fonction Bêta d'Euler.*

a. Établir l'égalité, pour $p > 0$ et $q > 0$,

$$\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} .$$

On note $B(p, q)$ la valeur commune de ces intégrales (fonction Bêta d'Euler).
[Effectuer le changement de variables $x = tz$, $y = (1-t)z$ dans l'intégrale

$$\int \int_{x>0, y>0} e^{-x} e^{-y} x^{p-1} y^{q-1} dx dy .]$$

b. On donne $a > 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée comme à l'exercice 16.a, trouver la limite quand x tend vers $+\infty$ de l'intégrale

$$x^a B(x, a) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{x-1} t^{a-1} dt .$$

En déduire l'équivalent

$$\Gamma(x+a) \sim x^a \Gamma(x) \text{ quand } x \rightarrow +\infty .$$

Exercice 18. *Formule de duplication de Legendre.* On reprend les fonctions Bêta et Gamma des exercices précédents.

a. Établir les égalités, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{s-1} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2s-1} \theta d\theta = B\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^{2s-1} B(s, s) .$$

En déduire $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

[Effectuer les changements de variable $t = \sin \theta$, resp. $u = t^2$, resp. $v = (1+t)/2$, dans l'intégrale en t .]

b. En déduire la *formule de duplication*, pour $s > 0$,

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2s) = \Gamma(2s) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) .$$

Expliciter $\Gamma(n + (1/2))$ pour n entier positif.

Exercice 19. *Inversion de l'opérateur intégral d'Abel.* Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On note A l'opérateur intégral défini par

$$g = Af \text{ avec } g(y) = Af(y) = \int_0^y \frac{f(x) dx}{\sqrt{y-x}} \text{ si } y > 0, g(0) = 0 .$$

a. Montrer que g est continue sur $[0, \infty[$.

[On pourra faire le changement de variable $x = (1 - t^2)y$].

b. Montrer que, pour $z \geq 0$,

$$Ag(z) = \pi \int_0^z f(x) dx ,$$

et en déduire la formule d'inversion de A :

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} Ag(z) .$$

Exercice 20. *Inégalité de Hardy* ([ZQ] p.220). L'espace $L^2(0, \infty)$ des fonctions $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable est muni de la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Pour $f \in L^2(0, \infty)$ et $x > 0$ on note

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

la moyenne de f entre 0 et x .

a. En écrivant $F(x) = x^{-1} \int_0^x f(t)t^{1/4} \cdot t^{-1/4} dt$, montrer que

$$|F(x)|^2 \leq 2x^{-3/2} \int_0^x |f(t)|^2 t^{1/2} dt .$$

b. En déduire l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_2 \leq 2 \|f\|_2 .$$

[Intégrer en x et appliquer le théorème de Fubini.]

Exercice 21. *Potentiel newtonien* ([S] p.64). Soient ρ une fonction mesurable sur \mathbb{R}^3 , bornée, nulle hors d'un compact K , et V le potentiel newtonien créé par la densité ρ , i.e.

$$V(x) = \int_K \frac{\rho(y) dy}{\|x - y\|} ,$$

où dy est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3 et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Montrer que, sur le complémentaire de K , le potentiel est une fonction C^∞ , solution de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

Exercice 22. *Transformée de Fourier* ([ZQ] p.324). Si f est intégrable sur \mathbb{R} , montrer que

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xt} dx$$

est une fonction continue et bornée de t sur \mathbb{R} .

Si f et g sont intégrables sur \mathbb{R} , montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)g(t) dt .$$

Cette égalité conduira à une preuve simple de la formule d'inversion de Fourier (exercice 23).

Exercice 23. *Formule d'inversion de Fourier* ([ZQ] p.324). On suppose f continue, bornée et intégrable sur \mathbb{R} , et on suppose que sa transformée de Fourier

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xt} dx$$

est intégrable sur \mathbb{R} .

a. À l'aide des exercices 9 et 22 montrer que, pour tout réel ε ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} f(\varepsilon x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi \varepsilon^2 t^2} \widehat{f}(t) dt .$$

b. En appliquant aux deux membres le théorème de convergence dominée pour $\varepsilon \rightarrow 0$, en déduire l'égalité

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) dt$$

et, par translation sur f , la *formule d'inversion de Fourier*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{2i\pi xt} dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. *Produit de convolution* ([F] p.109, 115, 121).

a. Si f et g sont intégrables sur \mathbb{R} , alors l'intégrale

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy$$

converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et définit une fonction $f * g$ intégrable sur \mathbb{R} .

[Appliquer le théorème de Fubini à $\int \int |f(x-y)g(y)| dx dy$.]

b. Vérifier l'égalité des transformées de Fourier

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} .$$

c. Si f est intégrable sur \mathbb{R} et φ continûment dérivable, nulle en dehors d'un compact, alors $f * \varphi$ est continûment dérivable sur \mathbb{R} et

$$(f * \varphi)' = f * \varphi' .$$

En bref $L^1(\mathbb{R}) * C_c^1(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 25. *Problème de Dirichlet dans le demi-plan.* Soit f une fonction mesurable et bornée sur \mathbb{R} . Pour $(x, y) \in P$ (demi-plan $y > 0$ de \mathbb{R}^2) on note

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt .$$

a. Montrer que cette intégrale définit u continue sur P .

[On pourra rechercher une inégalité de domination pour $|x| \leq a$ et $0 < \varepsilon \leq y \leq b$, en observant que $|t - x| \geq |t|/2$ dès que $|t| \geq 2a$.]

b. Montrer que $u \in C^\infty(P)$.

[Pour dominer les dérivées on pourra observer que $\frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \text{Im} \left(\frac{1}{t-(x+iy)} \right)$.]

c. On suppose de plus f uniformément continue sur \mathbb{R} , et on prolonge u au demi-plan fermé \bar{P} en posant $u(x, 0) = f(x)$. Montrer que $u(x, y)$ tend vers $f(x)$ quand y tend vers 0 (par valeurs positives), uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

[On pourra écrire

$$u(x, y) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) \frac{y dt}{t^2 + y^2},$$

et couper en deux l'intégrale en isolant les valeurs de t voisines de 0.]

d. En déduire que u est continue sur \bar{P} , et solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} u &\in C^2(P) \cap C(\bar{P}) \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dans } P \\ u(x, 0) &= f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[L'expression de la solution u , parachutée ici par commodité, pourrait être aisément motivée par transformation de Fourier sur la variable x .]

Exercice 26. Résolution de l'équation de la chaleur ([F] p.160). Soit f une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} . Pour $t > 0$ on note g_t la gaussienne

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R},$$

et u la fonction définie par

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (f * g_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_t(x-y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On va montrer que u est C^∞ sur le demi-plan ouvert $t > 0, x \in \mathbb{R}$, continue sur le demi-plan fermé, et donne une solution de l'équation aux dérivées partielles "de la chaleur"

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \text{ pour } t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[L'expression de la solution u , parachutée ici par commodité, pourrait être aisément motivée par transformation de Fourier sur la variable x .]

a. Vérifier que $\partial g_t / \partial t = \partial^2 g_t / \partial x^2$.

b. Montrer que u est fonction continue de (t, x) sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$.

[On pourra écrire

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x - y\sqrt{4t}) e^{-y^2} dy$$

pour $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, et conclure par convergence dominée.]

c. Montrer que u est indéfiniment différentiable sous le signe somme pour $t > 0, x \in \mathbb{R}$. Conclure.

[On pourra dominer les dérivées de g_t pour $0 < a \leq t \leq b$ et $|x| \leq A$, en observant que $(x - y)^2 \geq (y^2/2) - x^2$.]

d. *Complément.* On suppose de plus f intégrable sur \mathbb{R} . Montrer qu'alors

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|f\|_1$$

(donc u tend vers zéro uniformément sur \mathbb{R} quand $t \rightarrow +\infty$) et établir, si $\int_{\mathbb{R}} f \neq 0$, l'équivalent

$$u(t, x) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx .$$

[Appliquer le théorème de convergence dominée à $\sqrt{4\pi t} u(t, x)$.]

Exercice 27. *Sommation de Borel* ([P] p.211). On veut établir, sous diverses hypothèses, l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{t^n}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^\infty a_n , \quad (*)$$

où (a_n) est une suite donnée de nombres complexes.

a. Montrer (*) en supposant tous les a_n positifs, ou la série $\sum a_n$ absolument convergente ;

b. On suppose seulement la convergence de la série $A = \sum_{n=0}^\infty a_n$. On note $A_n = a_0 + \dots + a_n$ pour $n \geq 0$, $A_{-1} = 0$, $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{t^n}{n!}$, $F(x) = \sum_{n=0}^\infty A_{n-1} \frac{x^n}{n!}$. Sachant que A_n tend vers A , montrer que $e^{-x} F(x)$ tend vers A lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que $(e^{-x} F(x))' = e^{-x} f(x)$ et en déduire que $\int_0^x e^{-t} f(t) dt$ tend vers A , d'où (*).

c. En considérant l'exemple $a_n = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, montrer que, au premier membre de (*), l'intégrale peut avoir un sens même si $\sum a_n$ diverge. C'est le *procédé de sommation de Borel*, qui permet de donner un sens raisonnable à la somme de certaines séries divergentes.

Exercice 28. *Fonction hypergéométrique.* On donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $c > b > 0$. Soit

$$F(x) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt .$$

a. Montrer que F est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$.

[On pourra dominer les dérivées pour $0 \leq t \leq 1$ et $-A \leq x \leq 1 - \varepsilon$.]

b. On note

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) .$$

En utilisant l'exercice 19, établir le développement en série entière

$$F(x) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} , \text{ pour } |x| < 1 .$$

c. Montrer que F est, pour $x < 1$, solution de l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 .$$

[Si on note $D_x = x(1-x)\partial_x^2 + (c - (a+b+1)x)\partial_x - ab$, on vérifiera que

$$D_x \left(t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} \right) = -a \partial_t \left(t^b (1-t)^{c-b} (1-tx)^{-a-1} \right) .]$$

Exercice 29. *Méthode de Laplace* ([F] p.96-97, [Ro] p.339). Soient $[a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} (borné ou non, avec $a < b \leq \infty$), $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e^{-t\varphi} f$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a, b[$ pour un certain réel t_0 . On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$. On recherche un équivalent pour $t \rightarrow +\infty$ de l'intégrale

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx .$$

a. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x$, montrer que

$$F(t) \sim \frac{f(0)}{t} .$$

[On pourra couper en \int_0^α et \int_α^b , et étudier la première par convergence dominée.]

b. Si $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$, montrer que

$$F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{t} .$$

[On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y$ et utiliser **a.**]

c. Si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$, montrer que⁶

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{f(0)}{\sqrt{t}} .$$

[Même indication qu'en **a.**]

d. Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}} .$$

[On pourra effectuer le changement $\varphi(x) = \varphi(a) + y^2$ et utiliser **c.**]

e. *Application.* En déduire l'équivalent (*formule de Stirling*)

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t dx \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t} \text{ quand } t \rightarrow +\infty .$$

Exercice 30. *Méthode de Laplace, un exemple* ([dB] p.61). Soit à établir le développement asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} \ln(1+x+x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4t^{3/2}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{16t^{5/2}} + O(t^{-7/2}) .$$

a. Donner un développement limité à l'ordre 5 à l'origine de $\ln(1+x+x^2)$, sous la forme

$$\ln(1+x+x^2) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 + R(x)$$

et montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|R(x)| \leq Cx^6$.

[On pourra observer que $1+x+x^2 = (1-x^3)/(1-x)$.]

b. Montrer que⁷

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{t^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!t^{n+\frac{1}{2}}} .$$

⁶ Voir Note 2.

⁷ Voir Note 2.

Conclure.

Exercice 31. *Un résultat de type “phase stationnaire”* (cf. [F] p.101). Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} , de transformée de Fourier \widehat{f} intégrable. On cherche un équivalent de l’intégrale

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\lambda x^2} f(x) dx$$

lorsque le paramètre réel λ tend vers l’infini. En l’absence du facteur i , ceci pourrait être abordé par la méthode de Laplace (exercice 29.c); mais ce facteur rend l’étude un peu plus délicate.

a. Établir l’égalité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\omega x^2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2/\omega} \widehat{f}(t) dt$$

pour ω complexe, $\operatorname{Re}\omega > 0$.

[On pourra l’établir d’abord pour $\omega > 0$ en calculant comme à l’exercice 23.a; puis on prolongera au demi-plan $\operatorname{Re}\omega > 0$, avec un choix convenable d’une détermination de $\sqrt{\omega}$, en vérifiant que les deux membres définissent des fonctions holomorphes dans ce demi-plan].

b. En déduire

$$I(\lambda) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi t^2/\lambda} \widehat{f}(t) dt .$$

[On fera tendre ω vers $i\lambda$ en appliquant le théorème de convergence dominée].

e. On suppose de plus f bornée, continue à l’origine, et $t^2\widehat{f}(t)$ intégrable sur \mathbb{R} . Établir l’expression asymptotique, pour $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\lambda x^2} f(x) dx = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda}} f(0) + O(\lambda^{-3/2}) .$$

[On pourra utiliser l’exercice 23.b et l’inégalité $|e^{iu} - 1| \leq |u|$ pour $u \in \mathbb{R}$].

5 Intégrales semi-convergentes

Aucun des théorèmes précédents ne s’applique directement à une intégrale impropre à paramètre $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx$ *non absolument convergente*. Que faire? On a souvent recours à l’une ou l’autre des idées suivantes :

- intégrer par parties pour se ramener à une intégrale impropre absolument convergente, à qui on pourra appliquer les théorèmes de Lebesgue ou les théorèmes “intermédiaires”
- étudier les intégrales \int_a^b pour $\alpha < a < b < \beta$ par les théorèmes élémentaires, puis faire tendre a vers α et b vers β en cherchant à établir une convergence uniforme, par exemple à l’aide du théorème d’Abel.

Théorème 20 (théorème d’Abel) *Soient f une fonction positive sur $[a, b[$ (avec $a < b$) et g une fonction complexe sur $[a, b[$. On suppose que*

- (i) f est décroissante sur $[a, b[$ et tend vers 0 quand $x \rightarrow b$
- (ii) g est continue sur $[a, b[$ et il existe M , indépendant de x , tel que

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq M \text{ pour tout } x \in [a, b[.$$

Alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)g(x) dx$ converge, et

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq Mf(a) .$$

Lorsque f est continûment dérivable, comme il est fréquent en pratique, le théorème se démontre simplement par intégration par parties, en posant $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ ([F] p.91); sinon il résulte de la seconde formule de la moyenne ([LFA] p.467 et 497).

Le théorème d'Abel s'applique notamment aux *intégrales de type Fourier*, avec $g(t) = e^{i\lambda t}$ ou $\sin \lambda t$ ou $\cos \lambda t$; l'hypothèse (ii) est alors vérifiée, pour λ réel non nul, avec $M = 2/|\lambda|$.

Exercice corrigé, très classique, mais instructif ([F] p.93)! Soit à étudier et calculer l'intégrale, pour $t \geq 0$,

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

(transformée de Laplace de la fonction $\sin x/x$; cf. exercice 33).

a. Comme $|\sin x/x| \leq 1$ l'intégrale converge absolument pour chaque $t > 0$. Mais la semi-convergence pour $t = 0$ doit inciter à la prudence : pas question de dominer $|e^{-tx} \sin x/x|$ pour tout $t \geq 0$!

b. On peut toutefois dominer pour $t > \varepsilon > 0$: pour $k = 0, 1, 2, \dots$ on a

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \left(e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right) \right| = \left| x^k e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right| \leq x^k e^{-\varepsilon x} ,$$

fonction intégrable de 0 à ∞ , indépendante du paramètre t . Par suite (théorème 9 ou 17) F est indéfiniment dérivable sous le signe somme sur l'intervalle $]\varepsilon, \infty[$ pour chaque $\varepsilon > 0$, donc sur la réunion de ces intervalles, qui est $]0, \infty[$.

En particulier, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx = - \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{(i-t)x} dx \\ &= \operatorname{Im} \frac{1}{i-t} = - \frac{1}{1+t^2} , \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante C telle que

$$F(t) = C - \operatorname{arctg} t , \text{ pour tout } t > 0 . \quad (*)$$

c. Pour aller jusqu'en $t = 0$ on considère F comme limite des fonctions

$$F_n(t) = \int_0^n e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx ,$$

continues sur \mathbb{R} (théorème 2; elles y sont même indéfiniment dérivables, mais ce ne sera pas utile ici). Les F_n convergent vers F uniformément sur $[0, \infty[$ car on a, pour tout $t \geq 0$,

$$|F(t) - F_n(t)| = \left| \int_n^\infty \frac{e^{-tx}}{x} \sin x dx \right| \leq 2 \frac{e^{-nt}}{n} \leq \frac{2}{n} .$$

Cette inégalité résulte du théorème d'Abel, avec $f(x) = e^{-tx}/x$ (produit de deux fonctions décroissantes positives de x pour chaque $t \geq 0$), $g(x) = \sin x$, $M = 2$, $a = n$ et $b = \infty$.

Ainsi F , limite uniforme des F_n , est continue sur $[0, \infty[$. La nouveauté est la continuité en 0; en faisant tendre t vers 0 dans (*) on obtient

$$C = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx .$$

d. Cette valeur en 0 s'obtient ... en partant à l'infini : comme

$$|F(t)| \leq \int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$$

pour $t > 0$, on a d'après (*) $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = C - (\pi/2) = 0$, d'où finalement

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t , \text{ pour tout } t \geq 0 .$$

En particulier $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 32. *Spirale de Cornu.* Montrer que l'intégrale

$$z(t) = \int_0^t e^{iu^2/2} du$$

admet pour $t \rightarrow +\infty$ le développement asymptotique

$$z(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi/4} - \frac{i}{t} e^{it^2/2} \left[1 + \frac{1}{it^2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(it^2)^n} \right] + R_n(t) ,$$

avec $|R_n(t)| \leq 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1) t^{-2n-2}$.

[Le premier terme est donné par l'exercice 7 et la note 2; les suivants s'obtiendront en intégrant $n+1$ fois par parties \int_t^∞].

Le graphe de $t \mapsto z(t)$ dans le plan complexe est la superbe *spirale de Cornu* (ou *clothoïde*). On pourra l'admirer dans tout bon cours d'optique, au chapitre sur la diffraction.

Exercice 33. *Transformées de Laplace* ([L] p.237, [P] p.197-204). Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle transformée de Laplace de f l'intégrale (si elle converge)

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx ,$$

où t est une variable réelle.

a. On suppose l'intégrale $\int_0^\infty f(x) dx$ convergente (on n'a pas dit absolument convergente!). Montrer que φ est bien définie, et continue, sur $[0, \infty[$; en particulier

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) .$$

[En intégrant φ par parties, on pourra montrer que

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-u} F\left(\frac{u}{t}\right) du ,$$

où $F(x) = \int_0^x f$, et conclure par convergence dominée].

b*. Inversement, on fait l'hypothèse que $f(x) = o(1/x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on suppose la convergence de l'intégrale $\varphi(t)$ pour tout $t > 0$ et l'existence de la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \ell$. Établir la convergence de l'intégrale $\varphi(0)$ et l'égalité

$$\int_0^\infty f(x) dx = \ell ,$$

[On pourra montrer que

$$\left| \int_0^u f(x) dx - \varphi\left(\frac{1}{u}\right) \right| \leq \frac{1}{u} \int_0^u \frac{1 - e^{-(x/u)}}{(x/u)} |xf(x)| dx + \int_u^\infty e^{-(x/u)} |xf(x)| \frac{dx}{x},$$

puis faire tendre u vers l'infini].

L'exemple de $f(x) = \sin x$ montre la nécessité d'une hypothèse sur f pour obtenir le résultat de **b**.

Exercice 34. *Intégrale d'Airy* ([Ge] p.158 ; cf. [ZQ] p.325, 340, par une autre méthode). On veut montrer que l'intégrale

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(tx + \frac{x^3}{3}\right)} dx$$

définit une fonction C^∞ sur \mathbb{R} , et en donner une expression asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$. Pour ramener cette intégrale semi-convergente à une absolument convergente on va, plutôt que d'intégrer par parties, décaler l'intégration dans le plan complexe.

a. Vérifier l'égalité

$$f(t) = \int_{D_\lambda} e^{i\left(tz + \frac{z^3}{3}\right)} dz$$

pour tout $\lambda > 0$, où D_λ est la droite $\mathbb{R} + i\lambda$ du plan complexe.

[Appliquer le théorème de Cauchy sur le bord d'un rectangle $|\operatorname{Re} z| \leq A, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \lambda$].

b. En déduire que f est C^∞ sur \mathbb{R} et que, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f''(t) - tf(t) = 0.$$

c. Montrer que⁸, pour $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) \sim \sqrt{\pi} t^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}.$$

[On pourra poser $z = t^{-1/4}x + it^{1/2}$ dans **a**, et conclure par convergence dominée].

6 Intégration et dérivation

“L'intégration est l'opération inverse de la dérivation”. Cette assertion simpliste recouvre en fait les deux questions suivantes :

1. Si f est intégrable, la fonction $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ est-elle une primitive de f ? (i.e. F est-elle dérivable, et sa dérivée est-elle bien f ?)

2. Si g est dérivable, a-t-on $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x) dx$? (i.e. g' est-elle intégrable, et l'intégrale est-elle bien $g(b) - g(a)$?)

Il est bien connu que les réponses sont affirmatives si f est continue et si g est continûment dérivable. Que dire en dehors de ce cas ?

Références : [Ru] §7.16-7.21, [Gor] p.36 et p.57-61, [T] chap. XI.

Contre-exemple à 1. Une fonction en escalier non continue est intégrable, mais n'admet pas de primitive, car elle ne vérifie pas la propriété de la valeur intermédiaire (théorème de Darboux, [P] p.87).

Contre-exemple à 2 ([T] p.367). La fonction

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = 0$$

⁸Voir Note 2.

est dérivable en tout point (c'est un $O(x^2)$ à l'origine), mais sa dérivée

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[0, 1]$, car $2x \sin(1/x^2)$ est continue partout et l'intégrale

$$\int_0^1 \left| \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right| dx$$

diverge (changement de variable $t = 1/x^2$).

Contre-exemple à 2, bis ([Ru] §7.16, [T] p.366). La fonction g de Cantor-Lebesgue (ou "escalier du diable") est continue et croît de 0 à 1 sur $[0, 1]$; elle est aussi dérivable presque partout, de dérivée nulle. Donc g' est Lebesgue-intégrable, mais

$$g(1) - g(0) = 1 \neq \int_0^1 g'(x) dx = 0 .$$

On a cependant les deux résultats suivants.

Théorème 21 ([Gor] p.58, [Ru] Th.7.11, [T] p.362) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose f Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$. Alors la fonction

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

est continue sur $[a, b]$, dérivable presque partout, et $F'(t) = f(t)$ pour presque tout $t \in [a, b]$.

Théorème 22 ([Ru] Th.7.21, [T] p.368; cf. [Gor] p.104) On suppose g dérivable en tout point de $[a, b]$ et g' Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$. Alors

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x) dx .$$

Les contre-exemples précédents montrent l'importance des hypothèses. La preuve de ces théorèmes étant relativement délicate, on se contentera de montrer le théorème 22 sous des hypothèses plus fortes.

Preuve (partielle) du théorème 22 ([Gor] p.36, [V] p.139). Supposons g dérivable en tout point de $[a, b]$ (donc continue) et g' bornée : $|g'(x)| \leq M$ (donc intégrable sur $[a, b]$). On peut prolonger continûment g à droite de b par une fonction affine de dérivée $g'(b)$. Notons, pour n entier ≥ 1 ,

$$g_n(x) = n \left(g \left(x + \frac{1}{n} \right) - g(x) \right) .$$

Alors g_n est continue sur $[a, b]$, $g_n(x) \rightarrow g'(x)$ pour $a \leq x \leq b$ et $|g_n(x)| \leq M$ par l'inégalité des accroissements finis. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sous la forme

$$\begin{aligned} \int_a^b g'(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \lim_n \int_a^b g_n(x) dx \\ &= \lim_n n \int_a^b \left(g \left(x + \frac{1}{n} \right) - g(x) \right) dx \\ &= \lim_n \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} g(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} g(x) dx \right) \\ &= g(b) - g(a) \end{aligned}$$

(la dernière ligne s'obtient facilement grâce à la continuité de g) ; d'où le résultat.

À titre de complément, citons encore le résultat suivant.

Théorème 23 ([Gor] p.57, [T] p.361) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Si g est une fonction croissante sur $[a, b]$, elle y est dérivable presque partout, sa dérivée g' est Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b g'(x) dx \leq g(b) - g(a) .$$

L'exemple de la fonction de Cantor-Lebesgue montre que l'inégalité peut être stricte.

Preuve (partielle) du théorème 23. Admettons la dérivabilité presque partout ([Gor] p.55, [RN] p.5, [T] p.358). On peut prolonger g à droite de b par $g(x) = g(b)$ pour $x > b$. Soit à nouveau, pour $n \geq 1$,

$$g_n(x) = n \left(g \left(x + \frac{1}{n} \right) - g(x) \right) .$$

Alors, comme précédemment,

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n(x) dx &= n \int_b^{b+\frac{1}{n}} g(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} g(x) dx \\ &\leq g(b) - g(a) \end{aligned}$$

puisque $g(x) = g(b)$ pour $x \geq b$ et $g(x) \geq g(a)$ pour $x \geq a$. La suite (g_n) de fonctions positives converge vers g' presque partout sur $[a, b]$ d'où, par le lemme de Fatou (théorème 11),

$$0 \leq \int_a^b g'(x) dx = \int_a^b \lim_n g_n(x) dx \leq \liminf_n \int_a^b g_n(x) dx \leq g(b) - g(a) ,$$

et le résultat annoncé.

Références

- [B] BUCHWALTER, *Le calcul intégral*, Ellipses 1991
- [C] CANDELPERGER, *Cours de calcul intégral*, Cassini (à paraître)
- [dB] de BRUIJN, *Asymptotic methods in analysis*, Dover 1981
- [D] DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Hermann 1968, chapitres III et IV
- [F] FARAUT, *Calcul intégral*, Belin 2000, chapitre VII
- [Ge] GEORGE, *Exercices et problèmes d'intégration*, Gauthier-Villars 1980
- [Gor] GORDON, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Amer. Math. Soc. 1994
- [Gou] GOURDON, *Les maths. en tête, Analyse*, Ellipses 1994
- [Gr] GRAMAIN, *Intégration*, Hermann 1988
- [KV] KRÉE et VAUTHIER, *Mathématiques 2ème année*, Eska 1987
- [L] LEICHTNAM, *Exercices corrigés de mathématiques, analyse*, Ellipses 2000
- [LFA] LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2, Analyse*, Dunod 1996
- [P] POMMELLET, *Agrégation de mathématiques, cours d'analyse*, Ellipses 1994
- [RN] RIESZ et NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars 1965.
- [Ro] ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel*, 2ème édition, Cassini 2003
- [Ru] RUDIN, *Real and complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill 1987

- [S] SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann 1965
[T] TITCHMARSH, *The theory of functions*, 2nd edition, Oxford University Press 1983
[V] VALIRON, *Théorie des fonctions*, Masson 1990
[ZQ] ZUILY et QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson 1995, chapitre 9.