L'analemme

François Rouvière

2 avril 2021

Introduction

L'**analemme**, c'est cette figure en forme de 8 que dessinent dans le ciel des photographies successives du Soleil, prises en un lieu donné au cours d'une année, toujours à la même heure. Les page web [1] et [7] en donnent des exemples. Les changements de hauteur de notre étoile selon la saison nous sont familiers. Mais l'avance ou le retard de son passage au méridien, qui peut aller jusqu'à ± 15 minutes environ à certaines époques de l'année, sont beaucoup moins connus. C'est la combinaison de ces deux effets qui dessine l'analemme.

À cela deux causes :

- l'axe de rotation de la Terre sur elle-même n'est pas perpendiculaire au plan de son orbite autour du Soleil, mais incliné d'un angle de $23°26'$
- l'orbite de la Terre autour du Soleil n'est pas exactement un cercle parcouru d'un mouvement uniforme, mais une ellipse parcourue selon la loi des aires (lois de Kepler).

Nous détaillons ici les équations qui décrivent l'analemme, en commençant par analyser l'effet de la seule inclinaison (§2). On peut alors donner des formules exactes entièrement explicites. Ensuite, l'introduction de l'excentricité e au §3 conduit à des équations plus compliquées, dont nous ne donnerons que des solutions approchées, valables pour de faibles valeurs de l'excentricité ($e = 0,0167$ pour la Terre).

Notations

La **Figure 1** représente la **sphère céleste**. Son centre T est la Terre et, par commodité, son rayon est pris pour unité ; la longueur d'un arc de grand cercle est alors égale à la mesure en radians de l'angle au centre correspondant. Cette sphère permet de représenter la direction des objets célestes, vus de la Terre : le vecteur $\overrightarrow{TS}$ donne la direction du Soleil S.

L'**équateur céleste** est le grand cercle de cette sphère situé dans le plan de l'équateur terrestre.

L'**écliptique** est le grand cercle de la sphère céleste situé dans le plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil. Vu de la Terre, le Soleil se déplace sur l'écliptique, dont il effectue le tour en un an.

FIG. 1 – La sphère céleste.

Le plan de l'écliptique est incliné par rapport à celui de l'équateur d'un angle $\varepsilon = 23°26' = 23,44° = 0,409$ radian, appelé **inclinaison** (ou obliquité) de l'axe terrestre. Dans nos calculs théoriques ε sera un nombre tel que[1] $0 \leq \varepsilon < \pi/2$.

γ, le **point gamma**, qui donne la direction du Soleil à l'équinoxe de printemps, est l'un des deux points d'intersection de l'écliptique avec l'équateur céleste. L'autre, opposé à γ, donne la direction du Soleil à l'équinoxe d'automne.

[1] Dans la suite tous les angles sont exprimés en radians. Nous ne reviendrons aux degrés que pour les exemples numériques.

N est le pôle nord céleste ; la droite TN est l'axe de rotation de la Terre. L'arc de grand cercle NS est le **méridien** du Soleil ; il coupe l'équateur céleste en un point S'.
L'espace $\mathbb{R}^3$ (euclidien orienté) est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ associé à l'équateur et au pôle nord, avec $\mathbf{i} = \overrightarrow{T\gamma}$ et $\mathbf{k} = \overrightarrow{TN}$.
Nous utiliserons aussi le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ associé à l'écliptique et à son pôle P, avec $\mathbf{i} = \overrightarrow{T\gamma}$, $\mathbf{j}' = (\cos\varepsilon)\mathbf{j} + (\sin\varepsilon)\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}' = \overrightarrow{TP} = -(\sin\varepsilon)\mathbf{j} + (\cos\varepsilon)\mathbf{k}$. Le plan de l'équateur est orienté par le vecteur $\mathbf{k}$, celui de l'écliptique par $\mathbf{k}'$.
Les coordonnées équatoriales α et δ du Soleil S donnent la position du Soleil par rapport au fond du ciel des étoiles "fixes" : l'**ascension droite** est $\alpha = \left(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TS'}\right)$, angle de vecteurs qui mesure l'arc $\gamma S'$ sur l'équateur, la **déclinaison** est $\delta = \left(\overrightarrow{TS'}, \overrightarrow{TS}\right)$ qui mesure l'arc $S'S$ sur le méridien du Soleil. La déclinaison est nulle aux équinoxes. En un lieu de latitude λ sur la Terre, la hauteur maximale du Soleil au cours d'une journée est $90° - \lambda + \delta$ (si les angles sont mesurés en degrés).
La **longitude écliptique** du Soleil $l = \left(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TS}\right)$ mesure l'arc γS parcouru sur l'écliptique à partir de l'équinoxe de printemps.

1 L'«équation du temps»

En l'absence d'inclinaison ($\varepsilon = 0$) il n'y aurait pas de saisons sur Terre. Si de plus l'orbite terrestre autour du Soleil était rigoureusement circulaire (et non une ellipse), parcourue d'un mouvement uniforme, le Soleil serait toujours à la même position dans le ciel à une heure donnée (par exemple 12 h 00 à notre montre). L'analemme se réduirait à un point. Appelons **Soleil moyen** et notons S_m ce Soleil fictif. Pour comprendre l'analemme nous allons comparer la position du **Soleil vrai** S à celle du Soleil moyen S_m à chaque instant d'une année.

1.1 Coordonnées équatoriales du Soleil vrai

À un instant donné la position du Soleil vrai S est définie par sa longitude l sur l'écliptique, d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TS} &= (\cos l)\mathbf{i} + (\sin l)\mathbf{j}' \\ &= (\cos l)\mathbf{i} + (\cos\varepsilon\sin l)\mathbf{j} + (\sin\varepsilon\sin l)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

On a par ailleurs $\overrightarrow{TS} = (\cos\delta)\overrightarrow{TS'} + (\sin\delta)\mathbf{k}$ dans le plan méridien du Soleil et $\overrightarrow{TS'} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\sin\alpha)\mathbf{j}$ dans le plan de l'équateur, d'où la position de S en fonction de ses coordonnées équatoriales

$$\overrightarrow{TS} = (\cos\delta\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\delta\sin\alpha)\mathbf{j} + (\sin\delta)\mathbf{k}$$

et, en comparant nos deux expressions de $\overrightarrow{TS}$,

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos l \ , \ \cos\delta\sin\alpha = \cos\varepsilon\sin l \ , \ \sin\delta = \sin\varepsilon\sin l.$$

Dégageons les formules utiles pour la suite. La dernière équation

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin l, \tag{1}$$

donne la déclinaison δ en fonction de l. On voit que δ varie de $-\varepsilon$ à ε au cours de l'année et s'annule aux équinoxes ($l = 0$ ou π). On a donc toujours $\cos\delta \geq \cos\varepsilon > 0$, ce qui permet d'écrire

$$\cos\alpha = \frac{\cos l}{\cos\delta} \ , \ \sin\alpha = \frac{\cos\varepsilon\sin l}{\cos\delta}, \tag{2}$$

d'où on tire facilement

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon \sin\alpha \ , \ \operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon \operatorname{tg} l. \tag{3}$$

La première de ces équations relie directement ascension droite et déclinaison du Soleil. La seconde (valable pour $\cos l \neq 0$) donne l'ascension droite en fonction de la longitude écliptique l, elle-même fonction du temps.

En différentiant (3) on obtient $d\alpha/\cos^2\alpha = \cos\varepsilon \ dl/\cos^2 l$ soit, d'après (2) et (1),

$$\cos\varepsilon \ dl = \cos^2\delta \ d\alpha = (1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 l)d\alpha. \tag{4}$$

Sous cette forme, l'égalité reste valable pour $\cos l = 0$. Ainsi $d\alpha/dl$ varie de $\cos\varepsilon$ aux équinoxes ($l = 0$ ou π, $\delta = 0$) jusqu'à $1/\cos\varepsilon$ aux solstices ($l = \pm\pi/2$, $\delta = \pm\varepsilon$). La **Figure 2** illustre ces deux cas.

En notant $q := \operatorname{tg}^2(\varepsilon/2)$, on a $\cos\varepsilon = (1-q)/(1+q)$ et il vient, après quelques transformations faciles,

$$d\alpha = \frac{1-q^2}{1+2q\cos 2l + q^2} dl. \tag{5}$$

FIG. 2 – Le rapport $d\alpha/dl$ varie au cours de l'année. Il vaut $\cos\varepsilon$ aux équinoxes, $1/\cos\varepsilon$ aux solstices.

1.2 Développements en série

Les équations (1) et (3) conduisent à d'intéressants développements en série des coordonnées équatoriales du Soleil selon les puissances de $\sin\varepsilon$ ou de $\operatorname{tg}^2\varepsilon/2$, valables pour toute valeur de l et pour $0 \le \varepsilon < \pi/2$ (les angles étant exprimés en radians) :

$$\alpha = l + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{n} \sin 2nl \ , \text{ avec } q := \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } s := \sin\varepsilon, \tag{6}$$

$$\delta = s\sin l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} s^{2n+1}\sin^{2n+1} l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} s^{2n+1}\sin^{2n+1} l. \tag{7}$$

Pour établir (6) on part de (3) $\operatorname{tg}\alpha = \cos\varepsilon\operatorname{tg} l$ (valable pour $\cos l \neq 0$) avec $\cos\varepsilon = (1-q)/(1+q)$. D'abord

$$\operatorname{tg}(\alpha - l) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} l}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} l} = \frac{(\cos\varepsilon - 1)\operatorname{tg} l}{1 + \cos\varepsilon\operatorname{tg}^2 l} = -\frac{q\sin 2l}{1 + q\cos 2l}. \tag{8}$$

Pour $|q| < 1$ cette dernière expression est valable pour tout l et donne

$$\alpha = l - \operatorname{arctg}\left(\frac{q\sin 2l}{1+q\cos 2l}\right).$$

La dérivée par rapport à q est

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dq} &= \frac{-\sin 2l}{1+2q\cos 2l+q^2} = -\operatorname{Im}\frac{e^{2il}}{1+qe^{2il}} = -\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n e^{2i(n+1)l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n-1}\sin 2nl,\end{aligned}$$

d'où (6) en intégrant de 0 à q.
Le développement (7) s'obtient de même à partir de (1) $\delta = \arcsin(s \sin l)$. La dérivée par rapport à s est, en utilisant la classique série binomiale,

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\sin l}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 l}} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} s^{2n} \sin^{2n} l\right) \sin l,$$

d'où le résultat en intégrant de 0 à s.
En n'écrivant que les deux premiers termes de ces développements on obtient les expressions approchées (en radians) pour ε assez petit

$$\alpha = l - q \sin 2l + \frac{q^2}{2} \sin 4l + \cdots \ , \ \delta = s \sin l + \frac{s^3}{6} \sin^3 l + \cdots \tag{9}$$

Revenons aux angles mesurés en degrés, avec 1 radian $= 180°/\pi \simeq 57,296°$. Pour $\varepsilon = 23,44°$ on a $q \simeq 0,043$ et $s \simeq 0,398$, d'où

$$\alpha = l - 2,466° \sin 2l + 0,053° \sin 4l - \cdots \ , \ \delta = 22,792° \sin l + 0,601° \sin^3 l + \cdots$$

1.3 Du Soleil moyen au Soleil vrai

Pour compléter les équations précédentes, purement géométriques, on doit prendre en compte la façon dont la longitude l dépend du temps t, ce qui est donné par la Mécanique Céleste.

Par définition même, le Soleil moyen S_m est un point fictif qui décrit l'équateur (et non l'écliptique) d'un mouvement uniforme, de période 1 an. Sa déclinaison est constamment nulle et son ascension droite est $\alpha_m = \omega t$, où $\omega = 2\pi/365,25$ j est la vitesse de rotation (un tour par an) et t le temps, compté en jours à partir de l'équinoxe de printemps. Ainsi

$$\overrightarrow{TS_m} = (\cos \omega t)\mathbf{i} + (\sin \omega t)\mathbf{j}. \tag{10}$$

L'écart entre le Soleil moyen S_m et le Soleil vrai S est défini par deux angles, la différence d'ascension droite

$$\beta := \left(\overrightarrow{TS_m}, \overrightarrow{TS'}\right) = \alpha - \alpha_m = \alpha - \omega t$$

et la déclinaison δ du Soleil vrai donnée par (1). En reportant les expressions (2) de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ dans le développement de $\cos \beta$ et $\sin \beta$ on obtient, avec $q = \mathrm{tg}^2(\varepsilon/2)$,

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1}{\cos \delta} \left(\cos(l - \omega t) - \frac{2q}{1+q} \sin l \sin \omega t\right) \\ \sin \beta &= \frac{1}{\cos \delta} \left(\sin(l - \omega t) - \frac{2q}{1+q} \sin l \cos \omega t\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Les variations de la déclinaison δ données par (1) expliquent les changements de hauteur du Soleil selon les saisons. Elles nous sont familières, mais celles de β le sont moins. Si on observe le ciel chaque jour à la même heure (donnée par nos montres), le Soleil moyen sera toujours à la même position dans le ciel tandis que le Soleil vrai sera, selon l'époque de l'année, plus haut ou plus bas (variations de δ) et un peu plus à l'ouest ou plus à l'est (variations de β). Appelons **midi vrai** l'heure de passage du Soleil dans la direction du sud (c'est aussi l'instant auquel il est le plus haut dans le ciel) et **midi moyen** l'heure correspondante pour le Soleil moyen. Midi moyen est le 12 h 00 de nos montres, corrigé d'un décalage constant dû à la longitude du lieu d'observation sur Terre et à un éventuel choix entre heure d'hiver et heure d'été. La différence (midi vrai − midi moyen) est traditionnellement appelée l'«**équation du temps**». C'est notre β à une constante additive près, après conversion des angles en minutes de temps.

L'angle l, qui donne la direction du Soleil vrai, étant une fonction connue du temps t, donnée par la Mécanique Céleste, les équations (1) et (11) donnent une représentation paramétrique (en fonction de t) d'une courbe de la sphère céleste appelée **analemme**. On aurait $\delta = \beta = 0$ si $\varepsilon = 0$ et $l = \omega t$; Soleil vrai et Soleil moyen coïncideraient. Le décalage entre eux, qui produit l'analemme, vient de l'inclinaison de l'axe terrestre ($\varepsilon \neq 0$) et aussi de l'excentricité e de l'orbite de la Terre : d'après la deuxième loi de Kepler l n'est pas exactement une fonction linéaire du temps (voir §3). Ignorant cela dans un premier temps, nous commencerons par analyser l'effet de l'inclinaison seule en supposant que l'orbite terrestre est circulaire ($\varepsilon \neq 0$ et $e = 0$).

2 L'analemme (cas d'une orbite circulaire)

Dans tout ce paragraphe nous supposons que l'orbite terrestre est exactement circulaire, au lieu de l'ellipse de faible excentricité qu'elle est en réalité. Elle est alors parcourue d'un mouvement circulaire uniforme, de période 1 an. Vu de la Terre en T, c'est le Soleil qui est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme sur l'écliptique, de période 1 an ; sa longitude écliptique est $l = \omega t$ avec les notations du paragraphe précédent. Pour éviter les confusions avec le cas général étudié au §3 nous noterons $\overline{\beta}$ et $\overline{\delta}$ les valeurs de β et δ ainsi obtenues pour une orbite circulaire.

Il est alors facile de visualiser l'angle $\overline{\beta} = \left(\overrightarrow{TS_m}, \overrightarrow{TS'}\right) = \alpha - l$. Les arcs de cercle γS (sur l'écliptique) et γS_m (sur l'équateur) ayant ici même longueur l, les points S et S_m appartiennent à un cercle de centre γ et rayon l tracé sur la sphère. Ce cercle, d'axe $T\gamma$, est situé dans un plan perpendiculaire à $T\gamma$. En projection sur le plan de l'équateur (**Figure 3**), il se projette selon un segment de droite perpendiculaire à $T\gamma$, d'où la construction de $\overline{\beta}$: le point S_m de l'équateur étant défini par l'angle $(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TS_m}) = l = \omega t$, la perpendiculaire menée de S_m à $T\gamma$ coupe l'ellipse (projection de l'écliptique) en un point qui est la projection de S, d'où le point S' sur le cercle. L'angle cherché est $\overline{\beta} = (\overrightarrow{TS_m}, \overrightarrow{TS'})$. On voit sur la figure qu'il est négatif entre l'équinoxe de printemps et le solstice d'été (le Soleil vrai est en avance sur le Soleil moyen), positif ensuite jusqu'à l'équinoxe d'automne (le Soleil vrai est en retard sur le Soleil moyen), et nul aux équinoxes et solstices.

FIG. 3 – Projection orthogonale sur le plan de l'équateur (cas d'une orbite terrestre circulaire).

Comme on a ici $l = \omega t$ les équations (1) et (11) qui définissent l'analemme se réduisent à

$$\sin \overline{\delta} = \sin \varepsilon \sin l$$

$$\cos \overline{\beta} = \frac{1 + q \cos 2l}{(1+q)\cos \delta}$$

$$\sin \overline{\beta} = -\frac{q \sin 2l}{(1+q)\cos \delta}.$$

Nous avons déjà observé que $\cos \overline{\delta} > 0$ d'après la première équation. Comme $0 \leq \varepsilon/2 < \pi/4$ on a $0 \leq q < 1$ et la deuxième équation montre que $\cos \overline{\beta} > 0$ d'où $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. L'analemme est alors entièrement défini par les deux équations, avec $q = \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2}$ et $l = \omega t$,

$$\sin \overline{\delta} = \sin \varepsilon \sin l \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \overline{\beta} = -\frac{q \sin 2l}{1 + q \cos 2l}; \tag{13}$$

la seconde a déjà été obtenue en (8). En éliminant l entre ces deux équations on en déduit, après quelques calculs,

$$4 \sin^2 \overline{\beta} = (1+q)^2 \sin^2 \overline{\delta} - (1-q)^2 \operatorname{tg}^2 \overline{\delta} = (1+q)^2 (\cos^2 \overline{\delta} - \cos^2 \varepsilon) \operatorname{tg}^2 \overline{\delta}.$$

Description de l'analemme (cas d'une orbite circulaire)

Les équations (12) et (13) donnent une représentation paramétrique de l'analemme au moyen du paramètre l, qui est ici proportionnel au temps : $l = \omega t$.
La déclinaison $\overline{\delta}(l)$ varie de $-\varepsilon$ (solstice d'hiver) à ε (solstice d'été), périodiquement de période 1 an. Elle s'annule deux fois par an, aux équinoxes ($\sin l = 0$).
La fonction $\overline{\beta}(l)$ est périodique de période 6 mois. Elle s'annule quatre fois par an, aux équinoxes et aux solstices ($\sin 2l = 0$). Pour étudier ses variations, calculons la dérivée

$$\frac{d\overline{\beta}}{dl} = \frac{d\alpha}{dl} - 1 = -2q\frac{\cos 2l + q}{1 + 2q\cos 2l + q^2} \tag{14}$$

d'après (5). Cette dérivée s'annule lorsque $\cos 2l = -q = -\operatorname{tg}^2(\varepsilon/2)$; comme $\cos\varepsilon = (1-q)/(1+q)$ cela s'écrit aussi $\operatorname{tg}^2 l = 1/\cos\varepsilon$. Des calculs élémentaires à partir de (12) et (13) permettent de vérifier qu'on a alors

$$\sin\overline{\beta} = \pm q\ ,\ \sin\overline{\delta} = \pm\sqrt{1-\cos\varepsilon}\ ,\ \cos\overline{\delta} = \sqrt{\cos\varepsilon} \text{ lorsque } \frac{d\overline{\beta}}{dl} = 0.$$

Pour $\varepsilon = 23{,}44°$ on a $q \simeq 0{,}043$ et on obtient ainsi, en résolvant l'équation $\operatorname{tg} l = \pm 1/\sqrt{\cos\varepsilon}$ avec $0° \leq l \leq 360°$, les valeurs numériques

$$\begin{aligned} l &\simeq 46{,}233°\ ,\ 133{,}767°\ ,\ 226{,}233°\ ,\ 313{,}767° \\ \overline{\beta}_\pm &\simeq \pm 2{,}466°\ ,\ \overline{\delta}_\pm \simeq \pm 16{,}692°, \end{aligned}$$

qui donnent les maxima et minima de $\overline{\beta}$, atteints aux quatre points A, B, C, D de la **Figure 4**.

FIG. 4 – L'analemme (cas d'une orbite circulaire)

Comme $l = \omega t$ avec la vitesse de rotation $\omega = 360/365{,}25$ degrés par jour, les dates correspondantes sont

$$t \simeq 46{,}907 \text{ j},\ \ 135{,}718 \text{ j},\ \ 229{,}532 \text{ j},\ \ 318{,}343 \text{ j},$$

comptées en jours à partir de l'instant de l'équinoxe de printemps. Traduites en minutes de temps ($1°$ correspondant à 4 minutes puisque $360°$ corespondent à 24×60 minutes), les valeurs obtenues de $\overline{\beta}$ signifient qu'à ces quatre dates le Soleil vrai est en avance ou en retard de $9{,}864$ minutes (soit 9 min 52 s) par rapport au Soleil moyen. Ce sont les valeurs extrêmes de l'équation du temps dans la situation considérée ici. L'analemme a une forme de 8 parfaitement symétrique ; il s'inscrit dans un rectangle de côtés 2ε et $2\overline{\beta}_+$, soit un peu moins de $47° \times 5°$.
La courbe passe deux fois par l'origine : on a $\overline{\delta} = \overline{\beta} = 0$ pour $l = 0$ (équinoxe de printemps) et pour $l = \pi$ (équinoxe d'automne). Pour préciser le dessin, on peut déterminer les tangentes en ce point double à l'origine, données par les dérivées $d\overline{\delta}/dl$ et $d\overline{\beta}/dl$. Pour $l = 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\delta}}{dl} &= \sin\varepsilon = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{d\overline{\beta}}{dl} &= -2q\frac{1+q}{1+2q+q^2} = -\frac{2q}{1+q} = -2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

en utilisant (12) et (14), d'où

$$\frac{d\overline{\beta}}{d\overline{\delta}} = -\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \text{ lorsque } l = 0.$$

La seconde tangente à l'origine s'en déduit par symétrie. L'angle de ces deux tangentes est donc égal à l'inclinaison ε de l'écliptique sur l'équateur.

3 Effet de l'ellipticité de l'orbite terrestre

3.1 Mouvement sur une orbite elliptique

D'après les lois de Kepler on sait qu'en réalité l'orbite de la Terre autour du Soleil n'est pas exactement un cercle, mais une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. Le point S de la sphère céleste, qui donne la direction du Soleil, ne tourne pas d'un mouvement uniforme sur l'écliptique. Il obéit à la loi des aires : sa longitude écliptique l n'est plus proportionnelle au temps, elle varie plus rapidement lorsque le Soleil est proche de la Terre (le périhélie a lieu début janvier) et plus lentement lorsqu'il en est plus éloigné (l'aphélie a lieu début juillet).

La différence $\Delta l = l - \omega t$ de (11), qui n'est plus identiquement nulle, entraîne une déformation de l'analemme obtenu précédemment. Pour la calculer, reprenons les lois de Kepler. Nous nous intéressons ici au mouvement du Soleil S par rapport à la Terre T, il sera donc commode de placer l'origine en T plutôt qu'en S commme on le fait habituellement. L'orbite du Soleil autour de la Terre est ainsi une ellipse de foyer T, de centre O, de demi-grand axe $a = OA$, de demi-petit axe b et d'excentricité $e = c/a$ avec $c = OT = \sqrt{a^2 - b^2}$ (voir **Figure 5**). Les coordonnées polaires (r, θ) de S dans un référentiel d'origine T sont liées à l'angle au centre u par

$$\begin{aligned} a \cos u &= c + r \cos \theta \\ b \sin u &= r \sin \theta. \end{aligned} \tag{15}$$

En A on a $u = \theta = 0$; c'est le point de l'orbite le plus proche de la Terre (périgée). La loi des aires

FIG. 5 – L'ellipse de Kepler : $OA = OA' = a$, $OB = b$, $OT = c$, $TS = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (a\cos u - c, b\sin u)$.

$r^2 d\theta/dt = C$ (constante) se traduit par l'**équation de Kepler**

$$u - e \sin u = \omega(t - t_0), \tag{16}$$

(où $\omega = C/ab$ et t_0 est une constante) qui détermine l'angle u, d'où r et θ en fonction du temps par (15). Pour $t = t_0$ on a $u = \theta = 0$, donc t_0 est l'instant de passage de la Terre au périhélie A (début janvier) ; rappelons que nous avons pris pour $t = 0$ l'instant de l'équinoxe de printemps (20 ou 21 mars). On peut résoudre (16) par un développement en série selon les puissances de e (voir [2] p. 172 ou [6] p. 263) mais, l'excentricité étant faible pour la Terre ($e = 1,67\%$), nous ne garderons ici que les termes du premier ordre en e. Notons $\tau := \omega(t - t_0)$ pour abréger et $O(e^2)$ les termes d'ordre au moins 2 par rapport à e. D'après l'équation de Kepler on a

$$u = \tau + e \sin u = \tau + e \sin(\tau + e \sin u) = \tau + e \sin \tau + O(e^2), \tag{17}$$

d'où

$$\sin u = \sin \tau + e \sin \tau \cos \tau + O(e^2) \ , \ \cos u = \cos \tau - e \sin^2 \tau + O(e^2).$$

En calculant $r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2$ grâce à (15) on obtient $r = a(1 - e\cos u)$ et la loi des aires s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{C}{\omega r^2} &= \frac{ab}{a^2(1 - e\cos u)^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e\cos u)^2} \\ &= 1 + 2e\cos u + O(e^2) = 1 + 2e\cos\tau + O(e^2). \end{aligned}$$

Par suite, en intégrant de 0 à τ,

$$\theta = \tau + 2e \sin \tau + O(e^2) \text{ avec } \tau = \omega(t - t_0). \tag{18}$$

3.2 L'analemme (cas général)

La direction du Soleil vu de la Terre est donnée par sa longitude écliptique

$$\begin{aligned} l &= \left(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TS}\right) = \left(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TA}\right) + \left(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TS}\right) \\ &= l_0 + \theta, \end{aligned}$$

en notant $l_0 := \left(\overrightarrow{T\gamma}, \overrightarrow{TA}\right)$ la longitude écliptique du périgée A. Récapitulons :

- pour $t = t_0$ le Soleil est en A (périgée), avec $\tau = 0$, $l = l_0$ et $\theta = 0$
- pour $t = 0$ le Soleil est au point γ (équinoxe de printemps), avec $\tau = -\omega t_0$, $l = l_0 + \theta = 0$ d'où, d'après (18),

$$l_0 = \omega t_0 + 2e \sin \omega t_0 + O(e^2). \tag{19}$$

La correction de longitude écliptique du Soleil due à l'ellipticité de l'orbite terrestre est donc

$$\begin{aligned} \Delta l &= l - \omega t = (\theta - \tau) + (l_0 - \omega t_0) \\ &= 2e\left(\sin \omega(t - t_0) + \sin \omega t_0\right) + O(e^2) \end{aligned} \tag{20}$$

d'après (18) ; elle est de l'ordre de e.
Les équations (11) donnent l'angle $\beta := \alpha - \omega t$ par

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{(1+q)\sin \Delta l - 2q \sin(\omega t + \Delta l)\cos \omega t}{(1+q)\cos \Delta l - 2q \sin(\omega t + \Delta l)\sin \omega t} \\ &= \frac{-q \sin 2\omega t}{1 + q\cos 2\omega t} + \frac{1-q^2}{(1+q\cos 2\omega t)^2}\Delta l + O((\Delta l)^2) \\ &= \operatorname{tg} \overline{\beta} + \frac{1-q^2}{(1+q\cos 2\omega t)^2}\Delta l + O((\Delta l)^2), \end{aligned}$$

après quelques calculs élémentaires de développements limités, avec $q = \operatorname{tg}^2(\varepsilon/2)$. On reconnaît ici l'angle $\overline{\beta}$ obtenu en (13) dans le cas où $e = 0$ et $\Delta l = 0$. Par suite, en développant la fonction arctg au voisinage de $\overline{\beta}$,

$$\begin{aligned} \beta &= \overline{\beta} + \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \overline{\beta}\right)} \frac{1-q^2}{(1+q\cos 2\omega t)^2}\Delta l + O((\Delta l)^2) \\ &= \overline{\beta} + \frac{1-q^2}{1 + 2q\cos 2\omega t + q^2}\Delta l + O((\Delta l)^2) \end{aligned}$$

et finalement, en reportant l'expression (20) de Δl,

$$\beta = \overline{\beta} + 2e\frac{(1-q^2)}{1 + 2q\cos 2\omega t + q^2}\left(\sin \omega(t - t_0) + \sin \omega t_0\right) + O(e^2). \tag{21}$$

Rappelons que $\overline{\beta}$ est la fonction β étudiée au §2 et que, par définition de β, l'ascension droite du Soleil vrai est $\alpha = \beta + \omega t$.
Un calcul analogue à partir de (1) $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin(\omega t + \Delta l)$ donne sa déclinaison

$$\delta = \overline{\delta} + 2e\frac{\sin \varepsilon \cos \omega t}{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \omega t}}\left(\sin \omega(t - t_0) + \sin \omega t_0\right) + O(e^2), \tag{22}$$

$\overline{\delta}$ étant la déclinaison pour $e = 0$, donnée par $\sin \overline{\delta} = \sin \varepsilon \sin \omega t$ et étudiée au §2.

Pour passer à des formules approchées plus maniables, remplaçons $\overline{\beta}$ et $\overline{\delta}$ par leurs développements (9) avec $l = \omega t$

$$\overline{\beta} = -q \sin 2\omega t + O(q^2)\ ,\ \overline{\delta} = \sin \varepsilon \sin \omega t + O(\sin^3 \varepsilon)$$

et développons selon q et $\sin\varepsilon$ les termes correctifs de (21) et (22). Il vient

$$\beta = -q\sin 2\omega t + 2e(\sin\omega(t-t_0) + \sin\omega t_0) + O((e+q)^2) \tag{23}$$

$$\delta = \sin\varepsilon\sin\omega t + 2e(\sin\omega(t-t_0) + \sin\omega t_0)\sin\varepsilon\cos\omega t + O(e^2) + O(e\sin^3\varepsilon), \tag{24}$$

où $O((e+q)^2)$ englobe des termes de la forme $O(e^2)$, $O(eq)$ et $O(q^2)$. Ces expressions simplifiées mettent en évidence le rôle de l'inclinaison (premiers termes, de période 6 mois pour β et 1 an pour δ) et celui de l'excentricité (seconds termes, de période 1 an).
En l'absence d'inclinaison ($\varepsilon = 0$) on aurait $q = 0$, $\overline{\beta} = \overline{\delta} = 0$ d'où

$$\beta = 2e\left(\sin\omega(t-t_0) + \sin\omega t_0\right) + O(e^2) \text{ et } \delta = 0 \text{ , si } \varepsilon = 0.$$

L'analemme se réduirait à un intervalle de longueur approximative $4e$ sur l'équateur céleste, décrit d'un mouvement périodique sinusoïdal de période 1 an.
Le logiciel [4] permet de tracer l'analemme pour toute valeur donnée de l'inclinaison, de l'excentricité et de l'instant t_0 du périgée. On peut ainsi comparer l'analemme terrestre à celui des autres planètes.

Remarque. Dans les livres [2] p. 65 et [5] p. 90-91 interviennent les expressions

$$\begin{aligned} R &= \alpha - l \\ &= -q\sin 2l + O(q^2), \end{aligned}$$

appelée *réduction à l'équateur*, ainsi que

$$\begin{aligned} C &= \theta - \tau = (l - \omega t) - (l_0 - \omega t_0) \\ &= 2e\sin\tau + O(e^2), \end{aligned}$$

appelée *équation du centre*, et l'*équation du temps* $E = C + R$. On a ainsi, compte tenu de (19) et (23),

$$\begin{aligned} E &= \beta - (l_0 - \omega t_0) \\ &= -q\sin 2\omega t + 2e\sin\omega(t-t_0) + O((e+q)^2). \end{aligned}$$

Références

[1] Ayomiamitis, A., *Analemmas*, http ://www.perseus.gr/Astro-Solar-Analemma.htm

[2] Danjon, A., *Astronomie générale*, Blanchard 1980.

[3] Holbrow, C. H., *Build your own analemma*, arXiv :1302.0765 (Feb. 2013).

[4] Mandavgane A., *Analemma generator*, https ://alokm.com/astro/analemmagenerator.html

[5] Pascoli, G., *Éléments de mécanique céleste*, 2ème édition, Masson 1997.

[6] Rouvière, F., *Petit guide de calcul différentiel*, 4ème édition, Cassini 2014.

[7] https ://en.wikipedia.org/wiki/Analemma

[8] https ://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_time

[9] http ://www.astrosurf.com/luxorion/analemme.htm