

Théorie des groupes Transformation aux rayons X sur un espace symétrique

François Rouvière

Laboratoire J.A. Dieudonné, université de Nice, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

Reçu le 9 juin 2005 ; accepté le 25 octobre 2005

Disponible sur Internet le 9 décembre 2005

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

On établit une formule d'inversion pour la transformation de Radon sur les géodésiques d'un espace riemannien symétrique de type non compact, au moyen de la transformation de Radon duale décalée. *Pour citer cet article : F. Rouvière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

X-ray transform on a symmetric space. An inversion formula is proved for the X-ray transform on a Riemannian symmetric space of the non-compact type, by means of the shifted dual Radon transform. *To cite this article: F. Rouvière, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let G/K be a Riemannian symmetric space of the non-compact type, where G is a connected non-compact real semisimple Lie group with finite center and K is a maximal compact subgroup. We use the classical semisimple notations (cf. [2]): $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ is the Cartan decomposition of the Lie algebra with Cartan involution θ , \mathfrak{a} is a maximal Abelian subspace of \mathfrak{p} , \mathfrak{g}_α is the space of all $X \in \mathfrak{g}$ such that $\text{ad } H(X) = \alpha(H)X$ for any $H \in \mathfrak{a}$, and \mathfrak{p}_α is the space of all $Y \in \mathfrak{p}$ such that $(\text{ad } H)^2(Y) = (\alpha(H))^2 Y$ for any $H \in \mathfrak{a}$.

Main result. Let u be a C^∞ function with compact support on G/K . The X-ray transform of u being $Ru(\xi) = \int_\xi u$, where ξ is any geodesic of G/K , we prove the following *inversion formulas* for this transform: for any $x \in G/K$

$$u(x) = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (R_{\text{exp } tY}^* Ru(x)) \frac{dt}{\sinh t} = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (R_{\text{exp } sX}^* Ru(x)) \frac{ds}{s}.$$

Here α is any root of \mathfrak{g} with respect to \mathfrak{a} , with norm $|\alpha|$ given by the Killing form, $Y \in \mathfrak{p}_\alpha$ is chosen such that $|Y| = |\alpha|^{-1}$, and $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ is defined by $Y = \frac{1}{2}(X - \theta X)$. The *shifted dual Radon transform* R_γ^* , with $\gamma \in G$, is given by $R_\gamma^* Ru(g \cdot x_0) = \int_K Ru(gk\gamma \cdot \xi_0) dk$, where $g \in G$, $x_0 = K$ is the origin of G/K and ξ_0 is a chosen origin in the set of

Adresse e-mail : frou@math.unice.fr (F. Rouvière).

geodesics. Roughly speaking, R_Y^* integrates $Ru(\xi)$ over a set of geodesics at a given distance from x_0 . In our inversion formulas ξ_0 is the geodesic through x_0 with direction $H_\alpha \in \mathfrak{a}$, a vector dual to α by means of the Killing form.

Sketch of proof. It is enough to prove the inversion formulas for a K -invariant function u . The vectors H_α and Y generate a hyperbolic plane, the above integrals can then be computed explicitly and the problem boils down to a classical Abel integral equation. This gives the first formula, with shift $\exp tY$ orthogonal to ξ_0 . The latter follows easily, with shift $\exp sX$ in the nilpotent part of the Iwasawa decomposition of G .

1. Introduction

Inverser la transformation aux rayons X d'une variété riemannienne, c'est reconstruire une fonction u sur cette variété à l'aide de la famille de ses intégrales $Ru(\xi)$ sur toutes les géodésiques ξ . L'exemple de base, celui des droites du plan euclidien, a été résolu par J. Radon dans son article fondamental de 1917 [7]. Il donne la formule d'inversion

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dF_x(t)}{t},$$

où $F_x(t)$ est la moyenne de $Ru(\xi)$ sur toutes les droites ξ à distance t du point x , et signale de plus, sans démonstration, le résultat analogue pour le plan hyperbolique, avec $\text{sh } t$ au lieu de t au dénominateur. Après un long silence le problème a été repris par de nombreux auteurs, notamment S. Helgason [3], puis C. Berenstein et E. Casadio Tarabusi [1], S. Gindikin, S. Ishikawa [5], Á. Kurusa [6], B. Rubin [10], . . . Dans ces travaux les formules d'inversion ne sont établies que pour des espaces à courbure constante (géométrie euclidienne, sphérique ou hyperbolique) – à l'exception du résultat récent de Helgason [4], indépendant du nôtre et obtenu par une méthode différente.

On montre ici que la formule annoncée par J. Radon pour le plan hyperbolique s'étend à la transformation aux rayons X sur tous les *espaces riemanniens symétriques de type non compact*, i.e. les espaces homogènes $X = G/K$ où G est un groupe de Lie semi-simple réel, connexe non compact et de centre fini, et K un sous-groupe compact maximal. Notre formule s'écrit

$$u(x) = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (R_{\exp tY}^* Ru(x)) \frac{dt}{\text{sh } t}. \quad (1)$$

Ici u désigne une fonction quelconque C^∞ à support compact sur X , x un point de X , α est une racine et la transformée de Radon $Ru(\xi)$ est obtenue en intégrant u sur les géodésiques ξ de X . Soit ξ_0 la géodésique de direction α passant par l'origine x_0 de X ; le vecteur Y est choisi orthogonal à ξ_0 en x_0 , de norme $|\alpha|^{-1}$. La transformée de Radon duale classique $R^*v(x)$, moyenne d'une fonction $v(\xi)$ sur une famille de géodésiques ξ passant par x , est ici remplacée par la *transformée duale décalée* $R_{\exp tY}^*v(x)$, moyenne de v sur une famille de géodésiques à distance $|\alpha|^{-1}t$ de x . On donne aussi une variante de (1), avec décalage dans le sous-groupe nilpotent de la décomposition d'Iwasawa.

La preuve de (1) s'obtient par réduction au cas du plan hyperbolique engendré par ξ_0 et Y . Dans [4] Helgason déduit sa formule d'inversion, valable seulement lorsque l'espace X est de rang $l > 1$, de celle de l'espace euclidien de dimension l .

Avec les notations de (1) la formule de J. Radon (étendue à la transformation aux rayons X sur \mathbb{R}^n) s'écrirait

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (R_{tY}^* Ru(x)) \frac{dt}{t},$$

tY étant une translation de \mathbb{R}^n de longueur t et de direction Y , un vecteur unitaire orthogonal à la droite ξ_0 choisie pour origine.

2. Le rôle des transformations décalées

Soient $x_0 = K$ l'origine de l'espace $X = G/K$ (muni d'une métrique riemannienne G -invariante), ξ_0 une sous-variété de X et Ξ l'ensemble des sous-variétés $g \cdot \xi_0$ déduites de ξ_0 par l'action des éléments $g \in G$. On note dm ,

resp. dm_ξ , la mesure induite sur ξ_0 , resp. sur $\xi \in \mathcal{E}$, par la mesure riemannienne de X . La *transformée de Radon* d'une fonction u sur X est la fonction définie sur \mathcal{E} par

$$Ru(\xi) = \int_{\xi} u(x) dm_\xi(x),$$

si l'intégrale converge. Pour $\gamma \in G$ la *transformée de Radon duale décalée* d'une fonction v sur \mathcal{E} est la fonction R_γ^*v sur X définie par

$$R_\gamma^*v(g \cdot x_0) = \int_K v(gk\gamma \cdot \xi_0) dk, \quad g \in G,$$

où dk est la mesure de Haar de K normalisée par $\int_K dk = 1$. Cette définition dépend du choix de l'origine ξ_0 dans \mathcal{E} . On retrouve la transformation duale classique R^* lorsque γ est l'élément neutre de G .

Supposons connaître une formule d'inversion de R à l'origine, pour les fonctions K -invariantes, sous la forme

$$u(x_0) = \langle T(\gamma), Ru(\gamma \cdot \xi_0) \rangle, \tag{2}$$

où T est une forme linéaire sur un espace de fonctions de la variable γ parcourant une sous-variété de G . Si u est maintenant une fonction quelconque sur X , continue à support compact par exemple, la moyenne

$$u_g(x) = \int_K u(gk \cdot x) dk, \quad x \in X, g \in G,$$

est une fonction K -invariante de x et $u_g(x_0) = u(g \cdot x_0)$. Comme

$$Ru_g(\gamma \cdot \xi_0) = \int_{\xi_0} \int_K u(gk\gamma \cdot x) dm(x) dk = R_\gamma^*Ru(g \cdot x_0)$$

on déduit de (2) la formule générale d'inversion

$$u(x) = \langle T(\gamma), R_\gamma^*Ru(x) \rangle \tag{3}$$

pour tout $x \in X$. Pour inverser R il suffira donc, comme observé dans [9] p. 234, d'établir une formule du type (2) pour les fonctions K -invariantes sur X .

3. Formule d'inversion

Rappelons quelques notations classiques de la théorie des groupes semi-simples (cf. [2]). On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G et θ l'involution de Cartan, où \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie de K et \mathfrak{p} s'identifie à l'espace tangent à l'origine x_0 de X . La forme de Killing $B(Y, Z) = \text{tr}(\text{ad } Y \text{ ad } Z)$ de \mathfrak{g} permet de définir le produit scalaire invariant $\langle Y, Z \rangle = -B(Y, \theta Z)$ de $Y, Z \in \mathfrak{g}$ et la norme $|Y| = \sqrt{-B(Y, \theta Y)}$. L'espace X est muni de la métrique riemannienne G -invariante définie par ce produit scalaire sur \mathfrak{p} , et l'application exponentielle Exp est un difféomorphisme de \mathfrak{p} sur X .

Soient \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p} et α une racine de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, i.e. une forme linéaire sur \mathfrak{a} telle que l'espace propre

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H)X = \alpha(H)X \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}$$

ne soit pas réduit à $\{0\}$. L'application $X \mapsto Y = \frac{1}{2}(X - \theta X)$ est un isomorphisme linéaire de \mathfrak{g}_α sur l'espace propre

$$\mathfrak{p}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{p} \mid (\text{ad } H)^2 Y = \alpha(H)^2 Y \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Soit $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ le vecteur défini par $B(H, H_\alpha) = |H_\alpha|^2 \alpha(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{a}$, de sorte que $\alpha(H_\alpha) = 1$. On note $|\alpha| = |H_\alpha|^{-1}$.

Théorème 3.1. Soient $X = G/K$ un espace riemannien symétrique de type non compact, α une racine de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, $Y \in \mathfrak{p}_\alpha$ tel que $|Y| = |\alpha|^{-1}$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ le vecteur défini¹ par $Y = \frac{1}{2}(X - \theta X)$. Prenons $\xi_0 = \text{Exp } \mathbb{R}H_\alpha$ pour origine dans l'espace des géodésiques, et soit R la transformation aux rayons X obtenue en intégrant sur les géodésiques d'une famille contenant les $g \cdot \xi_0$, $g \in G$.

Alors R est inversée par les formules suivantes, pour $u \in C_c^\infty(X)$ et $x \in X$,

$$u(x) = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (R_{\exp t Y}^* Ru(x)) \frac{dt}{\text{sh } t} = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (R_{\exp s X}^* Ru(x)) \frac{ds}{s}. \quad (4)$$

Démonstration. D'après la Section 2 il suffit de montrer que, pour toute fonction K -invariante $u \in C_c^\infty(X)$,

$$u(x_0) = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (Ru(\exp t Y \cdot \xi_0)) \frac{dt}{\text{sh } t} = -\frac{|\alpha|}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (Ru(\exp s X \cdot \xi_0)) \frac{ds}{s} \quad (5)$$

où, compte tenu de $|H_\alpha| = |\alpha|^{-1}$,

$$Ru(g \cdot \xi_0) = \int_{\xi_0} u(g \cdot x) dm(x) = |\alpha|^{-1} \int_{\mathbb{R}} u(g \cdot \text{Exp } r H_\alpha) dr.$$

Soit $Z = \frac{1}{2}(X + \theta X) \in \mathfrak{k}$. On vérifie aisément que H_α , Y et Z ont même norme et que

$$[H_\alpha, Y] = Z, \quad [H_\alpha, Z] = Y, \quad [Y, Z] = -H_\alpha. \quad (6)$$

L'application

$$\varphi: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \mapsto xH_\alpha + yY + zZ, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

est donc un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sur la sous-algèbre \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} engendrée par H_α , Y , Z , d'où un morphisme surjectif du revêtement universel de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le sous-groupe de Lie G^* de G d'algèbre \mathfrak{g}^* . Par suite une égalité dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ telle que

$$\exp A \exp B = \exp C \exp D \exp E,$$

avec $A, \dots, E \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ entraîne dans G^*

$$\exp \varphi(A) \exp \varphi(B) = k \exp \varphi(C) \exp \varphi(D) \exp \varphi(E),$$

pour un certain $k \in \exp \mathbb{R}Z$ commutant à G^* . En effet $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ est le quotient de son revêtement universel par un sous-groupe discret central, dont l'image par φ est contenue dans le centre de G^* , a fortiori dans le sous-groupe compact maximal $K \cap G^* = \exp \mathbb{R}Z$ de G^* .

On vérifie ainsi, par un calcul élémentaire dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, la décomposition de Cartan ($G = KAK$)

$$\exp tY \exp rH_\alpha = k_1 \exp(wH_\alpha) k_2, \quad (7)$$

avec $k_1, k_2 \in \exp \mathbb{R}Z \subset K$ et $w = w(r, t) \geq 0$ défini par

$$\text{ch } w = \text{ch } r \text{ ch } t.$$

On reconnaît dans cette égalité le théorème de Pythagore dans le plan hyperbolique engendré par H_α et Y . Par suite, si u est K -invariante,

$$Ru(\exp tY \cdot \xi_0) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} u(\text{Exp } w(r, t) H_\alpha) dr.$$

¹ Le contexte écarte toute confusion entre ce vecteur et l'espace $X = G/K$!

Or l'action adjointe de $\exp \mathbb{R}Z$ sur H_α est donnée par

$$\text{Ad}(\exp tZ)H_\alpha = (\cos t)H_\alpha - (\sin t)Y, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

les deux membres étant, d'après (6), solution du système différentiel $X'(t) = [Z, X(t)]$. En particulier $\exp \pi Z$ transforme H_α en son opposé, donc $u(\text{Exp } wH_\alpha)$ est fonction paire de $w \in \mathbb{R}$, C^∞ à support compact, et on peut écrire $u(\text{Exp } wH_\alpha) = \underline{u}(\text{ch } w)$, où \underline{u} est C^∞ à support compact sur $[1, \infty[$ (cf. [8] p. 270). Il vient

$$Ru(\exp tY \cdot \xi_0) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \underline{u}(\text{ch } r \text{ch } t) \, dr,$$

et le premier membre peut s'écrire $\underline{Ru}(\tau)$, avec $\tau = \text{ch } t$ et

$$\underline{Ru}(\tau) = \frac{2}{|\alpha|} \int_0^\infty \underline{u}(\tau \text{ch } r) \, dr.$$

La résolution en \underline{u} de cette équation intégrale du type d'Abel est classique. Elle entraîne d'abord

$$\int_0^\infty \underline{Ru}(\tau \text{ch } s) \frac{ds}{\text{ch } s} = \frac{\pi}{|\alpha|} \int_\tau^\infty \underline{u}(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad \tau \geq 1. \tag{9}$$

Le premier membre est en effet l'intégrale double $2|\alpha|^{-1} \iint \underline{u}(\tau \text{ch } r \text{ch } s) \, dr \, ds / \text{ch } s$, et le changement de variables $(r, s) \mapsto (\rho, \theta)$, avec $\rho \geq \tau$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$ définis par

$$\rho = \tau \text{ch } r \text{ch } s, \quad \sin \theta = \frac{\text{sh } r}{\sqrt{\text{ch}^2 r \text{ch}^2 s - 1}},$$

donne $dr \, ds / \text{ch } s = d\rho \, d\theta / \rho$, d'où (9). En dérivant (9) en $\tau = 1$ il vient

$$-\frac{\pi}{|\alpha|} \underline{u}(1) = \int_0^\infty (\underline{Ru})'(\text{ch } s) \, ds.$$

Comme $\underline{u}(1) = u(x_0)$ et $\underline{Ru}(\text{ch } t) = Ru(\exp tY \cdot \xi_0)$ c'est la première égalité (5).

La seconde s'en déduit par la décomposition d'Iwasawa ($G = KNA$)

$$\exp tY = k \exp((\text{sh } t)X)a$$

avec $k \in \exp \mathbb{R}Z$ et $a \in \exp \mathbb{R}H_\alpha$, aisément vérifiée dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ comme expliqué plus haut. Donc

$$Ru(\exp tY \cdot \xi_0) = Ru(\exp(\text{sh } t)X \cdot \xi_0),$$

d'où la seconde égalité (5) avec $s = \text{sh } t$.

Remarques. (i) D'après (7) le point $\exp tY \cdot \text{Exp } rH_\alpha = k_1 \cdot \text{Exp } wH_\alpha$ est à la distance $|\alpha|^{-1}w$ de l'origine, minimale pour $r = 0$ comme fonction de r . Le point $\text{Exp } tY$ est donc la projection orthogonale de x_0 sur la géodésique $\exp tY \cdot \xi_0$, et la transformation décalée $R_{\exp tY}^*$ intègre sur une famille de géodésiques à distance $|\alpha|^{-1}t$ du point considéré.

(ii) D'autres choix de la racine α donnent d'autres formules d'inversion. Mais, α étant choisie, le choix de $Y \in \mathfrak{p}_\alpha$ (avec $|Y| = |\alpha|^{-1}$) est sans importance : deux tels vecteurs sont dans une même K -orbite puisque chacun d'eux peut être transformé en H_α par l'action de K , d'après (8) avec $t = -\pi/2$.

Remerciements

Je remercie S. Helgason pour ses remarques sur une première version de cet article.

Références

- [1] C. Berenstein, E. Casadio Tarabusi, Inversion formulas for the k -dimensional Radon transform in real hyperbolic spaces, *Duke Math. J.* 62 (1991) 613–631.
- [2] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.
- [3] S. Helgason, *The Radon Transform*, second ed., Birkhäuser, 1999.
- [4] S. Helgason, The Abel, Fourier and Radon transforms on symmetric spaces, in: *Conference in honour of G. van Dijk*, 2004.
- [5] S. Ishikawa, The range characterizations of the totally geodesic Radon transform on the real hyperbolic space, *Duke Math. J.* 90 (1997) 149–203.
- [6] Á. Kurusa, The Radon transform on hyperbolic space, *Geom. Dedicata* 40 (1991) 325–339.
- [7] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Kl.* 69 (1917) 262–277; traduction anglaise dans S. Deans, *The Radon transform and some of its applications*, Krieger, 1993, pp. 204–217.
- [8] F. Rouvière, Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semi-simples de rang un, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 10 (1983) 263–290.
- [9] F. Rouvière, Inverting Radon transforms: the group-theoretic approach, *Enseign. Math.* 47 (2001) 205–252.
- [10] B. Rubin, Radon, cosine and sine transforms on real hyperbolic space, *Adv. Math.* 170 (2002) 206–223.