Transformation de Radon géodésique sur un espace symétrique

François Rouvière

Safi, 26-29 juillet 2004

Résumé

On décrit plusieurs méthodes pour inverser la transformation de Radon sur un espace symétrique X, qui associe à une fonction sur X ses intégrales sur la famille des géodésiques ou plus généralement sur une famille de sous-variétés totalement géodésiques de X.

Soient X une variété riemannienne et $u : X \to \mathbb{C}$ une fonction numérique, par exemple continue à support compact. La *transformation aux rayons* X, notée R, associe à u la famille de ses intégrales

$$Ru(\xi) = \int_\xi u(x)\ dm_\xi(x)$$

le long de chaque géodésique ξ de X ; on a noté dm_ξ la mesure de longueur sur ξ. L'exemple le plus élémentaire est celui des droites du plan euclidien, considéré par Johann Radon dans son article fondamental [12] de 1917. Plus généralement on appelle *transformées de Radon* les intégrales de ce type, ξ appartenant à une famille donnée de sous-variétés de X et dm_ξ désignant la mesure induite sur ξ par la mesure riemannienne de X.

Les nombreuses applications de cette notion, entre autres à la tomographie médicale aux rayons X, soulèvent le problème de la reconstruction d'une fonction u à partir des intégrales $Ru(\xi)$. Plus précisément, les questions suivantes se posent naturellement ($\mathcal{F}$ désignant un certain espace de fonctions sur X) :

- *injectivité* de l'opérateur R sur $\mathcal{F}$
- *support* : si $u \in \mathcal{F}$ et si $Ru(\xi) = 0$ pour tout ξ qui ne rencontre pas un compact C de X, peut-on en déduire que le support de u est contenu dans C ?
- *image* : caractériser l'image de $\mathcal{F}$ par R
- *inverse* (à gauche) : trouver un opérateur A tel que $u = ARu$ pour tout $u \in \mathcal{F}$.

C'est à la recherche de formules d'inversion que l'on s'intéressera surtout ici, sur l'espace $\mathcal{F} = C_c^\infty(X)$. A l'exception du paragraphe 3 les sous-variétés ξ considérées seront toujours des *géodésiques* de X ou, plus généralement, des "*d-géodésiques*" c'est-à-dire des sous-variétés totalement géodésiques[1] de dimension d de X.

1 Un cadre général

Introduit par S. Helgason dès 1965, le cadre général des espaces homogènes en dualité permet de relier de façon élégante la transformation de Radon à la théorie des groupes de Lie.

[1] Une sous-variété ξ est dite totalement géodésique dans X si toute géodésique de X tangente à ξ est toute entière contenue dans ξ.

a. Soient (X, x_0) et (Ξ, ξ_0) *deux variétés pointées*, i.e. munies d'origines respectives x_0 et ξ_0, *sur lesquelles agit transitivement un même groupe de Lie* G. On dit que $x \in X$ et $\xi \in \Xi$ sont *incidents* s'il existe $g \in G$ tel que

$$x = g.x_0 \text{ et } \xi = g.\xi_0 \ .$$

Intuitivement x et ξ sont incidents s'ils ont même position relative que les origines x_0 et ξ_0, puisqu'ils se déduisent d'elles par une transformation du groupe G.
Exemple. Soit X l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance d), avec l'origine $x_0 = 0$ et soit ξ_0 une droite fixée dans l'ensemble Ξ de toutes les droites de X. Si G est le groupe des isométries de X, on voit que x et ξ sont incidents si et seulement si $d(x, \xi) = d(x_0, \xi_0)$; en particulier, si ξ_0 passe par x_0 la relation d'incidence se réduit à $x \in \xi$.

On peut reformuler la relation d'incidence en introduisant K, sous-groupe d'isotropie de x_0, et H, sous-groupe d'isotropie de ξ_0 dans G. Ce sont des sous-groupes fermés de G. Dans toute la suite K *sera supposé compact.* Alors X et Ξ s'identifient aux espaces homogènes $X = G/K$, $\Xi = G/H$, et

- x est incident à $\xi = g.\xi_0 = gH$ si et seulement s'il existe $h \in H$ tel que $x = gh.x_0 = ghK$
- ξ est incident à $x = g.x_0 = gK$ si et seulement s'il existe $k \in K$ tel que $\xi = gk.\xi_0 = gkH$

b. Dans ce cadre on définit la *transformée de Radon* d'une fonction u sur X (par exemple continue à support compact) par

$$Ru(gH) = \int_H u(ghK)\ dh\ ,$$

où dh est une mesure invariante à gauche sur H. On intègre u sur tous les x incidents à $\xi = gH$, ce qui définit une fonction Ru sur Ξ.

De même, la *transformée de Radon duale* d'une fonction v sur Ξ (par exemple continue) est la fonction sur X définie par

$$R^*v(gK) = \int_K v(gkH)\ dk\ ,$$

où dk est la mesure invariante de K normalisée par $\int_K dk = 1$.

Les transformations R et R^* sont duales au sens de la géométrie : dans l'exemple de $\mathbb{R}^n$, avec $x_0 \in \xi_0$, la première intègre u sur tous les points x appartenant à une droite ξ, la seconde intègre v sur toutes les droites ξ passant par un point x. Elles le sont aussi au sens de l'analyse : si X et Ξ admettent des mesures G-invariantes respectives dx et $d\xi$, et si on normalise convenablement dx, $d\xi$, dh et dk, on a

$$\int_X u(x) R^*v(x)\ dx = \int_\Xi Ru(\xi) v(\xi)\ d\xi\ .$$

c. Dans les exemples qui nous intéresseront, $X = G/K$ sera une *variété riemannienne*, G un groupe (transitif) d'*isométries* de X et $\xi_0 = \Gamma.x_0$ une sous-variété de X donnée comme l'orbite de l'origine $x_0 = K$ de X par un sous-groupe fermé Γ de G. Si on prend pour Ξ l'ensemble des sous-variétés $g.\xi_0$, avec $g \in G$, la relation d'incidence est alors simplement l'appartenance $x \in \xi$ et on a ([13] p.213)

$$Ru(\xi) = \int_\xi u(x)\ dm_\xi(x)\ ,$$

où dm_ξ est la mesure riemannienne induite par X sur sa sous-variété ξ. On retrouve ainsi la définition géométrique de R donnée au début.

Ceci s'applique notamment lorsque $X = G/K$ *est un espace riemannien symétrique et* ξ_0 *une sous-variété totalement géodésique* (par exemple une géodésique) de X, passant par l'origine. En effet l'espace tangent en x_0 à ξ_0 s'identifie à un sous-espace de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, noté $\mathfrak{s}$. Pour le crochet de $\mathfrak{g}$ c'est un *système triple de Lie*, i.e. $[\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]] \subset \mathfrak{s}$, et on a

$$\xi_0 = \operatorname{Exp} \mathfrak{s} = \Gamma . x_0 \text{ avec } \Gamma = N_K(\mathfrak{s}) \exp \mathfrak{s} \ ,$$

en notant Exp l'application exponentielle de l'espace X et $N_K(\mathfrak{s})$ le normalisateur de $\mathfrak{s}$ dans K (voir [3] p.224).

2 Recherche de formules d'inversion

On considère à nouveau deux espaces homogènes $X = G/K$, $\Xi = G/H$ d'un même groupe de Lie G, avec K compact. Parmi les diverses méthodes d'inversion de la transformation R, nous en esquisserons trois.

a. Méthode par convolution. L'opérateur dual R^* transforme les fonctions sur Ξ en des fonctions sur X, il est donc naturel de considérer R^*R. Comme R et R^* commutent à l'action de G sur X et Ξ, il en est de même de l'opérateur R^*R. Si on suppose que Ξ admet une mesure G-invariante on peut en déduire ([13] p.215) que R^*R est la convolution[2] par une distribution K-invariante sur $X = G/K$. On peut alors chercher à l'inverser soit directement par un opérateur différentiel, soit par l'analyse harmonique sur X, qui transforme convolution en multiplication, d'où un résultat de la forme

$$u = AR^*Ru \ ,$$

où A est un opérateur sur X de type intégro-différentiel.

Cette méthode a été appliquée notamment par Helgason [7], [4] et, plus récemment, par Berenstein et Tarabusi [1] lorsque X est l'espace hyperbolique réel $H^n(\mathbb{R})$ et Ξ l'espace de ses d-géodésiques. Soit r la distance (hyperbolique) à l'origine dans X. Le calcul montre que R^*R est (à un facteur constant près) la convolution par le quotient de l'aire de la sphère de rayon r dans ξ_0 par son analogue dans X, à savoir la fonction radiale $(\operatorname{sh} r)^{d-n}$. L'analyse harmonique des fonctions radiales sur X (transformation de Fourier sphérique) permet d'en déduire la formule d'inversion ([1] p.628)

$$\boxed{u = P_d(\Delta) S R^* R u} \ , \tag{1}$$

$u \in C_c^\infty(X)$, où P_d est un polynôme (explicite) de degré d, Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami de X et S est l'opérateur de convolution[3] par la fonction radiale $(\operatorname{sh} r)^{d-n} \operatorname{ch} r$. Ce choix de S est fait pour que SR^*R puisse être inversé par un opérateur différentiel, sa transformée sphérique étant l'inverse d'un polynôme.

Pour $d = 1$ (transformation aux rayons X) on obtient en particulier

$$\boxed{u = (\Delta + n - 2) S R^* R u} \ . \tag{2}$$

Pour d pair, on peut se passer de l'opérateur S et inverser directement R^*R par un polynôme de Δ de degré $d/2$ ([4] p.159, [7] p.91). On trouvera dans [13] p.226 des extensions de ce résultat aux espaces hyperboliques $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$.

[2] La convolution sur G/K peut se définir à partir de celle du groupe G par passage au quotient ([4] p.290).

[3] La définition de S doit être légèrement modifiée lorsque $d = 1$ et $n = 2$ ou 3.

b. Méthode de B. Rubin [14]. La méthode concerne encore les d-géodésiques de l'espace hyperbolique $X = H^n(\mathbb{R})$. B. Rubin introduit un opérateur T de Ξ vers X tel que TR puisse être inversé par un opérateur différentiel sur X ; dans la méthode de Berenstein et Tarabusi cet opérateur avait la forme particulière $T = SR^*$.

Si on définit T_α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$T_\alpha v(x) = \int_\Xi v(\xi)(\operatorname{sh} d(x,\xi))^\alpha d\xi \ ,$$

où v est une fonction sur Ξ et $d(x,\xi)$ est la distance (hyperbolique) du point $x \in X$ à la sous-variété géodésique $\xi \in \Xi$, on a la formule fondamentale (où C_α est une constante positive)

$$\int_\Xi Ru(\xi)(\operatorname{sh} d(x,\xi))^\alpha d\xi = C_\alpha \int_X u(y)(\operatorname{sh} d(x,y))^\alpha dy$$

pour $\alpha + n - d > 0$, $x \in X$ et u continue à support compact sur X. En d'autres termes, pour chaque x fixé la fonction $v_\alpha(\xi) = (\operatorname{sh} d(x,\xi))^\alpha$ donne $R^* v_\alpha(y) = C_\alpha(\operatorname{sh} d(x,y))^\alpha$. La formule s'écrit encore

$$T_\alpha Ru = C_\alpha \ u * (\operatorname{sh} r)^\alpha \ .$$

En choisissant $\alpha = 2k - n$ avec k entier positif et $2k > d$, on vérifie par des calculs simples que la fonction radiale $(\operatorname{sh} r)^{2k-n}$ est solution élémentaire d'un polynôme de degré k du laplacien Δ de X. On en déduit la formule d'inversion

$$\boxed{u = P_k(\Delta) T_{2k-n} Ru} \ , \tag{3}$$

$u \in C_c^\infty(X)$, $2k > d$, où P_k est un polynôme (explicite) de degré k.

Pour $d = 1$ on peut prendre $k = 1$ ce qui donne

$$u = C \ (\Delta + n - 2) T_{2-n} Ru \ ,$$

où C est une constante. On peut dans ce cas vérifier par un calcul direct que $C \ T_{2-n} = SR^*$ avec $Su = u * ((\operatorname{sh} r)^{1-n} \operatorname{ch} r)$, ce qui redonne la formule (2) de Berenstein et Tarabusi.

Il serait séduisant d'étendre la méthode de Rubin à d'autres espaces X, à commencer par $H^n(\mathbb{C})$ et $H^n(\mathbb{H})$. La difficulté est de définir convenablement l'opérateur T_α, ce qui revient en somme à inverser R^*...

c. Méthode de Radon dual décalé (ou méthode des moyennes sphériques). Cette méthode, utilisée à plusieurs reprises par S. Helgason, a été généralisée dans [13] p.234. Mais il n'y a rien là de bien nouveau, puisqu'elle remonte en fait à J. Radon [12] pour le cas des droites du plan !

Supposons connaître une *formule d'inversion à l'origine x_0 pour les fonctions K-invariantes sur X*, disons sous la forme

$$u(x_0) = < T(\gamma), Ru(\gamma.\xi_0) > \tag{4}$$

où T est une forme linéaire sur un espace de fonctions d'une variable γ parcourant une certaine sous-variété de G. Il est alors facile d'étendre la formule au cas général : pour u fonction "quelconque" sur X et $g \in G$ quelconque, considérons

$$u_g(x) = \int_K u(gk.x) \ dk \ .$$

C'est une fonction K-invariante[4] sur X, telle que $u_g(x_0) = u(g.x_0)$. Pour lui appliquer (4) on calcule

$$Ru_g(\gamma.\xi_0) = \int_{K\times H} u(gk\gamma h.x_0)\ dkdh = \int_K Ru(gk\gamma.\xi_0)\ dk\ .$$

Si γ est l'élément neutre le membre de droite se réduit à $R^*Ru(g.x_0)$. Plus généralement définissons, pour $g, \gamma \in G$ et v fonction (continue) sur Ξ,

$$R^*_\gamma v(g.x_0) = \int_K v(gk\gamma.\xi_0)\ dk\ . \tag{5}$$

Cette *transformation de Radon duale décalée* R^*_γ est le R^* correspondant à l'origine $\gamma.\xi_0$ de Ξ, au lieu de ξ_0. Intuitivement la relation d'incidence associée à ce nouveau choix exprime (dans les exemples usuels) que x est à une distance donnée de ξ.

Alors $Ru_g(\gamma.\xi_0) = R^*_\gamma Ru(g.x_0)$ et (4) entraîne la *formule générale d'inversion*

$$u(x) = < T(\gamma), R^*_\gamma Ru(x) > \tag{6}$$

pour tout $x \in X$ et toute fonction u sur X.

Voyons deux applications de cette méthode, l'une pour établir une preuve simple d'un résultat connu (horocycles), l'autre pour un résultat nouveau (géodésiques d'un espace riemannien symétrique). *Dans toute la suite $X = G/K$ sera un espace riemannien symétrique de type non compact*, avec G groupe de Lie semi-simple connexe, non compact et de centre fini, et K sous-groupe compact maximal. On renvoie aux ouvrages classiques [3][4] pour approfondir géométrie et analyse sur ces espaces, qui ne pourront qu'être brièvement rappelées ici.

3 Application aux horocycles

La transformation de Radon sur les horocycles d'un espace riemannien symétrique de type non compact a été inversée par S. Helgason en 1964 (voir [6] p.116). La méthode de Radon dual décalé permet d'alléger sensiblement la preuve de cette formule d'inversion.

a. Transformation de Radon sur les horocycles. Soient $X = G/K$ un espace riemannien symétrique de type non compact et $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa, explicitée en $g = K(g)A(g)N(g)$ sur un élément g de G. Les *fonctions sphériques* de X sont données par la formule de Harish-Chandra

$$\varphi_\lambda(gK) = \int_K A(gk)^{-i\lambda-\rho}dk$$

où $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ est une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de A. La notation $A(g)^\mu$ pour $\mu \in \mathfrak{a}^*_c$ (dual complexe de $\mathfrak{a}$) signifie $e^{\mu(H)}$ avec $A(g) = \exp H$, $H \in \mathfrak{a}$. Comme d'habitude $\rho \in \mathfrak{a}^*$ désigne la demi-somme des racines positives, comptées avec leurs multiplicités. La *transformée sphérique*

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int_{G/K} u(x)\varphi_\lambda(x)\ dx$$

d'une fonction *K-invariante* u (continue à support compact) sur X s'écrit donc

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int_G u(g\cdot x_0)A(g)^{-i\lambda-\rho}dg\ ,$$

[4]Si K agit transitivement sur la sphère unité de l'espace tangent à X (on dit alors que X est isotrope), $u_g(x)$ est simplement la moyenne de u sur la sphère de centre $g.x_0$ et de rayon $d(x_0, x)$.

puisque le changement de g en gk rend inutile l'intégration sur K. En écrivant $g = kan$, $dg = a^{2\rho}dkdadn$, la K-invariance de u dispense à nouveau de l'intégration sur K et il reste

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int_A a^{-i\lambda} da \left(a^\rho \int_N u(an.x_0)\ dn \right) .$$

On intègre ici u sur l'*horocycle* $\xi = aN.x_0$, image par a de l'horocycle origine $\xi_0 = N.x_0$, orbite du sous-groupe nilpotent N. Ainsi, pour u K-invariante,

$$\boxed{\widetilde{u}(\lambda) = (a^\rho Ru(a.\xi_0))\widehat{\ }(\lambda)} , \tag{7}$$

transformée de Fourier usuelle sur le groupe $A = \mathbb{R}^n$ de la transformée de Radon R sur les horocycles (au facteur a^ρ près). C'est un résultat du type appelé "*projection slice theorem*", qui factorise la transformation sphérique de X en la composée de Fourier usuel et de Radon sur les horocycles.

b. Formule d'inversion. L'outil essentiel est la formule d'inversion de la transformation sphérique pour $u \in C_c^\infty(X)$, K-invariante,

$$u(x_0) = \int_{\mathfrak{a}^*} \widetilde{u}(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

où $c(\lambda)$ est la célèbre fonction de Harish-Chandra. Introduisons la distribution (tempérée et paire) T sur A définie par $\widehat{T}(\lambda) = |c(\lambda)|^{-2}$. Alors, d'après (7),

$$u(x_0) =< \widehat{T}(\lambda), \widetilde{u}(\lambda) >=< \widehat{T}(\lambda), (a^\rho Ru(a.\xi_0))\widehat{\ }(\lambda) > \ ,$$

c'est-à-dire

$$u(x_0) = < a^\rho T(a), Ru(a.\xi_0) >$$

si u est K-invariante, d'où immédiatement

$$u(x) = < a^\rho T(a), R_a^* Ru(x) >$$

pour tous $u \in C_c^\infty(X)$, $x \in X$, par Radon dual décalé.

Cette égalité s'écrit encore

$$u(g.x_0) = \int_K < a^\rho T(a), Ru(gka.\xi_0) > dk \ .$$

Or, si v est une fonction sur l'espace des horocycles, qui est $\Xi = G/MN$, l'application

$$g \longmapsto < a^\rho T(a), v(ga.\xi_0) >$$

est MN-invariante à droite (puisque $gMNa = gaMN$). Elle définit donc une fonction sur Ξ, notée $Dv(g.\xi_0)$. Avec cette notation la formule d'inversion s'écrit

$$u(g.x_0) = \int_K (DRu)(gk.\xi_0)\ dk \ ,$$

ce qui donne la formule originale de Helgason

$$\boxed{u = R^* DRu} \ .$$

Si G a une structure complexe, ou plus généralement si toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées, la fonction $|c(\lambda)|^{-2}$ est un polynôme et D est un opérateur différentiel sur Ξ.

4 Application aux géodésiques

Comme au paragraphe précédent $X = G/K$ est un espace riemannien symétrique de type non compact (de rang quelconque). On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G donnée par la symétrie, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{p}$ s'identifie à l'espace tangent à X à l'origine. L'application exponentielle $\mathrm{Exp} : \mathfrak{p} \to X$ est un difféomorphisme global.

a. Inversion de la transformation aux rayons X. On va établir le résultat suivant (F.R. 2004) :

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$. On peut choisir des vecteurs $H \in \mathfrak{a}$ et $Y \in \mathfrak{p}$ tels que, en prenant pour origine $\xi_0 = \mathrm{Exp}\,\mathbb{R}H$ dans l'espace des géodésiques de X, la transformation aux rayons X soit inversée par

$$\boxed{u(x) = C \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(R^*_{\exp tY} Ru(x) \right) \frac{dt}{\operatorname{sh} t}} \tag{8}$$

(où C est une constante), pour $u \in C_c^\infty(X)$, $x \in X$.

Démonstration. Par la méthode de Radon dual décalé il suffit d'établir l'égalité

$$u(x) = C \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(Ru(\exp tY.\xi_0) \right) \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \tag{9}$$

lorsque u est K-invariante. L'idée est de réduire le problème au cas simple où X est le plan hyperbolique, en choisissant $H \in \mathfrak{a}$ et $Y \in \mathfrak{p}$, orthogonaux, engendrant une sous-variété de X isométrique à $H^2(\mathbb{R})$.

Pour cela soit α une racine de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{a}$, soit $H \in \mathfrak{a}$ tel que $B(H, H') = \alpha(H')$ pour tout $H' \in \mathfrak{a}$ (où B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$) et soit $Y \in \mathfrak{p}$, non nul, tel que

$$[H, [H, Y]] = \alpha(H)^2 Y \ .$$

Quelques calculs dans $\mathfrak{g}$ montrent que Y est orthogonal à H et qu'on a

$$[Y, [Y, H]] = cH \ ,$$

où c est un facteur non nul. Par suite $\mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}Y$ est un système triple de Lie de dimension deux, non abélien, et son image par Exp est une sous-variété totalement géodésique de X isométrique à $H^2(\mathbb{R})$.

Soit $\xi_0 = \mathrm{Exp}\,\mathbb{R}H$. Les géodésiques $\exp tY.\xi_0$, $t \in \mathbb{R}$, sont contenues dans ce plan hyperbolique. Soit $|.|$ la norme définie, sur $\mathfrak{p}$ comme sur $\mathfrak{a}^*$, par la forme de Killing. En normalisant H et Y par $|H| = |Y| = 1/|\alpha|$ on a

$$Ru(\exp tY.\xi_0) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} u(\exp tY. \exp rH.x_0) \ dr \ .$$

Comme H et Y engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $sl(2, \mathbb{R})$, un calcul élémentaire dans le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ donne

$$\exp tY. \exp rH = k \exp(w(r,t)H)k' \ , \text{ avec } k, k' \in K \text{ et } \operatorname{ch} w(r,t) = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} t \ .$$

Cette dernière égalité est le théorème de Pythagore hyperbolique dans un triangle rectangle de côtés r, t et d'hypoténuse w. Par la K-invariance de u on a

$$u(\exp tY. \exp rH.x_0) = u(\exp wH.x_0) \ .$$

En outre cette expression est fonction paire de $w \in \mathbb{R}$, on peut donc l'écrire $\underline{u}(\operatorname{ch} w)$ où $\underline{u}$ est une fonction C^∞ à support compact sur l'intervalle $[1, \infty[$. Il vient

$$Ru(\exp tY.\xi_0) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}} \underline{u}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} t)\ dr\ .$$

Finalement, en notant $\underline{Ru}(\operatorname{ch} t)$ le premier membre, on obtient l'équation intégrale (de type Abel)

$$\underline{Ru}(\tau) = \frac{2}{|\alpha|} \int_0^\infty \underline{u}(\tau \operatorname{ch} r)\ dr\ ,\ \tau = \operatorname{ch} t\ .$$

Ceci entraîne l'égalité

$$\int_0^\infty \underline{Ru}(\tau \operatorname{ch} s) \frac{ds}{\operatorname{ch} s} = \frac{\pi}{|\alpha|} \int_\tau^\infty \underline{u}(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$$

(dans l'intégrale double au premier membre, changer les variables (r, s) en (ρ, θ) avec $\rho \geq \tau$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et

$$\rho = \tau \operatorname{ch} r \operatorname{ch} s\ ,\ \sin\theta = \frac{\operatorname{sh} r}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 r \operatorname{ch}^2 s - 1}}\ ).$$

Il n'y a plus qu'à dériver en $\tau = 1$ pour obtenir

$$-\frac{\pi}{|\alpha|}\underline{u}(1) = \int_0^\infty (\underline{Ru})'(\operatorname{ch} s)\ ds\ .$$

Comme $\underline{u}(1) = u(x_0)$ et $\underline{Ru}(\operatorname{ch} s) = Ru(\exp sY.\xi_0)$, c'est le résultat annoncé (9).

b. Compléments. Cet énoncé admet diverses variantes. L'une d'elles redonne une formule d'inversion démontrée par S. Helgason pour les géodésiques de $H^n(\mathbb{R})$, qui s'écrit dans notre notation

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\int_0^\sigma R^*_{\exp tY} Ru(x) \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma^2 - \tau^2}} \right)\Bigg|_{\sigma=1} \tag{10}$$

avec $\tau = 1/\operatorname{ch} t$, $t \geq 0$ sous l'intégrale. Obtenue dès 1958, cette formule ne fut publiée qu'en 1990 car son auteur la jugeait, dans un premier temps, "unreasonably complicated"... Voir [5] ou [7] p.97.

Tout récemment (2004) Helgason a inversé la transformation aux rayons X sur tout espace riemannien symétrique de type non compact et *de rang strictement plus grand que un*, par une méthode d'une incontestable simplicité. D'après la définition même de $\mathfrak{a}$ l'ensemble $E = \operatorname{Exp} \mathfrak{a} = A.x_0$ est alors une sous-variété totalement géodésique *plate* de X, de dimension $\ell > 1$, i.e. $E = \mathbb{R}^\ell$, et ses géodésiques sont les droites usuelles. En travaillant sur la restriction à E d'une fonction $u \in C_c^\infty(X)$ on est ramené à inverser la transformation aux rayons X d'un espace euclidien. Par la même méthode qu'en **a** ci-dessus, mais dans le cadre plus simple de l'espace E, avec le groupe orthogonal $SO(E)$ (et sa mesure invariante $d\omega$) à la place de K, on obtient d'abord

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{SO(E)} Ru(\omega.\xi_t) d\omega \right) \frac{dt}{t}\ ,$$

où ξ_t désigne une droite fixée de E à distance t de l'origine x_0. Les $\omega.\xi_t$, $\omega \in SO(E)$, sont toutes les géodésiques à distance t de x_0 dans E.

Il serait géométriquement plus satisfaisant d'avoir ici toutes les géodésiques à distance t de x_0 dans X. Comme $K.\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, il suffit pour cela de remplacer $u(x)$ par $\int_K u(k.x)dk$. En faisant ensuite agir $g \in G$ on obtient enfin la formule d'inversion

$$\boxed{u(g.x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{SO(E)\times K} Ru(gk\omega.\xi_t) d\omega dk \right) \frac{dt}{t}} \ , \tag{11}$$

pour tous $u \in C_c^\infty(X)$, $g \in G$. Les $gk\omega.\xi_t$, $\omega \in SO(E)$, $k \in K$, sont toutes les géodésiques à distance t de $g.x_0$ dans X. Ce résultat très simple oblige toutefois à introduire le groupe $SO(E)$, non contenu dans G. Curieusement la situation apparaît meilleure qu'en rang un : dans ce dernier cas la réduction au plan hyperbolique semble inévitable, d'où le $dt/\operatorname{sh} t$ au lieu de dt/t sous l'intégrale (cf. (8)).

Signalons enfin que (8) peut s'étendre (par la méthode de **a**) à la transformation de Radon sur certaines familles de d-géodésiques de G/K (F.R., rédaction en cours).

5 Travaux d'Ishikawa

Développée dans [9][10][11], l'approche de S. Ishikawa utilise de manière intéressante l'analyse harmonique sur l'espace homogène $\Xi = G/H$. On va décrire brièvement un de ses résultats cruciaux, un "projection slice theorem" qui relie (sous des hypothèses convenables) la transformation de Fourier-Helgason de l'espace riemannien $X = G/K$, bien connue, à la transformation de Fourier de l'espace non-riemannien Ξ et à la transformation de Radon qui va de X vers Ξ.

a. Projection slice theorem.
Hypothèse 1. $X = G/K$ est un espace riemannien symétrique de type non compact. On note θ l'involution de Cartan de G, donnant la décomposition en espaces propres $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Soient σ *un deuxième automorphisme involutif de G, qui commute à θ, et H le sous-groupe des points fixes de σ.*

Ceci définit l'espace symétrique $\Xi = G/H$ et la décomposition en espaces propres $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$. Comme σ et θ commutent on a la décomposition jointe en sous-espaces propres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} \ .$$

Alors $\xi_0 = \operatorname{Exp}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) = H.x_0$ *est une sous-variété totalement géodésique de X.* En effet $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ est un système triple de Lie, comme intersection du système triple $\mathfrak{p}$ et de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$; de plus la décomposition de Cartan de H :

$$H = (K \cap H) \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) = \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})(K \cap H)$$

donne l'égalité $\operatorname{Exp}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) = \exp(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}).x_0 = H.x_0$.
Hypothèse 2. Il existe un sous espace-abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{a}$ soit contenu dans $\mathfrak{q}$. Ainsi $\mathfrak{a}$ est aussi abélien maximal dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

Soit $\mathfrak{n}$ la somme des espaces propres définis par un système de racines positives de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{a}$. On note A et N les sous-groupes de Lie de G d'algèbres respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$, et $\mathfrak{a}_c^*$ le dual complexe de $\mathfrak{a}$. Comme plus haut $A(g)$ désigne la A-composante de g dans la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et ρ la demi-somme des racines positives de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (comptées avec leurs multiplicités). Pour $\mu \in \mathfrak{a}_c^*$ soit

$$e_\mu(g) = A(g^{-1})^\mu \ .$$

Cette fonction vérifie

$$e_\mu(nagk) = a^{-\mu} e_\mu(g) \ , \ e_\mu(e) = 1$$

pour tous $n \in N$, $a \in A$, $g \in G$ et $k \in K$. Rappelons que la *transformation de Fourier-Helgason $\mathcal{F}_K$ sur $X = G/K$* est définie par ([6] p.223)

$$\mathcal{F}_K u(\lambda, k) = \int_{G/K} u(gK) e_{i\lambda-\rho}(k^{-1}g)\ d(gK)\ , \tag{12}$$

pour $u \in C_c^\infty(G/K)$, $k \in K$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$.

Soit maintenant $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ la base de $\mathfrak{a}^*$ formée des racines simples de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et soit D l'ouvert des $\mu \in \mathfrak{a}_c^*$ tels que $< \operatorname{Re}\mu, \alpha_j >$ soit strictement positif pour $j = 1, \ldots, \ell$. On peut alors construire ([10] p.87) pour chaque $\mu \in D$ une fonction continue $f_\mu : G \to \mathbb{C}$ telle que

$$f_\mu(nagh) = a^{-\mu} f_\mu(g)\ ,\ f_\mu(e) = 1\ , \tag{13}$$

pour tous $n \in N$, $a \in A$, $g \in G$ et $h \in H$, et on définit la *transformation de Fourier $\mathcal{F}_H$ sur G/H* par

$$\mathcal{F}_H v(\lambda, k) = \int_{G/H} v(gH) f_{i\lambda-\rho}(k^{-1}g)\ d(gH)\ , \tag{14}$$

pour $v \in C_c^\infty(G/H)$, $k \in K$ et $i\lambda - \rho \in D$.

Notons

$$m(\lambda) = \int_K f_{i\lambda-\rho}(k)\ dk\ . \tag{15}$$

On peut montrer ([10] p.88) que c'est une fonction holomorphe de λ sur l'ouvert de $\mathfrak{a}_c^*$ défini par $i\lambda - \rho \in D$. Sous les hypothèses 1 et 2 on a ([9] p.182, [10] p.92, [11])

$$\boxed{\mathcal{F}_H R u(\lambda, k) = m(\lambda) \mathcal{F}_K u(\lambda, k)} \tag{16}$$

pour $u \in C_c^\infty(G/K)$, $k \in K$ et $i\lambda - \rho \in D$. Dans ce "*projection slice theorem*" R désigne la transformation de Radon définie par le couple d'espaces homogènes $X = G/K$, $\Xi = G/H$ comme au paragraphe 1.b. Compte tenu du précédent résultat du même type (7) (qui s'étend aisément aux fonctions non K-invariantes), l'égalité (16) relie l'actuelle transformation de Radon géodésique à celle sur les horocycles de X, via $\mathcal{F}_H$ d'une part et Fourier euclidien d'autre part.

Preuve de (16). Par dualité de R et R^* on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_H R u(\lambda, k) &= \int_{G/H} Ru(gH) f_{i\lambda-\rho}(k^{-1}g)\ d(gH) \\
&= \int_{G/K} u(gK) R^* f_{i\lambda-\rho}(k^{-1}g)\ d(gK)\ ,
\end{aligned}$$

puisque R^* commute à l'action de K à gauche. Or la décomposition d'Iwasawa $gK = naK$ donne, d'après (13),

$$\begin{aligned}
R^* f_{i\lambda-\rho}(gK) &= \int_K f_{i\lambda-\rho}(nak)\ dk \\
&= a^{-i\lambda+\rho} \int_K f_{i\lambda-\rho}(k)\ dk = m(\lambda) e_{i\lambda-\rho}(g)\ ,
\end{aligned}$$

ce qui établit (16).

b. Applications. La transformation $\mathcal{F}_K$ est bien connue, on sait notamment l'inverser, par suite (16) est un excellent outil pour l'étude de R, à condition toutefois d'avoir suffisamment d'informations sur la fonction $m(\lambda)$. Pour cela Ishikawa introduit une hypothèse supplémentaire.

Comme

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ (c'est l'ensemble des points fixes de l'involution $\sigma\theta$), contenant $\mathfrak{a}$, on peut ainsi définir sur $\mathfrak{a}$ deux systèmes de racines, venus de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}_+$ respectivement, d'où les deux groupes de Weyl $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et $W(\mathfrak{g}_+, \mathfrak{a})$; le second est un sous-groupe du premier.

Hypothèse 3. On a $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = W(\mathfrak{g}_+, \mathfrak{a})$. *De plus le normalisateur dans* K *de* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ (qui contient $K \cap H$) *est égal à* $K \cap H$.

On trouvera dans [10] la liste des triplets (G, K, H) qui vérifient les hypothèses 1, 2 et 3. C'est le cas par exemple pour

$$G = SU(p,q) \ , \ K = S(U(p) \times U(q)) \ , \ H = SO(p,q)$$
$$G = SU(p,q;\mathbb{F}) \ , \ K = S(U(p;\mathbb{F}) \times U(q;\mathbb{F})) \ , \ H = S(U(p-k;\mathbb{F}) \times U(k,q;\mathbb{F}))$$

avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $p - k \geq q \geq 1$.

L'auteur parvient alors à expliciter entièrement $m(\lambda)$, par un produit de quotients de fonctions Gamma semblable à celui de la fonction $c(\lambda)$ de Harish-Chandra.

Cette expression montre d'abord que $m(\lambda)$ ne s'annule pas pour $i\lambda - \rho \in D$, d'où résulte *l'injectivité de* R sur l'espace $C_c^\infty(X)$. En effet, $\mathcal{F}_K u$ étant une fonction entière de λ sur $\mathfrak{a}_c^*$, l'égalité $Ru = 0$ entraîne, d'après (16), que cette fonction est identiquement nulle, d'où $u = 0$ par l'injectivité de $\mathcal{F}_K$.

On a même un *théorème de support* ([10] p.99). Soient $u \in C_c^\infty(X)$ et $R > 0$. Si

$$Ru(kaH) = 0 \text{ pour } k \in K, a \in A \text{ et } |\log a| \geq R \ ,$$

alors

$$u(kaK) = 0 \text{ pour } k \in K, a \in A \text{ et } |\log a| \geq R \ .$$

Idée de la preuve. L'hypothèse sur Ru entraîne une inégalité de type Paley-Wiener sur le domaine de définition de $\mathcal{F}_H Ru$. On vérifie sur l'expression explicite de $m(\lambda)$ que $m(\lambda)^{-1}$ est une fonction à croissance polynomiale sur cet ouvert. On en déduit d'après (16) une inégalité de Paley-Wiener analogue pour $\mathcal{F}_K u$. Pour pouvoir conclure grâce au théorème de Paley-Wiener pour $\mathcal{F}_K$ ([6] p.270), il reste à étendre l'inégalité de l'ouvert précédent à l'espace $\mathfrak{a}_c^*$ tout entier. Ce dernier pas, assez technique, nécessite le recours à une décomposition selon les représentations de K.

Dans [10] le théorème de support est même établi pour toute fonction de l'espace de Schwartz de X, ce qui rend la preuve beaucoup plus longue et délicate.

Signalons enfin que l'égalité (16) devrait conduire à une formule d'inversion de la transformation de Radon R, puisqu'on sait inverser $\mathcal{F}_K$. Il serait intéressant de rechercher une interprétation géométrique du résultat.

Références

[1] BERENSTEIN, C. and E. CASADIO TARABUSI, Inversion formulas for the k-dimensional Radon transform in real hyperbolic spaces, *Duke Math. J.* 62 (1991), 613-631.

[2] DEANS, S., *The Radon transform and some of its applications*, Krieger 1993.

[3] HELGASON, S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press 1978.

[4] HELGASON, S., *Groups and geometric analysis*, Academic Press 1984.

[5] HELGASON, S., The totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces, *Contemp. Math.* 113 (1990), 141-149.

[6] HELGASON, S., *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys and Monographs 39, Amer. Math. Soc. 1994.

[7] HELGASON, S., *The Radon transform*, second edition, Birkhäuser 1999.

[8] HELGASON, S., communication privée, 2004.

[9] ISHIKAWA, S., The range characterizations of the totally geodesic Radon transform on the real hyperbolic space, *Duke Math. J.* 90 (1997), 149-203.

[10] ISHIKAWA, S., Symmetric subvarieties in compactifications and the Radon transform on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type, *J. Funct. Anal.* 204 (2003), 50-100.

[11] ISHIKAWA, S., The Radon transform for double fibrations of semisimple symmetric spaces, prépublication 2004.

[12] RADON, J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Nat. Kl.* 69 (1917), 262-277 ; English translation in [2], 204-217.

[13] ROUVIÈRE, F., Inverting Radon transforms : the group-theoretic approach, *Enseign. Math.* 47 (2001), 205-252.

[14] RUBIN, B., Radon, cosine and sine transforms on real hyperbolic space, *Adv. Math.* 170 (2002), 206-223.

Laboratoire J.A. Dieudonné
Université de Nice
Parc Valrose
06108 Nice cedex 2, France
e-mail frou@math.unice.fr